TDG complément sur flux Eliassen-Palm et équation enstrophie

Aymeric Spiga 11/2022

La conservation du tourbillon potentiel QG conduit à l'équation enstrophie

l'enstrophie est la variance des perturbations de tourbillons potentiels (pour la moyenne $\overline{\cdot}$)

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \overline{q_g'^2}}{\partial t} + \overline{v_g' q_g'}\frac{\partial q_0}{\partial y} = \overline{q_g' Z'}$$

$$(*) \quad \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} + \overline{v'q'} = \frac{\overline{q_g' Z'}}{q_{0y}} \quad \text{en introduisant} \quad \boxed{\mathcal{A} = \frac{\overline{q'^2}}{2 q_{0y}}}$$

il reste à montrer que $\overline{v'q'} = \underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathcal{F}}}_{\text{flux Eliassen-Palm}}$

Commençons par exprimer $v'q'$

$$q = f + \xi + f_0 \frac{\partial}{\partial z}\frac{b_e}{N^2}$$

$$q_0 = f + \xi_0 + f_0 \frac{\partial}{\partial z}\frac{b_e^0}{N^2} \rightsquigarrow q' = \xi' + f_0 \frac{\partial}{\partial z}\frac{b'}{N^2}$$

$$\Rightarrow \quad v'q' = \underset{(1)}{v'\xi'} + \underset{(2)}{f_0 v' \frac{\partial}{\partial z}\frac{b'}{N^2}}$$

(2) on veut faire apparaître $v'b'$ qui est le terme en z du flux EP

$$\underbrace{f_0 \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{v'b'}{N^2}\right)}_{\text{intervient dans le flux EP}} = \underbrace{f_0 v' \frac{\partial}{\partial z}\frac{b'}{N^2}}_{\text{OK terme (2)}} + f_0 \frac{b'}{N^2}\frac{\partial v'}{\partial z}$$

comme déjà fait plusieurs fois on passe par le géopotentiel ϕ' qui est tel que $f_0 v' = \phi'_x$ et on utilise la commutation

$$f_0 \frac{b'}{N^2}\frac{\partial v'}{\partial z} = \frac{b'}{N^2}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \phi'}{\partial x} = \frac{b'}{N^2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \phi'}{\partial z} = \frac{1}{N^2} b' \frac{\partial b'}{\partial x} = \frac{1}{N^2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{b'^2}{2}$$

(1) OK reste le terme $v'\xi'$ à exprimer pour faire apparaître le terme en y de EP flux

$$v'\xi' = \underbrace{v'\frac{\partial v'}{\partial x}}_{\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}v'^2} - \underbrace{v'\frac{\partial u'}{\partial y}}_{\frac{\partial}{\partial y}u'v' - u'\frac{\partial v'}{\partial y}}$$

→ même technique que précédemment (*) on passe par le géopotentiel

(*) $$u'\frac{\partial v'}{\partial y} = u'\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{f_0}\frac{\partial \phi'}{\partial x} = \frac{u'}{f_0}\frac{\partial}{\partial x}\underbrace{\frac{\partial \phi'}{\partial y}}_{-f_0 u'} = -u'\frac{\partial u'}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{2}u'^2$$

$$\rightsquigarrow v'\xi' = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v'^2}{2} - \frac{u'^2}{2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}u'v'$$

NB : erreur d'énoncé un f_0 en trop

☆ OK maintenant on collecte les termes (1) et (2)

$$v'q' = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v'^2}{2} - \frac{u'^2}{2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}u'v'}_{(1)} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial z}\frac{f_0}{N^2}v'b' - \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{N^2}\frac{b'^2}{2}}_{(2)}$$

x y z x

d'où

$$v'q' = \vec{\nabla}\cdot\vec{\mathcal{F}}$$

rappel ↳ en QG

avec $\vec{\mathcal{F}} = \left[\left(\frac{v'^2}{2} - \frac{u'^2}{2} - \frac{1}{N^2}\frac{b'^2}{2}\right), -u'v', \frac{f_0}{N^2}v'b'\right]$

moyenne zonale $\rightsquigarrow$ $\overline{v'q'} = -\frac{\partial}{\partial y}\overline{u'v'} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{f_0}{N^2}\overline{v'b'}$

donc (*) ⇒ $$\boxed{\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{\mathcal{F}} = \frac{\overline{q'\mathcal{Z}'}}{\overline{q}_{0y}}}$$

Equation de l'enstrophie

$\vec{\mathcal{F}} = [-\overline{u'v'}, \frac{f_0}{N^2}\overline{v'b'}]$

$\mathcal{D}$

$\frac{\partial}{\partial t}$ action + flux action = processus dissipatifs ou diabatiques

si les ondes sont stationnaires (ni ne croissent ni ne décroissent) $\partial\mathcal{A}/\partial t = 0$

si elles sont non dissipatives (conservatives) $\mathcal{D} = 0$

alors $\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = 0$ flux EP non divergent

équations TEM → $\boxed{\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = 0 \quad \text{théorème de non accélération}}$