Discrétisation des équations de la dynamique dans le modèle LMDZ

Robert Sadourny, Phu Le Van, Frédéric Hourdin
Laboratoire de Météorologie Dynamique du CNRS
Ecole Normale Supérieure
24 rue Lhomond
75231 PARIS cedex 05
FRANCE

November 16, 1995

Le modèle climatique du LMD est bâti, comme tous les modèles de circulation générale atmosphérique, sur la résolution numérique des équations primitives de la météorologie décrites dans de nombreux ouvrages [2]. L'analyse présentée ici a été menée sur la nouvelle version de la dynamique du LMD écrite par Phu Le Van [3] sur une formulation de Robert Sadourny. Cette formulation diffère de l'ancienne essentiellement par deux points: dans la nouvelle formulation, la répartition des points en longitude et en latitude peut être changée arbitrairement. L'autre modification porte sur la répartition des points aux pôles[1].

La coordonnée verticale du modèle est la pression normalisée par sa valeur à la surface: $\sigma = p/p_s$. On utilise en fait σ aux niveaux inter-couches et $s = \sigma^\kappa$ au milieu des couches. On note X et Y les coordonnées horizontales:

X (resp. Y) est une fonction biunivoque de la longitude λ (resp. de la latitude ϕ). Ces deux fonctions peuvent être choisies de façon arbitraire dans le modèle LMDZ ce qui permet d'effectuer un zoom sur une région du globe particulière. Une grille de ce type est montrée sur la Figure 1. Les variables scalaires (température potentielle $\theta = c_p T/{p_s}^\kappa$, géopotentiel Φ et pression de surface p_s) sont évaluées aux points correspondant à des couples de valeurs entières $(X,Y) = (i,j)$. Les variables dynamiques sont décalées par rapport aux variables scalaires en utilisant une grille C dans la définition de Arakawa [1]: le vent zonal est calculé aux points $(X,Y) = (i+1/2, j)$ et le vent méridien aux points $(X,Y) = (i, j+1/2)$. La disposition des variables sur la grille est illustrée sur la Figure 2.

On utilise en fait les composantes covariantes ($\tilde{u}$ et $\tilde{v}$) et contravariantes ($\tilde{\tilde{u}}$ et $\tilde{\tilde{v}}$) du vent définies par

$$\begin{array}{lllll} \tilde{u} = c_u u & \text{et} & \tilde{\tilde{u}} = u/c_u & \text{avec} & c_u = a\cos\phi\,(d\lambda/dX) \\ \tilde{v} = c_v v & \text{et} & \tilde{\tilde{v}} = v/c_v & \text{avec} & c_v = a\,(d\phi/dY) \end{array} \tag{1}$$

où u et v sont les composantes physiques du vecteur vent horizontal. On introduit également:

[1] Aux pôles sont calculés: le vent méridien dans l'ancienne formulation et les variables scalaires dans la nouvelle.

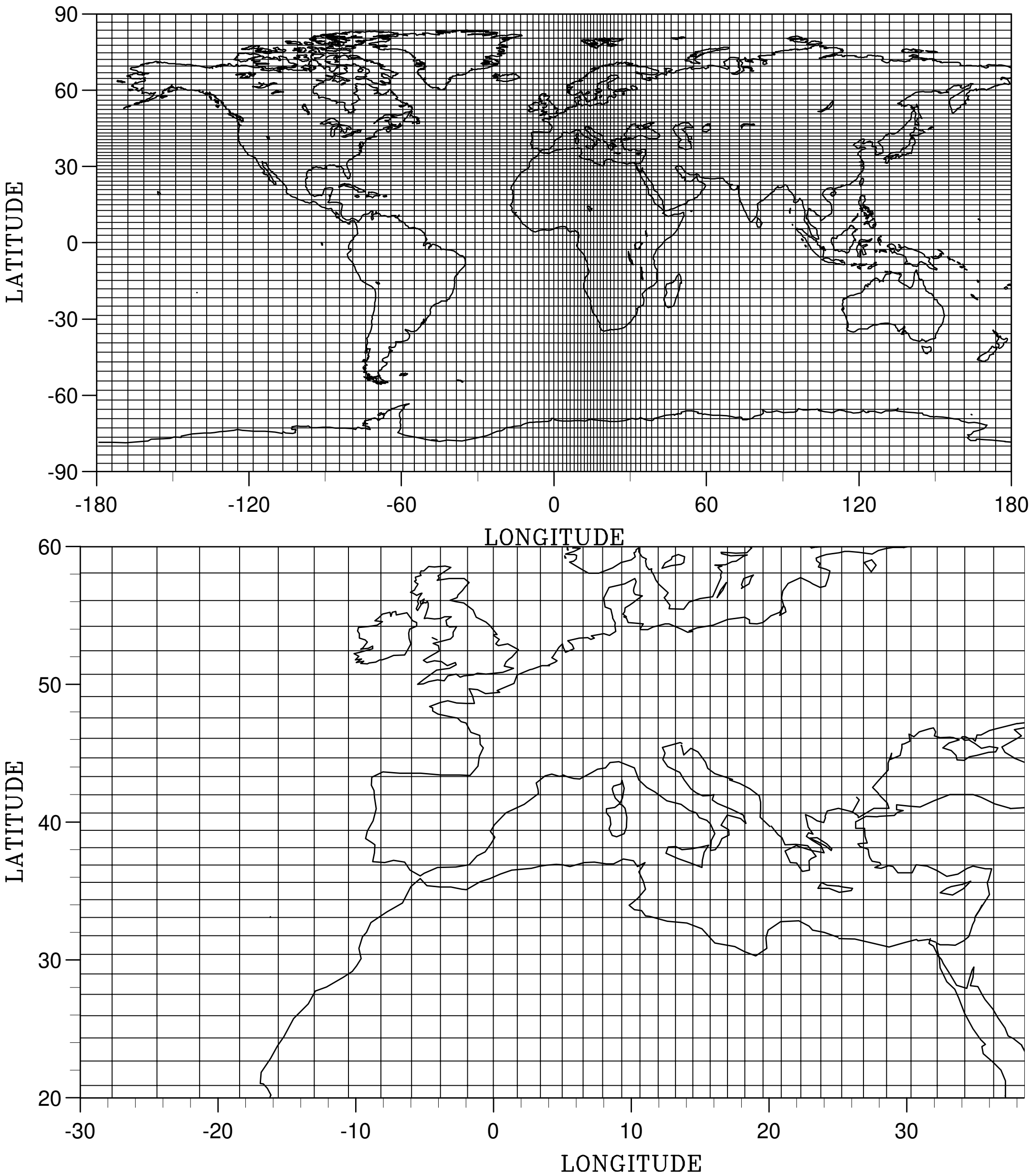

Figure 1: Grille obtenue avec 96 points en longitude et 73 en latitude et un zoom d'un facteur 3 centré sur la méditérannée (grille utilisée au laboratoire par Ali Harzallah)
.

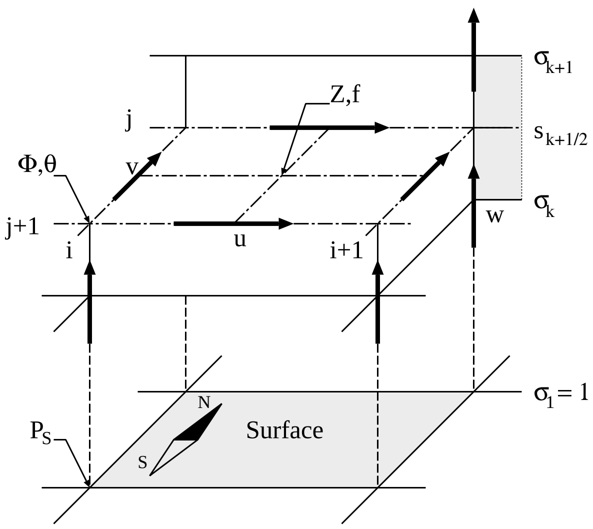

Figure 2: Disposition des variables dans la grille du LMD

la pression extensive: $\tilde{p}_s$ (pression au sol multipliée par l'aire de la maille).

les trois composantes du flux de masse:

$$U = \overline{\tilde{p}_s}^X \tilde{u},\ V = \overline{\tilde{p}_s}^Y \tilde{v} \text{ et } W = \tilde{p}_s \dot{\sigma} \text{ avec } \dot{\sigma} = \frac{d\sigma}{dt} \tag{2}$$

le facteur de Coriolis multiplié par l'aire de la maille: $f = 2\Omega \sin \phi c_u c_v$ où Ω est la vitesse de rotation de la planète.

la vorticité potentielle absolue:

$$Z = \frac{\mathcal{F}\left(\delta_X \tilde{v} - \delta_Y \tilde{u}\right) + f}{\overline{\tilde{p}_s}^{X,Y}} \tag{3}$$

l'énergie cinétique

$$K = \frac{1}{2}\left(\overline{\tilde{u}\tilde{\tilde{u}}}^X + \overline{\tilde{v}\tilde{\tilde{v}}}^Y\right) \tag{4}$$

La notation δX signifie simplement qu'on effectue la différence entre deux points consécutifs suivant la direction X. La notation $\overline{a}^X$ signifie qu'on prend la moyenne arithmétique de la quantité a suivant la direction X. $\mathcal{F}$ est un filtre longitudinale appliqué dans les régions polaires. Les équations discrétisées sont écrites sous la forme suivante:

équations du mouvement:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} - \overline{Z}^Y \overline{V}^{X,Y} + \delta_X \mathcal{F}\left(\Phi + K\right) + s\overline{\theta}^X \delta_X \mathcal{F}\left({p_s}^{\kappa}\right) - \frac{\overline{\tilde{u}_a}^{Y,Y} \delta_Z \overline{W}^X}{\overline{\tilde{p}_s}^X \delta_Z \sigma} + \frac{\delta_Z \left(\overline{W}^X \overline{\tilde{u}_a}^Z\right)}{\overline{\tilde{p}_s}^X \delta_Z \sigma} = S_{\tilde{u}} \tag{5}$$

oú $\tilde{u}_a$ est la composante zonale covariante du vecteur vent absolu: $\tilde{u}_a = \tilde{u} + c_u a\Omega\cos\phi$ et

$$\frac{\partial\tilde{v}}{\partial t} + \overline{Z}^X\overline{U}^{X,Y} + \delta_Y\mathcal{F}(\Phi+K) + s\overline{\theta}^Y\delta_Y\mathcal{F}(p_s{}^\kappa) - \frac{\overline{\tilde{v}}^{X,X}\delta_Z\overline{W}^Y}{\overline{\tilde{p}_s}^Y\delta_Z\sigma} + \frac{\delta_Z\left(\overline{W}^Y\overline{\tilde{v}}^Z\right)}{\overline{\tilde{p}_s}^X\delta_Z\sigma} = S_{\tilde{v}} \quad (6)$$

équation thermodynamique:

$$\frac{\partial(\tilde{p}_s\theta)}{\partial t} + \mathcal{F}\left[\delta_X\left(\overline{\theta}^X U\right) + \delta_Y\left(\overline{\theta}^Y V\right)\right] + \frac{\delta_Z\left(\overline{\theta}^Z W\right)}{\delta_Z\sigma} = S_\theta \quad (7)$$

équation hydrostatique:

$$\delta_Z\Phi = -p_s^\kappa\overline{\theta}^z\delta_Z s \quad (8)$$

équations de continuité:

$$\frac{\partial p_s}{\partial t} = \mathcal{F}\left[\sum_z \delta_Z\sigma(\delta_X U + \delta_Y V)\right] \quad (9)$$

$$\delta_Z W = -\delta_Z\sigma\left[\mathcal{F}(\delta_X U + \delta_Y V) + \frac{\partial p_s}{\partial t}\right] \quad (10)$$

On a noté S les termes sources dans les différentes équations. Dans ces termes sources, on distingue 1) d'une part les paramétrisations physiques mentionnées plus haut et qui font intervenir pour une maille donnée du modèle, tous les points situés sur une même verticale mais ceux-là seulement; 2) les opérateurs de dissipation horizontales, scencés rendre compte des échanges entre échelles explicitement représentées dans le modèle et échelles sous-mailles. Ces opérateurs ont la structure de Laplaciens agissant sur des plans horizontaux c'est à dire qu'il font intervenir un voisin de chaque côté dans les deux directions horizontales. Cet opérateur est généralement itéré pour le rendre plus selectif en échelle (plus on itère un laplacien et plus sont effet sur les petites échelles devient important relativement).

References

[1] A. Arakawa and V. R. Lamb. Computational design of the basic dynamical processes of the ucla general circulation model. *Methods in Computational Physics*, 17:173–265, 1977.

[2] J. R. Holton. *An introduction to dynamic meteorology*, volume 23 of *Internal geophysics series*. Academic Press, second edition, 1979.

[3] P. Le Van. Description de directives pour l'utilisation de la nouvelle dynamique du Modèle de Circulation Générale. Technical Report 147, Laboratoire de Météorologie Dynamique du CNRS, 24 rue Lhomond/75 231 Paris CEDEX 05, Note interne 1989.