Conservation du moment cinétique dans le Modèle de Circulation Générale du LMD

Frédéric Hourdin

15 Août 1992

note interne LMD n^o175

Laboratoire de Météorologie Dynamique du CNRS
Ecole Normale Supérieure
24 rue Lhomond
75231 PARIS cedex 05
FRANCE

1 Introduction

Les schémas numériques en différences finies utilisés pour intégrer les équations de la mécanique des fluides sont généralement conçus pour préserver certaines des propriétés de conservation des équations originelles. A cela, deux raisons principales:

1. la conservation des invariants, en particulier les invariants quadratiques, est importante pour éviter que les modèles divergent[1].

2. la deuxième motivation est plus spécifique de la modélisation climatique, plus intéressée à reproduire certaines caractéristiques stastistiques des écoulements qu'à suivre de façon précise une solution particulière (comme en météorologie). La conservation de certains invariants permet d'éviter des *dérives* de ces caractéristiques statistiques dans des simulations longues.

Au début de la modélisation climatique, priorité était donnée à la stabilité des modèles. Les recherches se sont donc surtout concentrées sur la conservation des invariants quadratiques fondamentaux: l'énergie et l'enstrophie potentielle. En fait, aucune formulation numérique en différences finies ne semble pouvoir conserver simultanément les deux quantités [9]. L'originalité essentielle de la dynamique du LMD est d'avoir privilégié la conservation de l'enstrophie [8] alors que la plupart des modèles privilégient l'énergie [1].

Le sujet de cette note est de montrer que la non-conservation du moment cinétique dans la formulation originale du Modèle de Circulation Générale (MCG) du LMD conduit à des erreurs systématiques sur la structure du vent zonal, particulièrement dans la région des alizés. Finalement, une modification du schéma d'advection du moment cinétique est proposée. Elle permet de conserver partiellement le moment cinétique tout en maintenant la propriété de conservation de l'enstrophie potentielle. La nouvelle formulation améliore considérablement la représentation des alizés dans le MCG climatique. Elle est de plus un atout pour toutes les études dans lesquelles la conservation du moment cinétique joue un rôle important. L'étude de la *superrotation* de l'atmosphère de Vénus, menée il y a quelques années au LMD [11], avait par exemple buté sur ce défaut majeur du modèle dynamique.

Le travail présenté dans cette note a été motivé, à l'origine, par des problèmes numériques rencontrés lors de l'intégration de la version martienne du MCG; un fort jet était créé dans ces simulations dans les régions tropicales, aboutissant à une explosion numérique.

[1]On peut comprendre intuitivement l'importance de la conservation des invariants quadratiques. Si l'énergie totale du système atmosphérique est conservée, l'énergie cinétique et, par conséquent le module du vent sont bornés en chaque point (ce type d'argumentation est développée par exemple par Kasahara [4]).

2 Formulation originale et propriétés de conservation

2.1 Le schéma numérique

Le modèle climatique du LMD est bâti, comme tous les modèles de circulation générale atmosphérique, sur la résolution numérique des équations primitives de la météorologie décrites dans de nombreux ouvrages [3]. L'analyse présentée ici a été menée sur la nouvelle version de la dynamique du LMD écrite par Phu Le Van [5] sur une formulation de Robert Sadourny. Cette formulation diffère de l'ancienne essentiellement par deux points: dans la nouvelle formulation, la répartition des points en longitude et en latitude peut être changée arbitrairement. L'autre modification porte sur la répartition des points aux pôles[2].

L'analyse présentée ici peut être transposée sans efforts à l'ancienne formulation. En fait, l'ancienne configuration de la grille, dans laquelle les mailles ont toutes la même surface[3], est même d'une certaine façon optimale pour la conservation du moment cinétique.

La coordonnée verticale du modèle est la pression normalisée par sa valeur à la surface: $\sigma = p/p_s$. On utilise en fait σ aux niveaux inter-couches et $s = \sigma^\kappa$ au milieu des couches. On note X et Y les coordonnées horizontales: X (resp. Y) est une fonction biunivoque de la longitude λ (resp. de la latitude ϕ). Les variables scalaires (température potentielle $\theta = c_p T/{p_s}^\kappa$, géopotentiel Φ et pression de surface p_s) sont évaluées aux points correspondant à des couples de valeurs entières $(X, Y) = (i, j)$. Les variables dynamiques sont décalées par rapport aux variables scalaires en utilisant une grille C dans la définition de Arakawa [1]: le vent zonal est calculé aux points $(X, Y) = (i + 1/2, j)$ et le vent méridien aux points $(X, Y) = (i, j + 1/2)$. La disposition des variables sur la grille est illustrée sur la Figure 1.

On utilise en fait les composantes covariantes ($\tilde{u}$ et $\tilde{v}$) et contravariantes ($\tilde{\tilde{u}}$ et $\tilde{\tilde{v}}$) du vent définies par

$$\begin{array}{llll} \tilde{u} = c_u u & \text{et} \quad \tilde{\tilde{u}} = u/c_u & \text{avec} \quad c_u = a\cos\phi\,(d\lambda/dX) \\ \tilde{v} = c_v v & \text{et} \quad \tilde{\tilde{v}} = v/c_v & \text{avec} \quad c_v = a\,(d\phi/dY) \end{array} \tag{1}$$

où u et v sont les composantes physiques du vecteur vent horizontal. On introduit également:

la pression extensive: $\tilde{p}_s$ (pression au sol multipliée par l'aire de la maille).

[2]Aux pôles sont calculés: le vent méridien dans l'ancienne formulation et les variables scalaires dans la nouvelle.

[3]Dans l'ancienne formulation de la dynamique, les points étaient équidistants en sinus de la latitude et régulièrement répartis en longitude. Toutes les mailles avaient par conséquent la même aire.

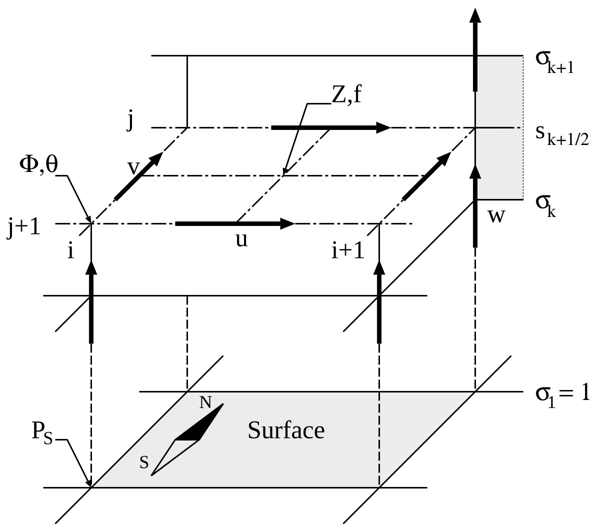

Figure 1: Disposition des variables dans la grille du LMD

les trois composantes du flux de masse:

$$U = \overline{\tilde{p}_s}^X \tilde{\tilde{u}}, \ V = \overline{\tilde{p}_s}^Y \tilde{\tilde{v}} \text{ et } W = \tilde{p}_s \dot{\sigma} \text{ avec } \dot{\sigma} = \frac{d\sigma}{dt} \tag{2}$$

le facteur de Coriolis multiplié par l'aire de la maille: $f = 2\Omega \sin \phi c_u c_v$ où Ω est la vitesse de rotation de la planète.

la vorticité potentielle absolue:

$$Z = \frac{\delta_x \tilde{v} - \delta_y \tilde{u} + f}{\overline{\tilde{p}_s}^{X,Y}} \tag{3}$$

l'énergie cinétique

$$K = \frac{1}{2}\left(\overline{\tilde{u}\tilde{\tilde{u}}}^X + \overline{\tilde{v}\tilde{\tilde{v}}}^Y\right) \tag{4}$$

La notation δX signifie simplement qu'on effectue la différence entre deux points consécutifs suivant la direction X. La notation $\overline{a}^X$ signifie qu'on prend la moyenne arithmétique de la quantité a suivant la direction X. Les équations discrétisées sont écrites sous la forme suivante:

équations du mouvement:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} - \overline{Z}^Y \overline{V}^{X,Y} + \delta_x (\Phi + K) + s\overline{\theta}^X \delta_x {p_s}^\kappa + \frac{\overline{\overline{W}^X \delta_z \tilde{u}}^Z}{\overline{\tilde{p}_s}^X \delta_z \sigma} = S_{\tilde{u}} \tag{5}$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + \overline{Z}^X \overline{U}^{X,Y} + \delta_y (\Phi + K) + s\overline{\theta}^Y \delta_y p_s{}^\kappa + \frac{\overline{\overline{W}^Y \delta_z \tilde{v}}^Z}{\overline{\tilde{p}_s}^Y \delta_z \sigma} = S_{\tilde{v}} \tag{6}$$

équation thermodynamique:

$$\frac{\partial (\tilde{p}_s \theta)}{\partial t} + \delta_x \left(\overline{\theta}^X U\right) + \delta_y \left(\overline{\theta}^Y V\right) + \frac{\delta_z \left(\overline{\theta}^Z W\right)}{\delta_z \sigma} = S_\theta \tag{7}$$

équation hydrostatique:

$$\delta_z \Phi = -p_s^\kappa \overline{\theta}^z \delta_z s \tag{8}$$

équations de continuité:

$$\frac{\partial p_s}{\partial t} = \sum_z \delta_z \sigma \left(\delta_x U + \delta_y V\right) \tag{9}$$

$$\delta_z W = -\delta_z \sigma \left(\delta_x U + \delta_y V + \frac{\partial p_s}{\partial t}\right) \tag{10}$$

On a noté S les termes sources dans les différentes équations.

2.2 Les propriétés de conservation

On dit qu'une quantité q est conservée globalement par les équations discrétisées si on peut trouver un équivalent numérique $[q]$ de q tel que:

$$\frac{\partial \langle \tilde{p}_s d\sigma [q] \rangle}{\partial t} = 0 \tag{11}$$

où la notation $\langle\rangle$ indique qu'on effectue une sommation sur l'ensemble du domaine (on s'intéresse uniquement à la façon de calculer les dérivées spatiales et pas à l'intégration temporelle). Les équations 9 et 10, par exemple, sont écrites de façon à ce que la masse totale de l'atmosphère soit exactement conservée. De même l'équation thermodynamique 7 permet de conserver numériquement θ pour les écoulements adiabatiques. En fait, la forme particulière de cette équation est choisie pour conserver à la fois θ et θ^2 (ce qui se montre en combinant cette équation avec l'équation de continuité). On montre, plus généralement, que pour une quantité q conservée par les équations physiques et une fonction f de q donnée, il existe une formulation numérique permettant de conserver à la fois q et $f(q)$ (voir par exemple [10]).

Le problème de la conservation devient plus complexe lorsqu'on s'attaque aux quantités faisant intervenir les équations dynamiques. Il est par exemple impossible de conserver à la fois l'énergie et l'enstrophie avec les formulations classiques utilisées dans les GCM [9]. Les modèles ont généralement privilégié la conservation de l'énergie. Robert Sadourny a souligné l'importance de la conservation de l'enstrophie et montré qu'elle conduit à une plus grande stabilité numérique, au moins dans un modèle des équations de couche mince [8]. La conservation de l'enstrophie a donc été privilégiée dans le modèle du LMD. Le dilemme porte en fait sur la façon de discrétiser la partie rotationnelle des termes advectifs dans les équations horizontales du mouvement.

Dans la formulation originale, l'énergie totale n'est conservée que pour les écoulements irrotationnels. Cette conservation elle-même n'est pas immédiate et conduit à l'introduction d'une contrainte sur la disposition des niveaux verticaux [10]: les niveaux intercouches (niveaux σ) et les milieux des couches (niveaux s) sont répartis de façon à satisfaire la relation suivante:

$$\overline{\sigma\delta_z s}^Z = \kappa s \delta_z \sigma \tag{12}$$

Cette relation conduit à déplacer le centre des couches par rapport à la moyenne arithmétique des niveaux inter-couches. Le décalage peut devenir tel que le centre d'une couche se trouve à l'extérieur de la couche elle-même. En pratique, il faut choisir une répartition suffisamment lisse des niveaux σ pour que les niveaux s soient proches du centre des couches en terme de masse.

Le terme rotationnel est lui conçu pour conserver la vorticité potentielle dans le cas d'un écoulement barotrope ou dans le cas d'un modèle à coordonnée verticale isentropique [8].

Dans toute cette partie, on a volontairement omis le filtrage longitudinal introduit dans les hautes latitudes du modèle pour éviter d'utiliser un pas de temps trop petit, du fait de la diminution des distances entre les points de grille près des pôles.

3 La non-conservation du moment cinétique et son effet sur la structure des alizés

3.1 Remarques générales sur la conservation du moment cinétique

Le moment cinétique total de l'atmosphère autour de l'axe des pôles est conservé au cours du temps par les écoulements atmosphériques excepté dans les échanges avec le sol. Les processus de diffusion internes à l'atmosphère, par exemple, n'induisent aucune variation de cette quantité. Autre remarque importante: du fait du caractère linéaire du moment cinétique (dans le cas $p_s = cte$), celui-ci est théoriquement conservé pour les écoulements explicitement représentés dans un modèle en différences finies (contrairement à l'enstrophie par exemple qui peut évoluer par échange avec les échelles de sous-maille). La conservation du moment cinétique est donc une contrainte très forte sur l'écoulement atmosphérique.

Cette conservation est, en plus, un instrument important d'analyse pour la compréhension de la circulation générale. Dans ce cadre en effet, on s'intéresse particulièrement à la redistribution dans un plan latitude-altitude de la moyenne zonale de certaines quantités. Or, dans le cas le plus simple d'un écoulement axi-symétrique, l'évolution du moment cinétique dans un plan latitude-altitude se réduit au terme d'advection méridienne. Cette vision axi-symétrique du transport du moment cinétique permet d'expliquer la distribution du vent zonal dans les régions de basse latitude dominées par la circulation de Hadley, relativement axi-symétrique. En tenant compte en plus des perturbations longitudinales, le moment cinétique peut être échangé entre deux points du plan latitude-altitude par des ondes, ce qui se produit par exemple dans le cas des ondes de relief.

3.2 Erreurs systématiques dans le modèle original du LMD

J'ai été conduit à m'intéresser à la conservation du moment cinétique dans le modèle du LMD à la suite de problèmes numériques survenus lors de l'intégration de la version martienne du modèle dans une résolution très faible: *32 longitudes* $\times$ *24 latitudes* $\times$ *11 niveaux verticaux.* Dans ces simulations, le modèle produisait localement un très fort maximum du vent zonal au sommet de la branche descendante de la cellule de Hadley. Ce jet d'ouest tropical était pratiquement réduit à un point dans le plan (ϕ, σ). Les simulations finissaient par diverger. Ce maximum du vent zonal apparaissait aussi dans des simulations d'une version 2–D axi-symétrique du modèle, ce qui éliminait d'emblée l'hypothèse d'un effet lié à des ondes. Seuls restaient possibles des effets des processus dissipatifs (diffusion verticale et dissipation horizontale) ou des problèmes numériques liés à la non conservation du moment cinétique. La première hypothèse a été éliminée car des tests effectués avec une dissipation plus forte produisaient un comportement moins pathologique.

Sur Mars, les informations directes sur les vents sont très rares, et il est donc difficile de certifier que le comportement du vent zonal est effectivement pathologique, autrement que par des arguments théoriques. Mais ce comportement présente de fortes analogies avec des défauts systématiques du vent zonal simulé par le modèle climatique du LMD. En effet, lors des premières tentatives d'intégrations longues (sur plus d'un an) du modèle climatique du LMD, au milieu des années 1980, une dérive systématique est apparue aboutissant à une disparition presque complète des alizés. Vincent Cassé a alors montré [2] que le couplage avec une physique sans doute plus dissipative, celle de la Météorologie Nationale, réduisait la dérive de façon significative. A la suite de ce travail, Hervé Le Treut a introduit un terme de mélange vertical de la quantité de mouvement dans les processus d'ajustement convectif, ce qui a eu pour effet de diminuer la dérive et d'améliorer la représentation du vent zonal. Cependant, ce changement n'a pas

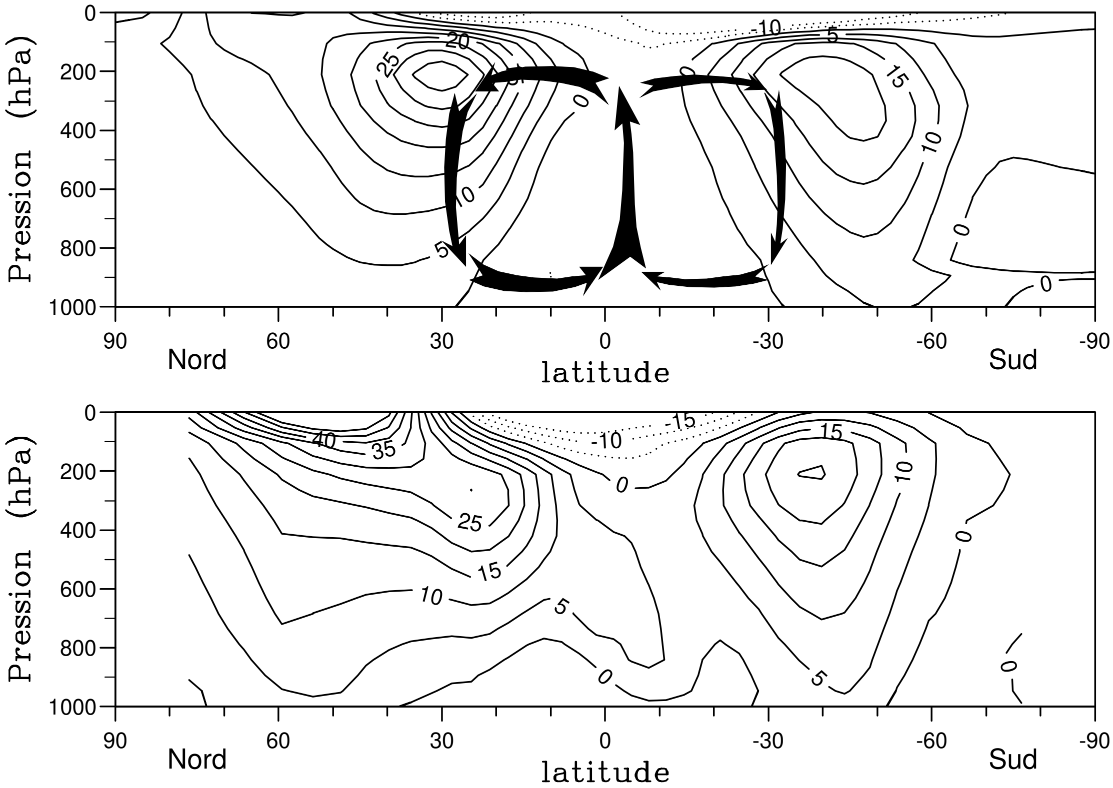

Figure 2: Comparaison d'une climatologie du vent zonal (ms^{-1}) au mois de Janvier et des résultats du modèle du LMD sans conservation du moment cinétique. La climatologie (en haut) est celle de Oort [6]. Les résultats du modèle du LMD (en bas) correspondent à une moyenne sur cinq ans d'un run de contrôle effectué avec le *cycle 4* du modèle [7] en résolution *48 longitudes* $\times$ *36 latitudes* $\times$ *11 niveaux verticaux* dans le cadre de l'étude d'un scenario de doublement du gaz carbonique (Z. X. Li et M. Forichon).

résolu complètement le problème, comme le montre la structure du vent zonal pour un run de contrôle dans une expérience de doublement du gaz carbonique effectuée par Zhao-Xin Li et Michèle Forichon avec le modèle du LMD (panneau du bas Figure 2). En comparant le vent zonal simulé à la climatologie (panneau du haut), on constate notamment la présence anormale de vents positifs dans les basses latitudes. La fermeture des jets en altitude est également très mal représentée dans les simulations.

Les problèmes survenus dans les simulations terrestres et martiennes présentent les similarités suivantes: le problème est particulièrement sensible dans les régions tropicales où il correspond à une erreur positive sur le vent zonal; la circulation produite par le modèle est d'autant plus irréaliste que la résolution et la dissipation sont faibles.

Remarque sur la répartition géographique des erreurs. L'équilibre géostrophique n'est stable vis à vis d'un échange horizontal de particules d'air que si la vorticité absolue de l'écoulement reste partout positive [3]. Ceci implique en particulier que la moyenne zonale du moment cinétique doit décroître avec la latitude. Dans la branche supérieure de la cellule de Hadley, où le profil latitudinal du vent zonal n'est pas très éloigné d'un profil à moment cinétique constant, une source purement numérique de moment cinétique, vers 30^o par exemple, produirait une inversion du gradient latitudinal de moment cinétique. L'instabilité ainsi créée serait alors réduite par un transport de moment cinétique vers l'équateur. Ceci peut expliquer *a priori* que l'erreur numérique produise un renforcement systématique de la rotation de l'atmosphère dans les basses latitudes.

3.3 Analyse de l'erreur numérique produite dans le cas simple d'un écoulement axi-symétrique

Il s'avère en fait que l'erreur responsable de la dérive sur le vent zonal apparaît même dans le cas d'un écoulement axi-symétrique, ce qui simplifie considérablement l'analyse. La dérive est d'ailleurs également observée dans les simulations martiennes effectuées avec la version 2-D. Dans le cas d'un écoulement axi-symétrique sans termes sources, la première composante de l'équation du mouvement se réduit à:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} - \frac{\overline{-\delta_y \tilde{u} + f}^Y}{\overline{\tilde{p}_s}^Y} \overline{V}^Y + \frac{\overline{W \delta_z \tilde{u}}^Z}{\tilde{p}_s \delta_z \sigma} = 0 \tag{13}$$

En introduisant le moment cinétique particulaire

$$M = a \cos\phi \left(u + a\Omega\cos\phi\right) = \left(\frac{d\lambda}{dX}\right)^{-1} \left(\tilde{u} + c_u a\Omega\cos\phi\right) \tag{14}$$

l'équation 13 peut s'écrire comme une équation d'évolution du moment cinétique sous l'effet de l'advection dans le plan latitude–altitude

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\overline{\delta_y M}^Y}{\overline{\tilde{p}_s}^Y} \overline{V}^Y + \frac{\overline{W \delta_z M}^Z}{\tilde{p}_s \delta_z \sigma} = 0 \tag{15}$$

sous réserve que le facteur de Coriolis soit calculé comme un rotationnel:

$$f = -\delta_y \left(c_u a\Omega\cos\phi\right) \tag{16}$$

ce qui est supposé par la suite[4]. Simplifions à nouveau les équations en supposant

[4] Dans les équations originelles du MCG, le terme de Coriolis n'était pas calculé sous sa forme rotationnelle (équation 16). Cependant, les erreurs sur le moment cinétique qui en découlent sont négligeables devant celles générées par la mauvaise représentation de l'advection méridienne du vent zonal.

que $\tilde{p}_s$ est constant à la fois spatialement et dans le temps (sur une grille à aires constantes, ceci revient à s'intéresser aux écoulements à pression de surface constante). C'est en fait le seul moyen de se débarrasser de la pression au sol introduite au dénominateur du terme rotationnel pour assurer la conservation de l'enstrophie potentielle. L'équation 15 se réduit alors à

$$\frac{\partial\left(\tilde{p}_s\delta_z\sigma M\right)}{\partial t}+\overline{\delta_y M}^Y\overline{V}^Y\delta_z\sigma+\overline{W\delta_z M}^Z=0 \tag{17}$$

On peut introduire une formulation conservative classique assez proche de cette formulation:

$$\frac{\partial\left(\tilde{p}_s\delta_z\sigma M\right)}{\partial t}+\overline{V\delta_y M}^Y\delta_z\sigma+\overline{W\delta_z M}^Z=0 \tag{18}$$

Dans ce cas en effet, l'évolution du moment cinétique global se réduit en utilisant l'anti-symétrie de l'opérateur de dérivation ($\langle a\delta_x b\rangle=-\langle b\delta_x a\rangle$):

$$\begin{aligned}\frac{\partial\left\langle\tilde{p}_s\delta_z\sigma M\right\rangle}{\partial t} &= -\left\langle V\delta_y M\delta_z\sigma\right\rangle-\left\langle W\delta_z M\right\rangle && (19)\\ &= \left\langle M\delta_y V\delta_z\sigma\right\rangle+\left\langle M\delta_z W\right\rangle && (20)\end{aligned}$$

et s'annule finalement grâce à l'équation de continuité. De plus un développement simple montre que:

$$\overline{V\delta_y M}^Y-\overline{\delta_y M}^Y\overline{V}^Y=\frac{\delta_y V\delta_y\left(\delta_y M\right)}{4} \tag{21}$$

En utilisant les Equations 18 et 21, l'équation 17 devient

$$\frac{\partial\left(\tilde{p}_s\delta_z\sigma M\right)}{\partial t}+\overline{V\delta_z M}^Y\delta_z\sigma+\overline{W\delta_z M}^Z=\frac{\delta_y V\delta_y\left(\delta_y M\right)}{4}\delta_z\sigma \tag{22}$$

où la partie non conservative du moment cinétique a été isolée dans le membre de droite. On voit qu'une erreur est produite sur le moment cinétique global dès lors qu'il existe une corrélation entre la dérivée seconde en latitude du moment cinétique et la dérivée latitudinale du vent méridien.

Sur Terre et sur Mars, le terme $\delta_y\left(\delta_y M\right)$ est généralement négatif, ce qui correspond à la condition suffisante de stabilité au sens de l'instabilité barotrope [3]. Dés lors, le terme non conservatif de l'équation de transport du moment cinétique produira une erreur positive sur le vent zonal dans les zones de convergence latitudinale ($\delta_y V<0$) et négative dans les régions de divergence. Cet effet local est illustré sur la Figure 3 représentant l'évolution du vent zonal dans une simulation martienne de dix jours.

L'état initial est le résultat d'une simulation effectuée avec la formulation conservative présentée dans la section suivante. Il correspond à un solstice d'hiver nord; la circulation méridienne (graphique du haut Figure 3) est dominée par une grande cellule de Hadley qui s'étend des moyennes latitudes de l'hémisphère

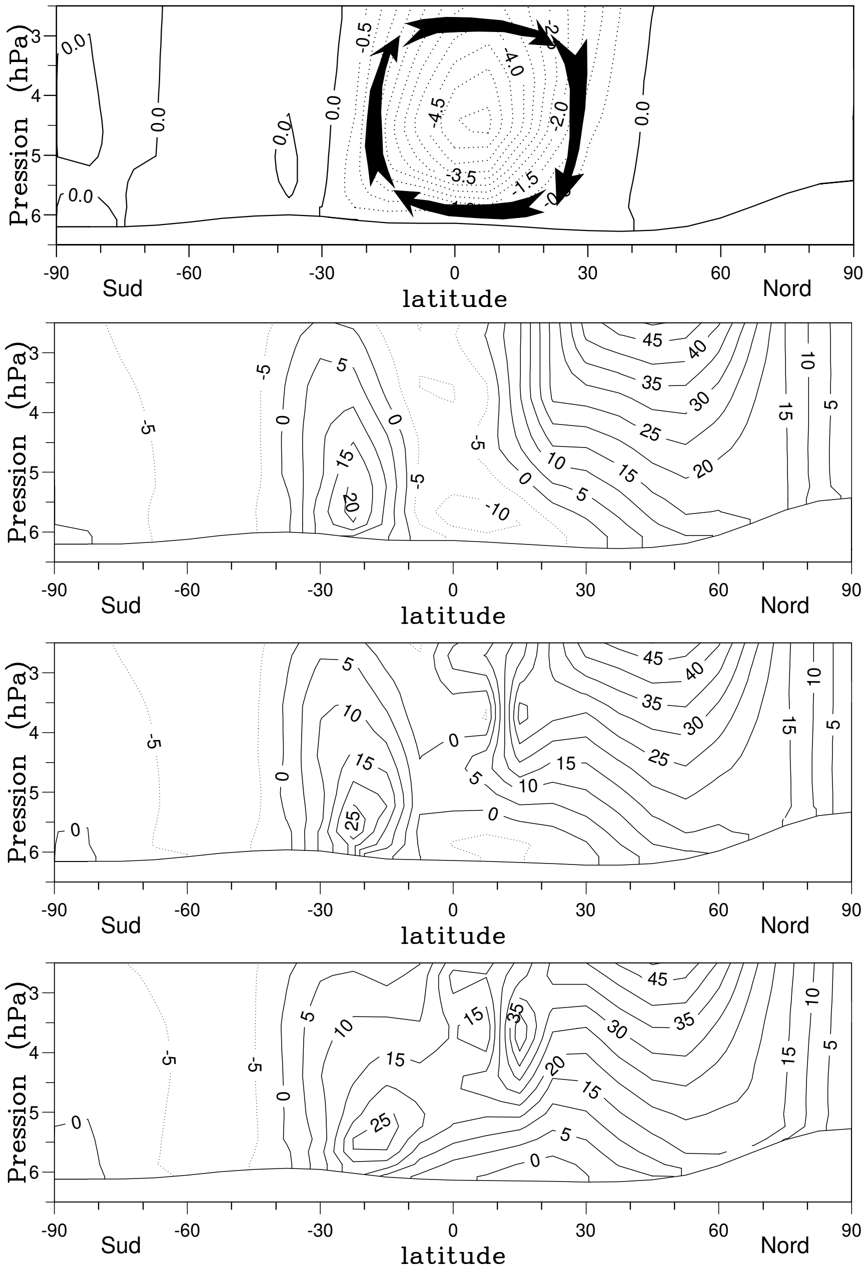

Figure 3: Evolution sur 10 jours du vent zonal (ms^{-1}) sur Mars simulé avec un schéma qui ne conserve pas le moment cinétique.
L'état initial de cette simulation est le résultat d'une simulation effectuée avec la nouvelle formulation qui conserve le moment cinétique; cet état correspond à un solstice d'hiver nord.
Les deux premiers graphiques représentent la fonction de courant de la circulation méridienne en $10^9 kgs^{-1}$ (premier graphique) et la moyenne longitudinale du vent zonal (deuxième graphique) pour l'état initial.
Les deux graphiques du bas représentent l'évolution du vent zonal au bout de 5 et 10 jours simulée avec l'ancienne formulation non conservative du moment cinétique et une faible résolution: *32 longitudes* $\times$ *24 latitudes* $\times$ *15 niveaux verticaux.*

sud (branche ascendante) aux latitudes moyennes de l'hémisphère d'hiver (subsidance). Le vent zonal dans les basses latitudes (second graphique de la Figure 3) est bien en accord avec les arguments simples de transport du moment cinétique par la circulation méridienne avec notamment un système d'alizés: on observe comme sur Terre la création d'un système de vent d'est dans l'hémisphère nord où les particules sont advectées vers l'équateur; du fait que la circulation de Hadley s'étend beaucoup plus loin que sur Terre dans l'hémisphère d'été, on observe de plus un fort vent d'ouest vers $20°S$.

A partir de cette état initial (obtenu avec une formulation qui conserve le moment cinétique) le modèle a été intégré pendant dix jours en utilisant la formulation non conservative. Les deux graphiques du bas de la Figure 3 montrent la détérioration du vent zonal au bout de 5 et 10 jours respectivement. On voit très clairement se créer des dérives positives locales du vent zonal dans les zones de convergence de la cellule de Hadley, en bas de la branche ascendante et en haut de la branche descendante. En absence de dissipation, ces erreurs croîtraient exponentiellement (un maximum local du vent ainsi créé renforçant le terme $\delta_y\left(\delta_y M\right)$ et donc le maximum lui-même).

Bien que moins nettement, on observe également dans les simulations terrestres (Figure 2) les maxima de défauts positifs du vent zonal dans les zones de convergence de la cellule de Hadley Nord.

4 Nouvelle formulation

4.1 Nouvelle formulation des équations du mouvement

L'analyse précédente dégage deux erreurs numériques indépendantes sur la conservation du moment cinétique, l'une liée à la définition du facteur de Coriolis et l'autre à la mauvaise représentation de l'advection méridienne de u. La première erreur est éliminée en utilisant pour f sa forme rotationnelle (équation 16). La seconde (plus fondamentale) peut être éliminée également en tirant partie du fait que la conservation numérique de l'enstrophie ne concerne que les termes d'advection horizontale. Il est en fait possible de transformer le terme d'advection verticale afin d'éliminer exactement les erreurs sur l'advection méridienne du moment cinétique présentées dans la section précédente. On peut pour ce faire utiliser les deux formulations suivantes:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} - \overline{Z}^{Y}\,\overline{V}^{X,Y} + \delta_x\left(\Phi + K\right) + s\overline{\theta}^{X}\delta_x {p_s}^{\kappa} - \frac{\overline{\tilde{u}}^{Y,Y}\delta_z\overline{W}^{X}}{\overline{\tilde{p}_s}^{X}\delta_z\sigma} + \frac{\delta_z\left(\overline{W}^{X}\overline{\tilde{u}}^{Z}\right)}{\overline{\tilde{p}_s}^{X}\delta_z\sigma} = S_{\tilde{u}} \quad (23)$$

ou

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} - \overline{Z}^{Y}\,\overline{V}^{X,Y} + \delta_x\left(\Phi + K\right) + s\overline{\theta}^{X}\delta_x {p_s}^{\kappa} - \frac{\overline{\tilde{u}_{abs}}^{Y,Y}\delta_z\overline{W}^{X}}{\overline{\tilde{p}_s}^{X}\delta_z\sigma} + \frac{\delta_z\left(\overline{W}^{X}\overline{\tilde{u}_{abs}}^{Z}\right)}{\overline{\tilde{p}_s}^{X}\delta_z\sigma} = S_{\tilde{u}} \quad (24)$$

oú $\tilde{u}_{abs}$ est la composante zonale covariante du vecteur vent absolu:

$$\tilde{u}_{abs} = \tilde{u} + c_u a \Omega \cos\phi = \left(\frac{d\lambda}{dX}\right) M \tag{25}$$

La deuxième formulation est plus proche d'une équation d'évolution du moment cinétique. On vérifie facilement que ces deux formulations conservent le moment cinétique dans le cas simple étudié précédemment d'un écoulement axi-symétrique avec $\tilde{p}_s = cte$; cette conservation est obtenue grâce à l'introduction du terme d'advection verticale de $\overline{\tilde{u}_{abs}}^{YY}$. En contre-partie, les nouvelles équations ne conservent plus l'énergie globale, mais celle-ci n'était conservée, dans la formulation originale, que pour des écoulements irrotationnels.

On utilise pour la deuxième composante de l'équation du mouvement une formulation équivalente:

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + \overline{Z}^X \overline{U}^{X,Y} + \delta_y (\Phi + K) + s\overline{\theta}^Y \delta_y {p_s}^\kappa - \frac{\overline{\tilde{v}}^{X,X} \delta_z \overline{W}^Y}{\overline{\tilde{p}_s}^Y \delta_z \sigma} + \frac{\delta_z \left(\overline{W}^Y \overline{\tilde{v}}^Z\right)}{\overline{\tilde{p}_s}^X \delta_z \sigma} = S_{\tilde{v}} \tag{26}$$

4.2 Conservation du moment cinétique dans le cas 3–D

En se plaçant toujours dans l'approximation $\tilde{p}_s = cte$, l'évolution du moment cinétique global s'obtient dans le cas 3-D en multipliant l'Equation 24 par

$$\tilde{p}_s \delta_z \sigma \frac{d\lambda}{dX} \tag{27}$$

Après élimination des termes de moyenne globale nulle on obtient:

$$\frac{\partial \left\langle \tilde{p}_s M \delta_z \sigma \right\rangle}{\partial t} = \frac{d\lambda}{dX} \left\langle \overline{\delta_x \tilde{v}}^Y \overline{V}^{X,Y} \delta_z \sigma \right\rangle + \left\langle -\overline{\delta_y M}^Y \overline{V}^{X,Y} \delta_z \sigma + \overline{M}^{Y,Y} \delta_z \overline{W}^X \right\rangle \tag{28}$$

Le premier terme dans le membre de droite n'est pas nul en général. Cependant, les erreurs numériques correspondantes proviennent uniquement de la géométrie sphérique. En géométrie plane en effet, ce terme deviendrait

$$\left\langle \overline{\delta_x v}^Y \overline{v}^{X,Y} \right\rangle = \left\langle \delta_x \overline{v}^Y \overline{\overline{v}^Y}^X \right\rangle \tag{29}$$

qui s'annule en utilisant l'identité remarquable $\overline{a}^x \delta_x a = \delta_x a^2/2$. Le deuxième terme à droite dans l'Equation 28 peut se transformer en utilisant successivement les propriétés de symétrie des opérateurs discrets et l'équation de continuité:

$$\begin{aligned}
\left\langle \overline{\delta_y M}^Y \overline{V}^{X,Y} \delta_z \sigma - \overline{M}^{Y,Y} \delta_z \overline{W}^X \right\rangle &= -\left\langle \overline{M}^{Y,Y} \overline{(\delta_y V \delta_z \sigma + \delta_z W)}^X \right\rangle && (30)\\
&= \left\langle \overline{M}^{Y,Y} \overline{\delta_x U}^X \delta_z \sigma \right\rangle && (31)\\
&= \frac{d\lambda}{dX} \left\langle \overline{\tilde{u}}^{Y,Y} \overline{\delta_x U}^X \delta_z \sigma \right\rangle && (32)
\end{aligned}$$

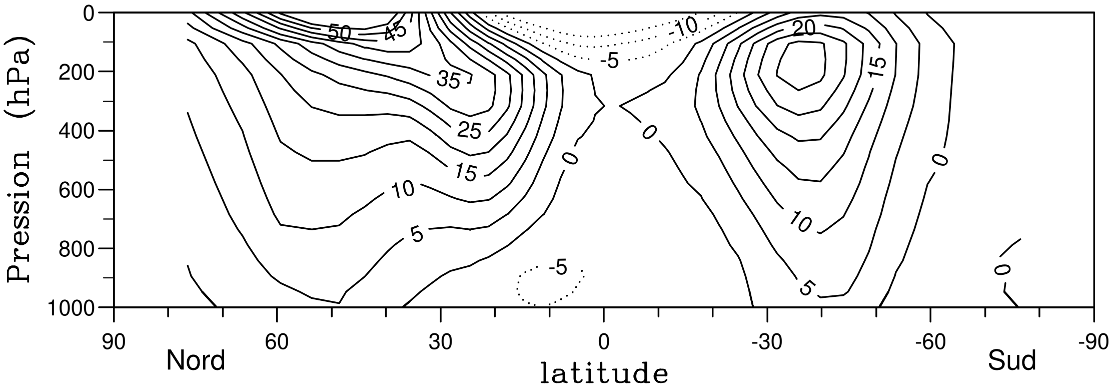

Figure 4 : Vent zonal (ms^{-1}) en Janvier obtenu avec la nouvelle formulation de la dynamique.
La simulation est identique à celle de la Figure 2 mis à part deux changements dans le modèle: changement du schéma de précipitation et de la formulation dynamique.

Une fois encore, les erreurs numériques mises en jeu ici sont liées uniquement à la géométrie sphérique.

En résumé, les équations conservent exactement le moment cinétique pour des écoulements à $\tilde{p}_s = cte$ dans le cas d'une circulation axi-symétrique. Pour les écoulements non axi-symétriques, l'erreur numérique provient exclusivement de la géométrie sphérique.

4.3 Tests numériques

Dans le MCG de l'atmosphère de Mars, on utilise la formulation 24. Les deux graphiques du haut de la Figure 3 montrent les résultats d'une simulation effectuée avec cette nouvelle formulation. La simulation a été poursuivie sur trois années martiennes (six années terrestres) sans détérioration du vent zonal.

Dans le modèle climatique terrestre, c'est la formulation 23 qui a été introduite par Phu Le Van. Pour l'instant, le terme de Coriolis est lui toujours calculé avec l'ancienne formulation.

La Figure 4 montre les résultats d'une simulation identique à celle présentée sur la Figure 2 à deux différences près:

1. le changement sur la dynamique présenté ici,

2. un changement sur le schéma de précipitation des nuages.

L'amélioration de la représentation du vent zonal est très nette et particulièrement marquée dans les basses latitudes. En revanche, le changement de formulation n'améliore pas la structure des jets en altitude.

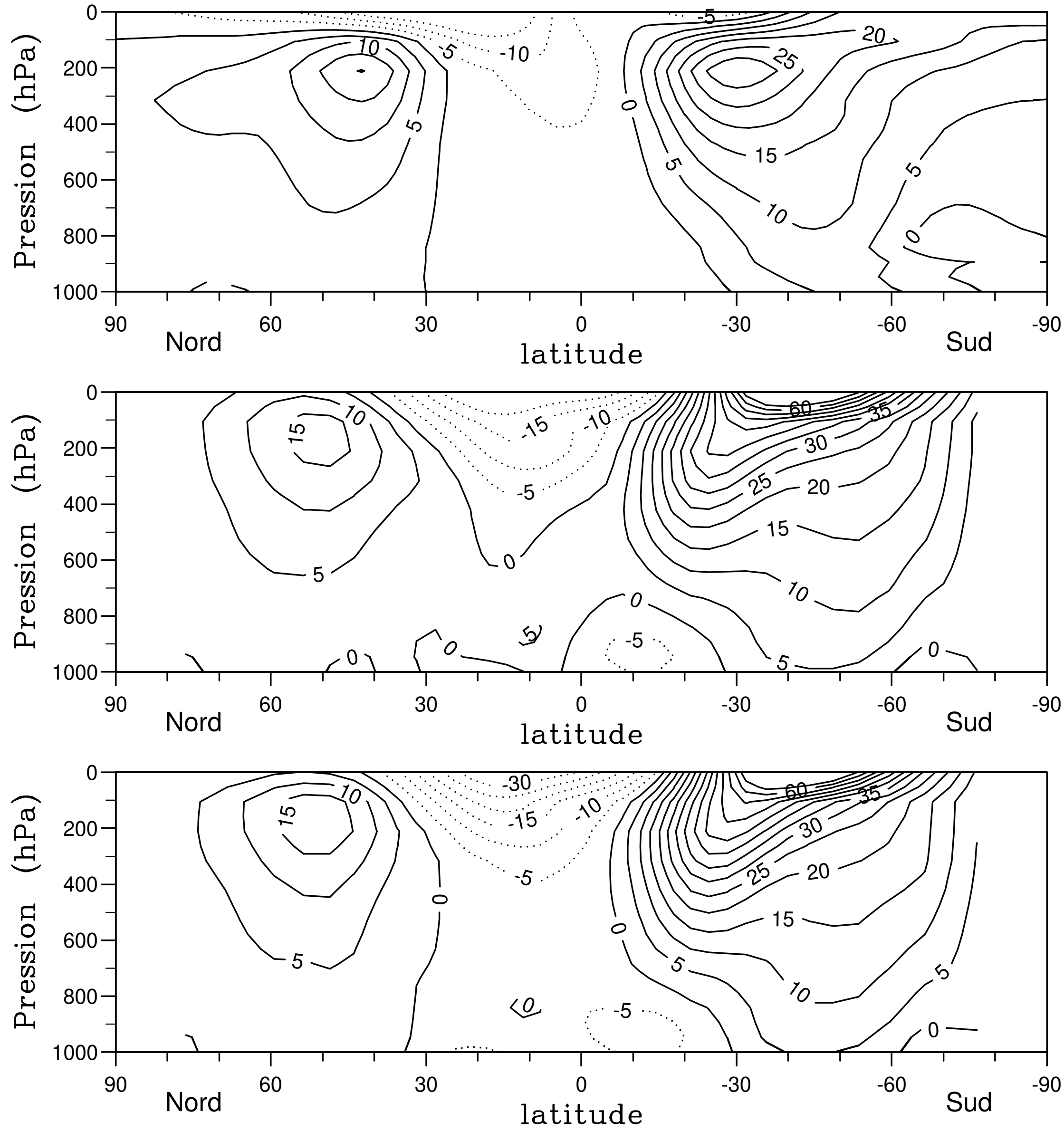

Figure 5 : Comparaison entre la climatologie et les deux simulations pour le mois de juillet (vent zonal en ms^{-1}).
La climatologie de Oort [6] en haut. Les résultats du modèle du LMD: ancienne formulation (au milieu) et nouvelle formulation (en bas).

La comparaison entre la climatologie et les deux simulations pour le mois de juillet (Figure 5) conduit aux mêmes conclusions. Il faut noter que ces différents résultats ont été produits avec une version ancienne de la physique du modèle climatique et une faible résolution. La structure du vent zonal est beaucoup mieux représentée dans la version *cycle*5 du modèle [7] utilisée actuellement pour les études climatiques. Cette version inclut les modifications sur la dynamique présentées ici et est couramment utilisée en résolution *64 longitudes* $\times$ *50 latitudes* $\times$ *11 niveaux verticaux.*

References

[1] Arakawa (A.) et Lamb (V. R.). – Computational design of the basic dynamical processes of the ucla general circulation model. *Methods in Computational Physics*, vol. 17, 1977, pp. 173–265.

[2] Cassé (V.). – *Elaboration d'un modèle couplé océan tropical–atmosphère globale.* – Thèse, Université Paris VI, 1989.

[3] Holton (J. R.). – *An introduction to dynamic meteorology.* – Academic Press, 1979, second édition, *Internal geophysics series*, volume 23.

[4] Kasahara (A.). – Computational aspects of numerical models for weather prediction and climate simulation. *In: Methods in computational physics*, éd. par Chang (J.), pp. 1–66. – Academic press, inc., 1977.

[5] Le Van (P.). – *Description de directives pour l'utilisation de la nouvelle dynamique du Modèle de Circulation Générale.* – Rapport technique n° 147, 24 rue Lhomond/75 231 Paris CEDEX 05, Laboratoire de Météorologie Dynamique du CNRS, Note interne 1989.

[6] Oort (A. H.). – *Global Atmospheric Circulations Statics, 1958-1973.* – NOAA, 1983, *NOAA profesional paper*, volume 14.

[7] Polcher (J.), Harzallah (A.), Bony (S.), Chalita (S. N.), Cohen-Solal (E.), Forichon (M.), Hourdin (F.), LeTreut (H.), Le Van (P.), Li (Z. X.) et Rogel (P.). – *Le cycle 5 du Modèle de Circulation Générale du LMD.* – Note interne n° 170, ENS/24 rue Lhomond/75 005 Paris, LMD / CNRS, 1991.

[8] Sadourny (R.). – Compressible model flows on the sphere. *J. Atmos. Sci.*, vol. 32, 1975, pp. 2103–2110.

[9] Sadourny (R.). – The dynamics of finite-difference models of the shallow-water equations. *J. Atmos. Sci.*, vol. 32, 1975, pp. 680–689.

[10] Sadourny (R.). – Conservation laws, quasi-two-dimensional turbulence and numerical modeling of large scale flows. *In: Dynamical meteorology and numerical weather prediction*, éd. par ECMWF. – Reading, 1980.

[11] Tourte (J.-L.). – *Modélisation numérique de la circulation de l'atmosphère de Vénus.* – Paris, Thèse de docteur -ingénieur, Université Pierre et Marie Curie, 1984.