Advection statistique de poches froides

3 janvier 2012

Le contexte de cette note est essentiellement constitué du commentaire de Jun-Ichi Yano portant sur le papier Wake-I et de la réponse que nous avons faite. Il s'agit plus particulièrement d'aborder la question de la représentation de l'advection des poches froides de maille en maille dans le cas où la densité de poches est suffisamment élevée pour qu'il y ait plusieurs poches par maille. Jun-Ichi a proposé des formules qui semblent raisonables, mais qui font intervenir des champs (à savoir la couverture surfacique locale et la vitesse locale des poches) absents du modèle initial. La dérivation des équations fournie par Jun-Ichi nous semble incorrecte (voir la réponse au commentaire). Le but de cette note est d'établir des formules analogues en utilisant l'image statistique du papier Wake-I.

Termes d'advection dans les équations de conservation de la masse

On part de l'équation (7w) du papier Wake-I :

$$\begin{aligned}\partial_t S_w = \; & -\int_{\Sigma_w} \partial_p(\omega_w)\, d\Sigma + \int_{\Gamma_{w,in}} (\vec{V} - \vec{V}_\Gamma).\vec{n}_w \, d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma'_w} \vec{V}.\vec{n}' \, d\Gamma\end{aligned} \tag{C.1}$$

Dans Wake-I, le dernier terme de cette équation est estimé en supposant une densité de poches uniforme et en faisant l'approximation grossière que le champ de vitesse est indépendant du champ de poches. Le but ici est de déterminer ce terme de façon plus stricte ($\vec{V}$ étant lié explicitement au champ de poches) et dans un cas un peu plus général (D étant non plus uniforme mais lentement variable). On va le désigner par A_w :

$$A_w \; = \int_{\Gamma'_w} \vec{V}.\vec{n}' \, d\Gamma$$

On conserve le cadre de l'appendice A de Wake-I : toutes les poches sont supposées circulaires et d'un même rayon r ; les positions de leurs centres sont des variables aléatoires $\vec{C}_i$ que nous supposons indépendantes (autrement dit, nous négligeons les effets liés à la contrainte de non-recouvrement des poches). Nous considérons un domaine (une maille) Σ ; les centres des poches susceptibles d'intersecter Σ parcourent un domaine plus grand que Σ ; d'une façon générale, nous considèrerons que les centres sont pris dans un domaine beaucoup plus grand que Σ et les intègrales sur ce grand domaine seront simplement écrites sans mention de leur domaine d'intégration. Pour une réalisation donnée $\{\vec{C}_i\}_{(i=1,N)}$ la fraction surfacique $\widehat{\sigma}$ de Σ couverte par les poches s'écrit :

$$\widehat{\sigma} \;=\; \frac{1}{S_t}\int_\Sigma d^2M \sum_i I(\frac{||\vec{M}-\vec{C}_i||}{r})$$

Enumération des diverses étapes du calcul

Valeur moyenne de $\widehat{\sigma}$:

$$\langle\widehat{\sigma}\rangle \;=\; \frac{1}{S_t}\int D_w(\vec{C})d^2C\int_\Sigma d^2M\, I(\frac{||\vec{M}-\vec{C}||}{r})$$

En permuttant les deux intégrales, on voit que $\langle\widehat{\sigma}\rangle$ peut s'écrire :

$$\begin{cases} \langle\widehat{\sigma}\rangle & = \dfrac{1}{S_t}\displaystyle\int_\Sigma \sigma_w(\vec{M})\; d^2M \\ \\ \sigma_w(\vec{M}) & = \displaystyle\int d^2C\; D_w(\vec{C}) I(\frac{||\vec{M}-\vec{C}||}{r}) \end{cases} \tag{C.2}$$

où on a fait apparaître le champ lentement variable $\sigma_w(\vec{M})$ (si D_w est uniforme, alors σ_w est uniforme).

Description du champ de vitesse. On va écrire le champ de vitesse dans chaque poche sous la forme de la somme d'un mouvement de translation d'ensemble (de vitesse égale à la vitesse $\vec{V}_w(\vec{C})$ du centre) et d'un champ de vitesses relatives identique pour toutes les poches :

$$||\vec{M} \;-\; \vec{C}_i|| \;<\; r \quad\Longrightarrow\quad \vec{V}(\vec{M}) \;=\; \vec{V}_w(\vec{C}_i) \;+\; \vec{V}'(\vec{M}-\vec{C}_i)$$

ce qui mène à une nouvelle écriture de l'intégrale de contour A_w :

$$A_w \;=\; \int_{\Gamma'} d\Gamma(\vec{M})\int d^2\vec{C}\; D_w(\vec{C})\; [\vec{V}_w(\vec{C}) \;+\; \vec{V}'(\vec{M}-\vec{C})]\cdot\vec{n}'\; I(\frac{||\vec{M}-\vec{C}||}{r}) \tag{C.3}$$

Hypothèses :

1. $\displaystyle\int d^2M\; \vec{V}'(\vec{M})\; I(\frac{||\vec{M}||}{r}) \;=\; 0$
2. D_w varie lentement, i.e. la variation totale de D_w est très petite devant D_w.

Dans ces conditions, on peut considérer que :

$$\int d^2C\; \vec{V}'(\vec{M}-\vec{C})\; I(\frac{||\vec{M}-\vec{C}||}{r})\; D_w(\vec{C}) \;=\; 0$$

Ecriture finale de l'intégrale de contour A_w. Avec les hypothèses précédentes, l'intégrale A_w s'écrit :

$$A_w \;=\; \int_{\Gamma'} d\Gamma(\vec{M}) \int d^2\vec{C}\; D_w(\vec{C})\; \vec{V}_w(\vec{C}) \cdot \vec{n}'\; I(\frac{||\vec{M}-\vec{C}||}{r})$$

On définit un nouveau champ de vitesse "moyenne" des centres de poche $\vec{\vec{V}}_w(\vec{M})$ par :

$$\vec{\vec{V}}_w(\vec{M}) \;=\; \frac{1}{\sigma_w(\vec{M})} \int d^2\vec{C}\; D_w(\vec{C})\; \vec{V}_w(\vec{C})\; I(\frac{||\vec{M}-\vec{C}||}{r}) \tag{C.4}$$

L'intégrale A_w s'écrit alors :

$$A_w \;=\; \int_{\Gamma'} d\Gamma(\vec{M})\; \vec{n}' \cdot [\vec{\vec{V}}_w(\vec{M})\sigma_w(\vec{M})] \tag{C.5}$$

ou encore :

$$A_w \;=\; -\int_{\Sigma} \vec{\nabla} \cdot [\vec{\vec{V}}_w(\vec{M})\sigma_w(\vec{M})] \tag{C.6}$$

On a donc bien réussi à écrire l'effet de l'advection des poches froides comme la divergence d'un flux ; le flux étant le produit d'une vitesse locale d'ensemble de chaque poche par la fraction surfacique locale des poches. Dans le cas où σ_w est uniforme et où $\vec{\vec{V}}_w \;=\; \vec{V}$ on retrouve les formules du papier Wake-I.