Alp conditionnée par la présence d'un front de rafales

JYG 21 janvier 2011

On se place dans un cas où la densité de poches devient suffisamment faible pour que $D_{\text{wk}}\ S_t\ <<\ 1$. Alors, on ne peut plus utiliser l'image statistique dans laquelle la puissance de soulèvement fournie à la maille par le grande nombre de poches présentes dans la maille est égale à la puissance de soulèvement moyenne fournie par le champ de poches. Pour estimer l'effet des poches sur la maille considérée, il faut prendre en compte une information supplémentaire disant si la maille contient un morceau de front de rafales.

La puissance de soulèvement $\widehat{P_{\text{lift}}^{\text{wk}}}$ fournie par les poches à la maille s'écrit (formule (26) du papier Wake-I) :

$$\widehat{P_{\text{lift}}^{\text{wk}}}\ = \frac{1}{S_t}\ \frac{1}{2}\rho\ C_*^3\ \widehat{L_\Gamma}\ h_w \tag{1}$$

où $\widehat{L_\Gamma}$ désigne la longueur de front de rafales présente dans la maille. Lorsque la statistique des poches est suffisantes (i.e. si $D_{\text{wk}}\ S_t\ >>\ 1$), on assimile cette puissance à sa valeur moyenne (que l'on obtient en substituant à $\widehat{L_\Gamma}$ sa valeur moyenne $L_\Gamma = 2\pi r\ D_{\text{wk}} S_t$) :

$$P_{\text{lift}}^{\text{wk}}\ = \rho\ C_*^3\ \pi\ r\ D_{\text{wk}}\ h_w = \rho\ C_*^3\ h_w \sqrt{\pi\ \sigma_w\ D_{\text{wk}}} \tag{2}$$

Lorsque le nombre de poches par maille est inférieur à l'unité, les équations des poches décrivent une situation dans laquelle certaines mailles sont internes aux poches, certaines sont extérieures aux poches et le restant est à cheval sur des fronts de rafales. Le couplage des poches avec la convection n'existe que dans les mailles contenant un morceau de front de rafales. C'est donc uniquement la situation où la maille concernée contient un front de rafales qui nous intéresse. On doit alors déterminer la puissance de soulèvement fournie par le champ de poches, conditionnée par la présence d'un front de rafales dans la maille.

Dans l'expression (1) de la puissance de soulèvement, les variables C_*, h_w ne dépendent que du champ de poches. La variable $\widehat{L_\Gamma}$ est la seule à dépendre aussi de la maille. La valeur moyenne $\widetilde{P_{\text{lift}}^{\text{wk}}}$ de $\widehat{P_{\text{lift}}^{\text{wk}}}$, conditionnée par la présence d'un front de rafales s'écrit donc :

$$\widetilde{P_{\text{lift}}^{\text{wk}}}\ = \frac{1}{S_t}\ \frac{1}{2}\rho\ C_*^3\ h_w \int d\widehat{L_\Gamma}\ \widehat{L_\Gamma}\ P(\widehat{L_\Gamma} \mid \text{inter}) \tag{3}$$

où $P(\widehat{L_\Gamma} \mid \text{inter})$ est la densité de probabilité de $\widehat{L_\Gamma}$ conditionnée par une intersection non nulle de la maille avec les fronts de rafales.

Pour exprimer cette probabilité conditionnelle, on part de la formule exprimant la valeur moyenne $\overline{P_{\text{lift}}^{\text{wk}}}$ de $\widehat{P_{\text{lift}}^{\text{wk}}}$ et de la propriété évidente :

$$\begin{aligned} \overline{P_{\text{lift}}^{\text{wk}}}\ &= \tfrac{1}{S_t}\ \tfrac{1}{2}\rho\ C_*^3\ h_w\ \int d\widehat{L_\Gamma}\ \widehat{L_\Gamma}\ P(\widehat{L_\Gamma}) \\ &= \tfrac{1}{S_t}\ \tfrac{1}{2}\rho\ C_*^3\ h_w\ \int d\widehat{L_\Gamma}\ \widehat{L_\Gamma}\ P(\widehat{L_\Gamma}\ \cap\ \text{inter}) \end{aligned} \tag{4}$$

et on utilise l'axiome de Bayes ($P(A \cap B) = P(A \mid B)\, P(B)$) pour écrire :

$$P(\widehat{L_\Gamma} \cap \text{inter}) = P(\widehat{L_\Gamma} \mid \text{inter})\, P(\text{inter}) \tag{5}$$

Il vient alors :

$$\overline{P_{\text{lift}}^{\text{wk}}} = \frac{1}{S_t} \frac{1}{2} \rho\, C_*^3\, h_w \int d\widehat{L_\Gamma}\, \widehat{L_\Gamma}\, P(\widehat{L_\Gamma} \mid \text{inter})\, P(\text{inter}) \tag{6}$$

Compte tenu de l'équation (3), il en résulte :

$$\overline{P_{\text{lift}}^{\text{wk}}} = \widetilde{P_{\text{lift}}^{\text{wk}}}\, P(\text{inter}) \tag{7}$$

Pour finir, il reste à exprimer la probabilité $P(\text{inter})$ qu'il y ait une intersection non nulle d'un front de rafales avec la maille considérée. En désignant par $\mathcal{A}(r)$ le domaine parcouru par les centres des poches de rayon r dont le pourtour intersecte la maille, la probabilité $P(\text{inter})$ est égale à la probabilité qu'il y ait au moins un centre de poche dans $\mathcal{A}(r)$. On sait que, pour une densité uniforme D_{wk} de centres, le nombre de centres présents dans $\mathcal{A}(r)$ est une variable aléatoire obéissant à une loi de Poisson de valeur moyenne $D_{\text{wk}}\, S_A(r)$ (où $S_A(r)$ est l'aire de $\mathcal{A}(r)$) :

$$P(n) = exp(-D_{\text{wk}}\, S_A)\, \frac{(D_{\text{wk}}\, S_A)^n}{n!}$$

La probabilité $P(0)$ qu'il y ait 0 centre dans $\mathcal{A}(r)$ est alors : $P(0) = exp(-D_{\text{wk}}\, S_A)$. La probabilité qu'il y ait au moins un centre dans $\mathcal{A}(r)$ est $1 - P(0)$, d'où :

$$P(\text{inter}) = 1 - exp(-D_{\text{wk}}\, S_A)$$

Et, finalement :

$$\widetilde{P_{\text{lift}}^{\text{wk}}} = \frac{\overline{P_{\text{lift}}^{\text{wk}}}}{1 - exp(-D_{\text{wk}}\, S_A)} \tag{8}$$

Calcul de S_A

Dans les papiers Wake-I et II, on a évité de calculer S_A et on a utilisé des approximations grossières. Ici, au contraire, on va calculer exactement S_A mais dans le cas d'une maille circulaire. On fera l'approximation, dans le GCM, que S_A est approximativement égale à l'aire que l'on obtiendrait pour une maille circulaire de même surface S_t que la maille considérée, c'est à dire de rayon $a = \sqrt{S_t/\pi}$.

Lorsque le rayon r des poches est plus petit que le rayon a de la maille, le domaine $\mathcal{A}(r)$ est une disque de rayon $a+r$. En revanche, lorsque $r > a$, le domaine $\mathcal{A}(r)$ est une couronne, de rayon intérieur $r - a$ et de rayon extérieur $r + a$. Soit :

- $r < a$: $S_A = \pi(a + r)^2$
- $r > a$: $S_A = \pi[(r + a)^2 - (r - a)^2] = 4\pi\, a\, r$

On se convaincra facilement que tout cela peut se réunir dans :

$$S_A = \pi\, [a + inf(a, r)]\, [r + sup(a, r)]$$