

L'idée générale de cette note est de décrire les propriétés et l'évolution d'un champ de poches tel que celui apparaissant dans les simulations présentées par Marat Khairoutdinov au congrès CFMip-GCSS de Toulouse 2008. Le film le plus parlant présenté par Marat Khairoutdinov montrait le champ d'humidité à 2m dans une simulation d'une journée de l'expérience GATE. On y voyait des apparitions de colonnes convectives, accompagnées chacune d'un courant de densité circulaire, s'étalant à partir de chaque colonne. Lorsque deux poches froides entraient en collision, une nouvelle colonne convective apparaissait en leur point de contact et une nouvelle poche froide naissait, s'étalant par dessus les deux autres, lesquelles s'estompaient peu à peu. Au bout d'un moment, on ne voyait plus qu'un grouillement de poches s'écrasant mutuellement et donnant naissance à de nouvelles poches lors de chaque rencontre.

Il s'agit ici de construire un modèle simplifié de ce comportement d'une population de poches froides. On ne va considérer que les poches (et omettre totalement les colonnes convectives), supposer qu'elles s'étalent avec une vitesse uniforme constante et que chaque collision tue les deux poches concernées et en crée une nouvelle. Évidemment, si le nombre de poches diminue d'une unité à chaque collision, la population de poches va rapidement s'évanouir. Il faut donc supposer un taux de création de poches indépendant des collisions : ce rôle, qui serait joué par les colonnes convectives dans un modèle plus complet, va ici être représenté par un taux de créations de poches proportionnel à la longueur totale des fronts de rafales ; on représente grossièrement ainsi le fait que ce sont les colonnes convectives qui créent les poches, que ces colonnes sont induites par la Alp due aux poches et que cette Alp est proportionnelle à la longueur des fronts de rafales.

Le modèle

On considère une population de poches dont la répartition en fonction du rayon r est décrite par une densité spectrale $n(r)$ d'intégrale D , où D désigne la densité de poches (le nombre de centres de poches par unité de surface). La dynamique de population est définie par :

- Les poches naissent avec un rayon r_0 .
- Les rayons des poches croissent uniformément avec la vitesse C_* .
- Lorsque deux poches se touchent (entrent en collision), les deux poches disparaissent et une nouvelle poche, centrée en leur point de contact, naît (avec le rayon r_0).
- Il y a en outre un taux de naissance des poches proportionnel à la longueur des fronts de rafales : il naît α poches par unité de temps et par unité de longueur de front de rafales.

Noter que la densité D est de dimension L^{-2} , la densité spectrale n de dimension L^{-3} et le taux α de dimension $L^{-1}T^{-1}$.

Equations d'évolution

Nous allons travailler dans un premier temps avec la fonction de répartition $N(r)$ plutôt qu'avec la densité $n(r)$:

$$N(r) = \int_{r_0}^r n(r') dr'$$

et on a : $N \longrightarrow D$ lorsque $r \longrightarrow \infty$.

Pour écrire l'équation d'évolution, on écrit que, pendant un intervalle de temps δt , la population $N(r)$ de poches de rayon inférieur à r varie de $\delta N(r)$ sous l'action de trois processus :

- Toutes les poches ayant un rayon compris entre $r - C_* \delta t$ et r quittent cette population ;
- Les naissances de poche font croître le nombre de poches de $\alpha L_G \delta t$, où L_G désigne la longueur totale de front de rafales par unité de surface (L_G est de dimension L^{-1}) ;
- L'ensemble des collisions fait varier cette population de $\Gamma_{tot}(r) \delta t$

Soit :

$$\delta N(r) = -[N(r) - N(r - C_* \delta t)] + \alpha L_G \delta t + \Gamma_{tot}(r) \delta t$$

L'effet des collisions peut se décomposer en plusieurs contributions :

- chaque collision entre poches de rayons inférieurs à r induit une diminution d'une unité de $N(r)$.
- chaque collision entre poches de rayons supérieurs à r induit une augmentation d'une unité de $N(r)$.
- les collisions entre poches de rayon inférieur à r et poches de rayon supérieur à r n'ont aucun effet sur $N(r)$.

On voit que si on détermine le taux de collisions $\Gamma(a, b)$ entre poches de rayons compris entre a et b , alors l'équation d'évolution va s'écrire :

$$\partial_t N(r) = -C_* \partial_r N(r) + \alpha L_G + \Gamma(r, \infty) - \Gamma(r_0, r)$$

Détermination du taux de collision $\Gamma(a, b)$

Pour déterminer $\Gamma(a, b)$, on calcule d'abord le nombre de collisions $\Gamma_1(r, a, b)$ pour une poche de rayon r , puis on somme sur toutes les poches, puis on divise par deux, chaque collision ayant été comptée deux fois :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma(a, b) \delta t = \frac{1}{2} \int_a^b dr n(r) \Gamma_1(r, a, b) \delta t \\ \Gamma_1(r, a, b) \delta t = \text{Nb de collisions entre une poche donnée de rayon } r \\ \text{et les poches de rayons compris entre } a \text{ et } b, \text{ pendant } \delta t \\ = \int_a^b dr' \{ \text{Nb de poches de rayon } r' \text{ dont les centres} \\ \text{sont dans la couronne } [r + r', r + r' + 2C_* \delta t] \} \\ = \int_a^b dr' 2\pi (r + r') 2C_* \delta t n(r') \end{array} \right. \quad (1)$$

Il vient :

$$\begin{aligned}
\Gamma(a, b) &= \frac{1}{2} \int_a^b dr \int_a^b dr' 4\pi (r + r') C_* n(r) n(r') \\
&= \frac{1}{2} \int_a^b dr \int_a^b dr' 4\pi r C_* n(r) n(r') \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_a^b dr \int_a^b dr' 4\pi r' C_* n(r) n(r')
\end{aligned} \tag{2}$$

Les deux termes du deuxième membre sont égaux (on passe de l'un à l'autre en permutant les deux variables d'intégration r et r'). $\Gamma(a, b)$ s'écrit donc :

$$\Gamma(a, b) = \int_a^b dr \int_a^b dr' 4\pi r C_* n(r) n(r')$$

L'intégrale sur r' est égale à $N(b) - N(a)$. On obtient donc :

$$\Gamma(a, b) = 4\pi C_* [N(b) - N(a)] \int_a^b dr r n(r)$$

Introduisons maintenant le rayon moyen $R(r)$ des poches de rayon inférieur à r :

$$\begin{cases} R(r) &= \frac{1}{N(r)} \int_{r_0}^r dr' r' n(r') \quad ; \text{pour } r > r_0 \\ R(r_0) &= r_0 \end{cases} \tag{3}$$

Le taux de collision $\Gamma(a, b)$ s'écrit alors :

$$\Gamma(a, b) = 4\pi C_* [N(b) - N(a)] [R(b)N(b) - R(a)N(a)] \tag{4}$$

Détermination de la longueur de front de rafales par unité de surface L_G

La longueur de front de rafales pour une poche est $2\pi r$. La longueur totale de front de rafales par unité de surface est donc :

$$L_G = \int_{r_0}^{\infty} 2\pi r n(r) dr$$

que l'on peut exprimer à l'aide du rayon moyen R_∞ :

$$L_G = 2\pi D R_\infty$$

Equation d'évolution de $N(r)$

Compte tenu des valeurs de $N(r)$ aux extrémités ($N(r_0) = 0$ et ($N(\infty) = D$), le taux de collision Γ_{tot} s'écrit :

$$\Gamma_{tot}(r) = 4\pi C_* D [D R_\infty - N(r)(R(r) + R_\infty)] \tag{5}$$

L'équation d'évolution s'écrit alors :

$$\partial_t N(r) = -C_* \partial_r N(r) + 2\pi\alpha D R_\infty + 4\pi C_* D [D R_\infty - N(r)(R(r) + R_\infty)] \tag{6}$$

Soit :

$$\partial_t N(r) = -C_* \partial_r N(r) + 2\pi D R_\infty [\alpha + 2 C_* (D - N(r))] - 4\pi C_* D N(r) R(r) \quad (7)$$

Equation d'évolution de la densité D

A l'infini, l'équation (7) donne l'équation d'évolution de la densité D :

$$\partial_t D = 2\pi D R_\infty [\alpha - 2 C_* D] \quad (8)$$

Cette équation particulièrement simple se comprend mieux si l'on y fait apparaître L_G :

$$\partial_t D = \alpha L_G - 2 C_* D L_G$$

en effet, le premier terme est le taux de création de poches proportionnellement à la longueur de front de rafales, et le second est le puit lié à la disparition d'une poche à chaque collision ($2 C_* L_G \delta t$ est l'aire de la bande d'épaisseur $2 C_* \delta t$ où se trouvent les centres de poches qui vont subir une collision pendant l'intervalle δt ; et $2 C_* D L_G \delta t$ est le nombre de centres de poches situés dans cette bande).

On trouve donc que la densité est rappelée en permanence vers $\alpha/[2 C_*]$, avec un temps de relaxation $\tau = 1/[2 L_G C_*]$, c'est-à-dire, si la densité D est proche de $\alpha/[2 C_*]$, $\tau = 1/[2\pi \alpha R_\infty]$.

Nous passons maintenant au régime permanent, pour lequel on a :

$$D = \frac{\alpha}{2 C_*}$$

Équations en régime stationnaire

On part de l'équation (7) où l'on suppose $\partial_t N = 0$ et $\alpha = 2 C_* D$:

$$C_* \partial_r N(r) = 4\pi D [2 C_* D R_\infty - C_* N(r)(R(r) + R_\infty)] \quad (9)$$

En dérivant cette équation par rapport à r , on obtient une équation pour la densité $n(r)$:

$$C_* \partial_r n(r) = -4\pi D C_* n(r)[r + R_\infty] \quad (10)$$

(où on a utilisé la relation évidente $\partial_r(N(r)R(r)) = n(r)r$), à laquelle on doit associer la condition initiale obtenue en prenant $r = r_0$ dans l'équation (9) :

$$n(r_0) = 8\pi D^2 R_\infty \quad (11)$$

On vérifie facilement que ces équations admettent une solution unique :

$$n(r) = 8\pi D^2 R_\infty \exp[2\pi D(r_0 + R_\infty)^2] \exp[-2\pi D(r + R_\infty)^2] \quad (12)$$

La distribution des rayons apparaît comme une queue de gaussienne, le sommet de la gaussienne étant en $-R_\infty$.

Pour clore les formules, il reste à déterminer le rayon moyen R_∞ . Pour cela il suffit d'écrire que $D = \int_{r_0}^{\infty} n(r)dr$. On obtient ainsi une équation où la seule inconnue est le rayon moyen R_∞ :

$$1 = 8\pi D R_\infty \exp[2\pi D(r_0 + R_\infty)^2] \int_{r_0}^{\infty} \exp[-2\pi D(r + R_\infty)^2] dr \quad (13)$$

En posant $r' = r \sqrt{D}$, $R'_\infty = R_\infty \sqrt{D}$ et $r'_0 = r_0 \sqrt{D}$, on obtient une équation en R'_∞ dépendant uniquement de r'_0 :

$$1 = 8\pi R'_\infty \exp[2\pi (r'_0 + R'_\infty)^2] \int_{r'_0}^{\infty} \exp[-2\pi (r' + R'_\infty)^2] dr' \quad (14)$$

La solution va être une fonction $R'_\infty = f(r'_0)$, ce qui donnera $R_\infty = f(r_0 \sqrt{D})/\sqrt{D}$.

Détermination de R'_∞

On va utiliser la fonction Erfc définie par :

$$\text{Erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-u^2} du$$

Pour cela, on pose :

$$u' = \sqrt{2\pi}(r' + R'_\infty) \quad \text{et} \quad u'_0 = \sqrt{2\pi}(r'_0 + R'_\infty)$$

L'équation 14 s'écrit alors :

$$1 = 2\sqrt{2\pi} R'_\infty e^{u'^2_0} \text{Erfc}(u'_0) \quad (15)$$

ce qui définit une relation $R'_\infty = g(u'_0)$

Le graphe de g est tracée sur la figure 1, ainsi que les droites $r'_0 = 0$ (équation : $u'_0 = \sqrt{2\pi} R'_\infty$) et $r'_0 = 0.1$ (équation : $u'_0 = \sqrt{2\pi}(0.1 + R'_\infty)$). On voit que, pour $r'_0 = 0$, $R'_\infty \simeq 0.17$ et, pour $r'_0 = 0.1$, $R'_\infty \simeq 0.23$.

Le graphe de g étant à peu près une droite, on va faire l'approximation :

$$R'_\infty = a_R + b_R u'_0 \quad \text{avec} \quad a_R \simeq 0.11 \quad \text{et} \quad b_R \simeq 0.16$$

On en tire l'expression de R'_∞ en fonction de r'_0 :

$$R'_\infty = \frac{a_R + \sqrt{2\pi} b_R r'_0}{1 - \sqrt{2\pi} b_R} \quad (16)$$

Détermination de R_∞

L'expression de R_∞ en fonction de r_0 s'écrit alors :

$$R_\infty = \frac{\frac{a_R}{\sqrt{D}} + \sqrt{2\pi} b_R r_0}{1 - \sqrt{2\pi} b_R} \quad (17)$$

soit, approximativement :

$$R_\infty \simeq \frac{0.18}{\sqrt{D}} + 0.7 r_0$$

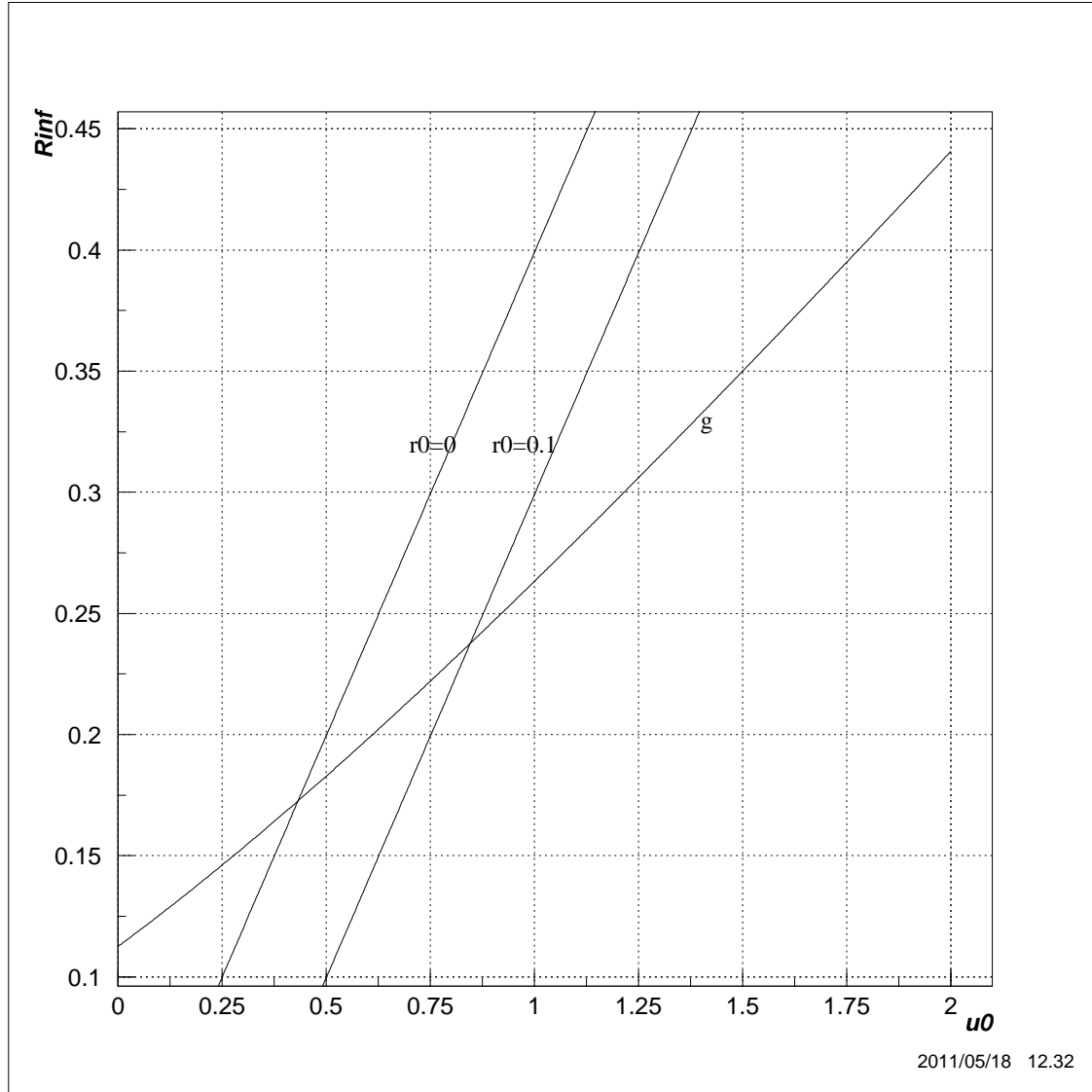


FIG. 1 – Graphe de la fonction $g(u) = 1/(2\sqrt{2}\pi e^u \text{Erfc}(u))$.

Si, par exemple, $1/\sqrt{D} = 10 \ r_0$ (l'espacement moyen entre les poches est $10 \ r_0$), alors $R_\infty \simeq 2.5 \ r_0$.

Détermination de la fraction surfacique moyenne σ_w

La surface de chaque poche étant πr^2 , la fraction surfacique des poches s'écrit :

$$\sigma_w = \int_{r_0}^{\infty} \pi r^2 n(r) dr$$

L'intégrale peut être réécrite à l'aide des variable R'_∞ et u' ; on obtient :

$$\sigma_w = 8\pi^2 R'_\infty e^{u_0'^2} \int_{r_0'}^{\infty} \left(\frac{u'}{\sqrt{2\pi}} - R'_\infty \right)^2 e^{-u'^2} \frac{du'}{\sqrt{2\pi}}$$

Après développement, il vient :

$$\sigma_w = 2\pi R'_\infty e^{u_0'^2} [\text{Erfc}(u_0') \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{2\pi}{\sqrt{2}} R_\infty'^2 \right) - (R'_\infty - r_0') e^{-u_0'^2}]$$

En utilisant l'équation (15), on peut éliminer u_0' . On obtient :

$$\sigma_w = \frac{1}{4} [1 - 4\pi R'_\infty (R'_\infty - 2r_0')] \quad (18)$$

Si on substitue dans cette équation l'expression (16) de R'_∞ , on obtient une dépendance quadratique de σ_w sur r_0' (graphe dans la Fig. 2). On constate que pour des valeurs raisonnables de r_0' (i.e. en-dessous de 0.2, la fraction surfacique couverte par les poches reste inférieure à 30%.

Mise en oeuvre

L'idée serait de ne traiter que la densité D comme variable d'état (obéissant à l'Eq. (8)), les autres variables étant données par des équations diagnostiques (R'_∞ donné par l'Eq. (16), σ_w par (18)).

Il faut alors se donner deux paramètres : (1) le taux de création de poches α ou, de façon équivalente, la densité en régime permanent $D_{eq} = \alpha/(2C_*)$; (2) le rayon initial r_0 ou le rapport r_0' du rayon initial à l'espacement.

Lorsque la convection apparaît, si on garde l'image de la simulation de Marat Khairoutdinov, la valeur initiale de la densité D va être faible, par exemple $D_{eq}/10$; ensuite la densité va croître jusqu'à D_{eq} avec un temps caractéristique $\tau = 1/[2\pi \alpha R_\infty]$. En prenant $D_{eq} = 10^{-9}$ (ce qui donne un espacement de 30 km) et $r_0' = 0.1$ (ce qui donne $r_0 = 3$ km), on trouve $RRi = 7.5$ km et $\alpha = 2 \cdot 10^{-8}$, ce qui donne $\tau = 1000$ s.

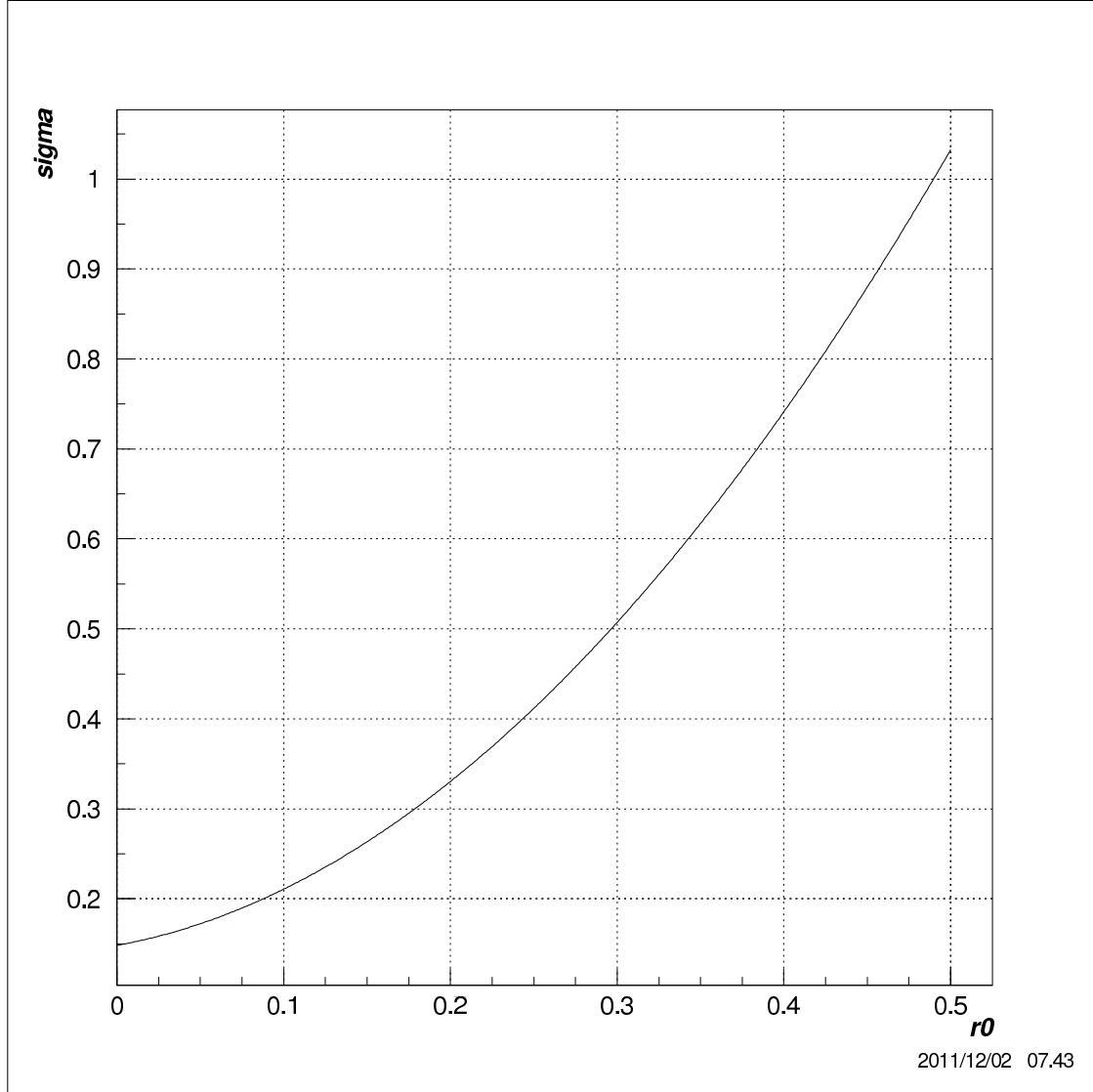


FIG. 2 – Graphe de la fonction $\sigma_w = \frac{1}{4}[1 - 4\pi R'_\infty(R'_\infty - 2r'_0)]$.