Paramétrisation de la dynamique de population de poches : formulation cinétique en aires

JYG 28 mars 2023

Première tentative d'écriture d'un modèle de dynamique de population de poches froides dans une formulation cinétique où la variable d'état des poches est l'aire (notée s) et non le rayon.

1 Modèle cinétique décrivant l'évolution de populations de poches actives et inactives

1.1 Principes

L'objet d'étude est une population de poches froides, caractérisées chacunes par son aire s.

variables

- grandeur d'intérêt : $f(s,t)$ = densité spatiale de poches ayant une aire s à ds près. f est un nombre de poches par m^2 d'espace et par m^2 d'aire.
- Les poches naissent avec une aire s_0 ; comme elles ne peuvent que grandir, il s'agit de leure aire minimum. Il n'y a pas de limite supérieure à leur taille.
- La densité totale de poches est donnée par :

$$D(t) = \int_{s_0}^{\infty} f(s,t)ds$$

- Les poches actives et inactives ont des densités $f_A(s,t)$ et $f_I(s,t)$ avec :

$$A(t) = \int_{s_0}^{\infty} f_A(s,t)ds \qquad I(t) = \int_{s_0}^{\infty} f_I(s,t)ds$$

Equations générales

Équations de bilan d'un domaine $\Omega_S = [s_1, s_2]$, avec $s_1 \neq s_0$. Il s'agit là d'établir les équations valables dans l'intérieur de $]s_0,\ +\infty[$, à l'exclusion de la frontière. Le cas où Ω_S touche la frontière du domaine relève de la question des conditions à la limite.

$$\begin{aligned} N_A(t) &= \textstyle\int_{s_1}^{s_2} f_A(s,t)ds \\ N_I(t) &= \textstyle\int_{s_1}^{s_2} f_I(s,t)ds \end{aligned} \qquad (1)$$

Pour chacune des populations A et I, on écrit :

$$\begin{aligned}
\frac{dN}{dt} &= [\text{disparition}] + & [\text{apparition}] + & \quad [\text{flux aux frontieres}] \\
\frac{dN_A}{dt} &= (\tfrac{dN_A}{dt})_1 + & (\tfrac{dN_A}{dt})_2 + & \quad (\tfrac{dN_A}{dt})_3 \\
\frac{dN_I}{dt} &= (\tfrac{dN_I}{dt})_1 + & (\tfrac{dN_I}{dt})_2 + & \quad (\tfrac{dN_I}{dt})_3
\end{aligned} \tag{2}$$

– Disparitions, supposées linéaires en f_A et f_I :

$$\begin{aligned}
(\frac{dN_A(t)}{dt})_1 &= \int_{s_1}^{s_2} -\frac{1}{\tau_A(s,t)} f_A(s,t)ds \\
(\frac{dN_I(t)}{dt})_1 &= \int_{s_1}^{s_2} -\frac{1}{\tau_I(s,t)} f_I(s,t)ds
\end{aligned} \tag{3}$$

Pour un intervalle de temps δt, $\frac{\delta t}{\tau_A(s,t)}$ peut s'interpréter comme la probabilité, pour une poche active d'aire s, de disparaître pendant cet intervalle de temps. Les équations (3) peuvent alors se lire comme :

[nbre de disparitions pendant δt]

$= \int_{[s_1,s_2]} ds$ [probabilité individuelle de disparition] $\times$ [nbre de poches dans [s, s+ds]] .

– Apparitions, représentées par des termes sources représentant l'effet des rencontres entre poches :

$$\begin{aligned}
(\frac{dN_A(t)}{dt})_2 &= \int_{s_1}^{s_2} S_A(s,t)ds \\
(\frac{dN_I(t)}{dt})_2 &= \int_{s_1}^{s_2} S_I(s,t)ds
\end{aligned} \tag{4}$$

– Flux aux frontières, liés au taux de croissances des poches :

$$\begin{aligned}
(\frac{dN_A(t)}{dt})_3 &= f_A(s_1,t)v_A(s_1,t) \; - \; f_A(s_2,t)v_A(s_2,t) \\
(\frac{dN_I(t)}{dt})_3 &= f_I(s_1,t)v_I(s_1,t) \; - \; f_I(s_2,t)v_I(s_2,t)
\end{aligned} \tag{5}$$

où $v_A(s,t)$ et $v_I(s,t)$ sont les vitesse d'accroissement des aires s des poches actives et inactives à l'instant t. On peut remplacer les differences des seconds membres par des intégrales des dérivées :

$$\begin{aligned}
(\frac{dN_A(t)}{dt})_3 &= \int_{s_1}^{s_2} -\partial_s(f_A(s,t)v_A(s,t))ds \\
(\frac{dN_I(t)}{dt})_3 &= \int_{s_1}^{s_2} -\partial_s(f_I(s,t)v_I(s,t))ds
\end{aligned} \tag{6}$$

où ∂_s désigne la dérivation partielle par rapport à s.

Noter que les vitesses $v_A(s,t)$ et $v_I(s,t)$ sont reliées aux vitesse d'étalement $c_A(s,t)$ et $c_I(s,t)$ par :

$$v_A(s,t) \ = \ 2\sqrt{\pi s}\, c_A(s,t) \qquad v_I(s,t) \ = \ 2\sqrt{\pi s}\, c_I(s,t)$$

Au total, on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_{s_1}^{s_2} \partial_t(f_A(s,t))ds \ + \ \int_{s_1}^{s_2} \partial_s(f_A(s,t)v_A(s,t))ds \ &= \ \int_{s_1}^{s_2} -\frac{1}{\tau_A(s,t)} f_A(s,t)ds \ + \ \int_{s_1}^{s_2} S_A(s,t)ds \\
\int_{s_1}^{s_2} \partial_t(f_I(s,t))ds \ + \ \int_{s_1}^{s_2} \partial_s(f_I(s,t)v_I(s,t))ds \ &= \ \int_{s_1}^{s_2} -\frac{1}{\tau_I(s,t)} f_I(s,t)ds \ + \ \int_{s_1}^{s_2} S_I(s,t)ds
\end{aligned} \tag{7}$$

et comme ceci est vrai quels que soient s_1 et s_2, les équations d'évolution sur $]s_0, \ +\infty[$ s'écrivent :

$$\begin{aligned}
\partial_t(f_A(s,t)) \ + \ \partial_s(f_A(s,t)v_A(s,t)) \ &= \ -\frac{1}{\tau_A(s,t)} f_A(s,t) \ + \ S_A(s,t) \\
\partial_t(f_I(s,t)) \ + \ \partial_s(f_I(s,t)v_I(s,t)) \ &= \ -\frac{1}{\tau_I(s,t)} f_I(s,t) \ + \ S_I(s,t)
\end{aligned} \tag{8}$$

1.2 Modèles couplés d'évolution des populations de poches actives et inactives

Disparitions

Les poches disparaissent par deux processus : les rencontres avec d'autres poches et la mort spontanée. La mort des poches libres est représentée par les durées de vie τ'_A et τ'_I.

Pour une poche active donnée d'aire s_1 (et donc de rayon $\sqrt{s_1/\pi}$), la probabilité de disparition pendant un intervalle de temps δt est égale au nombre de poches qui vont toucher le disque de la poche considérée pendant δt. Les poches actives d'aire s_2 qui vont rencontrer la poches d'aire s_1 sont celles dont le centre est dans la couronne de rayon $\sqrt{s_1/\pi} + \sqrt{s_2/\pi}$ et d'épaisseur $(c_A(s_1,t) + c_A(s_2,t))\delta t$. L'aire δa_1 de cette couronne est :

$$\delta a_1(s_2) \ = \ 2\pi(\sqrt{s_1/\pi} + \sqrt{s_2/\pi})\ (c_A(s_1,t) + c_A(s_2,t))\delta t$$

Comme $\delta a_1(s_2)$ ne dépend que de s_2, le nombre de rencontres de la poche d'aire s_1 avec des poches actives pendant δt (et donc, pour δt suffisamment petit, la probabilité de rencontre) s'écrit :

$$\delta n_1 \ = \ \int_{[s_0,\infty[} ds_2\, \delta a_1(s_2) f_A(s_2,t)$$

Le taux de disparition des poches actives par rencontre avec des poches actives s'écrit $\int_{[s_0,\infty[} ds_2 f_A(s_2,t)(2\pi(\sqrt{s_1/\pi} + \sqrt{s_2/\pi})\ (c_A(s_1,t) + c_A(s_2,t)))$. Finalement, en faisant le même raisonnement pour les rencontres AI et II, on arrive aux taux de disparition des poches actives et inactives :

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{\tau_A(s,t)} &= -\int_{s_0}^{+\infty} \frac{1}{\tilde{\tau}(s,s_2)} f_A(s_2,t) ds_2 - \int_{s_0}^{+\infty} \frac{1}{\tilde{\tau}(s,s_2)} f_I(s_2,t) ds_2 - \frac{1}{\tau'_A(s,t)} \\
-\frac{1}{\tau_I(s,t)} &= -\int_{s_0}^{+\infty} \frac{1}{\tilde{\tau}(s,s_2)} f_A(s_2,t) ds_2 - \int_{s_0}^{+\infty} \frac{1}{\tilde{\tau}(s,s_2)} f_I(s_2,t) ds_2 - \frac{1}{\tau'_I(s,t)}
\end{aligned} \tag{9}
$$

Soit :

$$
\frac{1}{\tilde{\tau}(s_1,s_2)} = \frac{1}{\tilde{\tau}_{AI}}(s_1,s_2) = \frac{1}{\tilde{\tau}_{IA}}(s_1,s_2) = \frac{1}{\tilde{\tau}_{AA}}(s_1,s_2) = \frac{1}{\tilde{\tau}_{II}}(s_1,s_2) \tag{10}
$$

Si on fait l'hypothèse diluée et si on suppose que les vitesses d'étalement sont uniquement fonction de l'aire ($c_A(s,t) = c_I(s,t) = G(s)$), alors $\tilde{\tau}$ est donné par :

$$
\frac{1}{\tilde{\tau}(s_1,s_2)} = 2(\sqrt{\pi s_1} + \sqrt{\pi s_2})(G(s_1) + G(s_2)) \tag{11}
$$

En particulier, pour une vitesse d'étalement uniforme (et égale à C_*) $G(s)$ s'écrit :

$$
G(s) = C_*
$$

Les équations (9) s'écrivent maintenant :

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{\tau_A(s,t)} &= -\int_{s_0}^{+\infty} \frac{1}{\tilde{\tau}(s,s_2)} (f_A(s_2,t) + f_I(s_2,t)) ds_2 - \frac{1}{\tau'_A(s,t)} \\
-\frac{1}{\tau_I(s,t)} &= -\int_{s_0}^{+\infty} \frac{1}{\tilde{\tau}(s,s_2)} (f_A(s_2,t) + f_I(s_2,t)) ds_2 - \frac{1}{\tau'_I(s,t)}
\end{aligned} \tag{12}
$$

Sources

Les poches actives ont pour source les rencontres entre poches et les naissances de poches (liées aux naissances de cumulonimbus et aux collisions entre poches inactives). Les naissances se font toutes avec une aire s_0 ; elles interviennent dans la condition à la limite en s_0. Dans cette partie on ne considère que les sources internes au domaine, c'est-à-dire celles liées aux rencontres entre poches.

Source de poches actives. On a une fréquence de rencontre qui donne évidemment autant de disparitions que de poches entrant dans les rencontres. Et il y a autant d'apparitions que de rencontres (ne pas oublier que ces apparitions sont toutes des poches actives). Ces apparitions se répartissent dans un spectre d'aires de poches. On désigne par $W(s|s_1,s_2)$ la densité de probabilité de l'aire s de la poche résultant de la rencontre entre deux poches d'aires s_1 et s_2, cette densité étant normalisée à 1 :

$$
\int_{[s_0,\infty[} ds\, W(s|s_1,s_2) = 1.
$$

Soit $[\frac{dN_{col}}{dt}]$ le taux de rencontre. La source en s de poches actives s'écrit :

$$S_A(s,t) \;=\; \int_{[s_0,\infty[^2} ds_1 ds_2\; W_(s|s_1,s_2)[\frac{dN_{col}}{dt}](s_1,s_2) \tag{13}$$

Il reste à évaluer $[\frac{dN_{col}}{dt}](s_1,s_2)$: on va exprimer ce taux de rencontre en fonction des taux de disparition en distingant les deux types de rencontres AA et AI. Pour les rencontres AA, il y a deux disparitions de poches actives par rencontre ; pour les rencontres AI, il y a une disparition de poche active par rencontre :

$$\begin{aligned}
[\frac{dN_{col}}{dt}](s_1,s_2) &= [\frac{dN_{colAA}}{dt}](s_1,s_2) \;+\; [\frac{dN_{colAI}}{dt}](s_1,s_2) \\
[\frac{dN_{colAA}}{dt}](s_1,s_2) &= \frac{1}{2}\,\frac{1}{\tilde{\tau}(s_1,s_2)} f_A(s_1,t) f_A(s_2,t) \\
[\frac{dN_{colAI}}{dt}](s_1,s_2) &= \frac{1}{\tilde{\tau}(s_1,s_2)} f_A(s_1,t) f_I(s_2,t)
\end{aligned} \tag{14}$$

Finalement, la source $S_A(s,t)$ s'ecrit :

$$\begin{aligned}
S_A(s,t) \;=\;& \frac{1}{2}\int_{[s_0,\infty[^2} ds_1 ds_2\; W_(s|s_1,s_2)\frac{1}{\tilde{\tau}(s_1,s_2)} f_A(s_1,t) f_A(s_2,t) \\
&+ \int_{[s_0,\infty[^2} ds_1 ds_2\; W_(s|s_1,s_2)\frac{1}{\tilde{\tau}(s_1,s_2)} f_A(s_1,t) f_I(s_2,t)
\end{aligned} \tag{15}$$

Les probabilités W sont données par :

$$W(s|s_1,s_2) \;=\; \delta(s-(s_1+s_2)) \tag{16}$$

Remarque : En tenant compte de l'expression de W, on peut intégrer explicitement sur s_2 :

$$S_A(s,t) \;=\; \int_{s_0}^{s-s_0} \frac{1}{\tilde{\tau}(s_1,s-s_1)}(\frac{1}{2} f_A(s_1,t) f_A(s-s_1,t) \;+\; f_A(s_1,t) f_I(s-s_1,t))ds_1 \tag{17}$$

Mais nous n'allons pas utiliser cette équation et préférer la formule (15) plus facile à manipuler.

Source de poches inactives. Les poches inactives ont pour source les morts des poches actives :

$$S_I(s,t) \;=\; \frac{1}{\tau'_A(s,t)} f_A(s,t) \tag{18}$$

Flux aux frontières

Le debit d'apparition de poches en s_0 est la somme de deux termes : le taux de naissance de cumulonimbus issus des thermiques $B(t)$ (chaque nouveau cumulonimbus étant supposé donner une nouvelle poches d'aire s_0) et le taux de naissance de cumulonimbus issus des collisions de poches inactives. Ce débit d'apparition en s_0 se transforme en un flux de poches actives croissant à partir de s_0 :

$$2\sqrt{\pi s_0}G(s_0)f_A(s_0) \;=\; B(t) \;+\; \frac{1}{2}\int_{[s_0,\infty[^2} ds_1 ds_2\, \frac{1}{\tilde{\tau}(s_1,s_2)} f_I(s_1,t) f_I(s_2,t) \tag{19}$$

En revanche, le flux de poches inactives en s_0 est nul :

$$G(s_0)f_I(s_0) \;=\; 0 \tag{20}$$

Équations d'évolution sur $]s_0,\ +\infty[$

En regroupant tous les termes on obtient le système d'équations :

$$\begin{cases} \partial_t(f_A(s,t)) \;+\; \partial_s(f_A(s,t)2\sqrt{\pi s}G(s)) \\ \quad = \quad -[\int_{[s_0,\infty[} ds_2\, \frac{1}{\tilde{\tau}(s,s_2)}(f_A(s_2,t)+f_I(s_2,t)) + \frac{1}{\tau'_A(s,t)}]f_A(s,t) \\ \qquad\quad + \int_{[s_0,\infty[^2} ds_1 ds_2\, W_(s|s_1,s_2)\frac{1}{\tilde{\tau}(s_1,s_2)}(\frac{1}{2}f_A(s_1,t)f_A(s_2,t) + f_A(s_1,t)f_I(s_2,t)) \\ \partial_t(f_I(s,t)) \;+\; \partial_s(f_I(s,t)2\sqrt{\pi s}G(s)) \\ \quad = \quad -[\int_{[s_0,\infty[} ds_2\, \frac{1}{\tilde{\tau}(s,s_2)}(f_A(s_2,t)+f_I(s_2,t)) + \frac{1}{\tau'_I(s,t)}]f_I(s,t) \\ \qquad\quad + \frac{1}{\tau'_A(s,t)}f_A(s,t) \end{cases} \tag{21}$$

avec les conditions aux limites :

$$\begin{cases} 2\sqrt{\pi s_0}G(s_0)f_A(s_0) \;=\; B(t) \;+\; \frac{1}{2}\int_{[s_0,\infty[^2} ds_1 ds_2\, \frac{1}{\tilde{\tau}(s_1,s_2)} f_I(s_1,t) f_I(s_2,t) \\ 2\sqrt{\pi s_0}G(s_0)f_I(s_0) \;=\; 0 \end{cases} \tag{22}$$

1.3 Et maintenant

Il reste à préciser des paramétrisations pour τ'_A et pour τ'_I.

2 Premiers moments : équations d'évolution des populations de poches et de leurs fractions surfaciques

2.1 Premier moment : modèle macro des évolutions des populations totales A et I

Le principe est d'intégrer sur s les équations (21). D'abord, on intègre (15) et on utilise la propriété :

$$\int_{[s_0,\infty[} ds\, W(s|s_1, s_2) \ = \ 1.$$

Il vient :

$$\begin{aligned} \int_{[s_0,\infty[} ds\ S_A(s,t) \ &= \ \frac{1}{2}\int_{[s_0,\infty[^2} ds_1 ds_2\ \frac{1}{\tilde{\tau}(s_1,s_2)} f_A(s_1,t) f_A(s_2,t) \\ &\quad + \int_{[s_0,\infty[^2} ds_1 ds_2\ \frac{1}{\tilde{\tau}(s_1,s_2)} f_A(s_1,t) f_I(s_2,t) \end{aligned} \tag{23}$$

L'intégration de l'équation (21) donne alors, pour les poches actives :

$$\begin{aligned} &\partial_t A + \int_{[s_0,\infty[} ds\ \ \partial_s(f_A(s) 2\sqrt{\pi s} C_*) \\ &= \ \ -[\int_{[s_0,\infty[^2} dsds_2\ \frac{1}{\tilde{\tau}(s,s_2)} (f_A(s_2,t) + f_I(s_2,t)) f_A(s,t) + \int_{[s_0,\infty[} ds\ \frac{1}{\tau'_A(s,t)} f_A(s,t)] \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_{[s_0,\infty[^2} ds_1 ds_2\ \frac{1}{\tilde{\tau}(s_1,s_2)} f_A(s_1,t) f_A(s_2,t) \\ &\quad + \int_{[s_0,\infty[^2} ds_1 ds_2\ \frac{1}{\tilde{\tau}(s_1,s_2)} f_A(s_1,t) f_I(s_2,t) \end{aligned} \tag{24}$$

Du coup, les termes en $f_A f_I$ se compensent et il reste :

$$\begin{aligned} &\partial_t A + \int_{[s_0,\infty[} ds\ \partial_s(f_A(s) 2\sqrt{\pi s} C_*) \\ &= - \int_{[s_0,\infty[^2} ds_1 ds_2\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{\tilde{\tau}(s,s_2)} f_A(s,t) f_A(s_2,t) - \int_{[s_0,\infty[} ds\ \frac{1}{\tau'_A(s,t)} f_A(s,t) \end{aligned} \tag{25}$$

et l'intégrale du premier membre peut s'exprimer en fonction des conditions aux limites.

L'ensemble des équations pour les populations totales de poches actives et inactives s'écrit maintenant :

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\partial_t A - B(t) - \frac{1}{2}\int_{[s_0,\infty[^2} ds_1 ds_2 \;\; \frac{1}{\tilde{\tau}(s_1,s_2)} f_I(s_1,t) f_I(s_2,t) \\
\\
\quad = \quad -\int_{[s_0,\infty[^2} ds_1 ds_2 \; \frac{1}{2}\, \frac{1}{\tilde{\tau}(s_1,s_2)} f_A(s_1,t) f_A(s_2,t) \\
\qquad\qquad -\int_{[s_0,\infty[} ds \; \frac{1}{\tau'_A(s,t)} f_A(s,t) \\
\partial_t I \\
\quad = \quad -\int_{[s_0,\infty[^2} ds_1 ds_2 \; \frac{1}{\tilde{\tau}(s_1,s_2)} (f_A(s_1,t) f_I(s_2,t) + f_I(s_1,t) f_I(s_2,t)) \\
\qquad\qquad -\int_{[s_0,\infty[} ds \; \frac{1}{\tau'_I(s,t)} f_I(s,t) + \int_{[s_0,\infty[} ds \; \frac{1}{\tau'_A(s,t)} f_A(s,t)
\end{array}
\right. \tag{26}
$$

Diverses intégrales doubles relatives à des paires de poches apparaissent dans ces équations. En désignant par J_{XY} l'intégrale double relative à une paire de poches de catégories X et Y (X pouvant être A ou I, et de même pour Y), ces intégrales sont de la forme :

$$
J_{XY} \;=\; \int_{[s_0,\infty[^2} ds_1 ds_2 \; \frac{1}{\tilde{\tau}(s_1,s_2)} f_X(s_1,t) f_Y(s_2,t) \quad \text{avec } \frac{1}{\tilde{\tau}(\mathrm{s}_1,\mathrm{s}_2)} = 4(\sqrt{\pi \mathrm{s}_1} + \sqrt{\pi \mathrm{s}_2})\mathrm{C}_* \tag{27}
$$

En tenant compte de l'égalité $\int_{[s_0,\infty[} ds\; f_X(s) = X$, J_{XY} peut s'ecrire :

$$
J_{XY} \;=\; 4C_*[(\int_{[s_0,\infty[} ds_1 \; \sqrt{\pi s_1} f_X(s_1))Y + (\int_{[s_0,\infty[} ds_2 \; \sqrt{\pi s_2} f_Y(s_2))X]
$$

Les rayons moyens pour les catégories X et Y s'écrivent :

$$
\begin{aligned}
\overline{r_X} \;&=\; \frac{1}{X}\int_{[s_0,\infty[} ds \; \sqrt{\frac{s}{\pi}} f_X(s) \\
\overline{r_Y} \;&=\; \frac{1}{Y}\int_{[s_0,\infty[} ds \; \sqrt{\frac{s}{\pi}} f_Y(s)
\end{aligned} \tag{28}
$$

Alors, J_{XY} s'écrit simplement :

$$
J_{XY} \;=\; 4\pi C_* XY(\overline{r_X} + \overline{r_Y}) \tag{29}
$$

Pour achever l'écriture des équations en termes de variables intégrales, il reste à introduire les temps de vie inverses moyens :

$$
\frac{1}{\overline{\tau'_X}} \;=\; \frac{1}{X}\int_{[s_0,\infty[} ds \; \frac{1}{\tau'_X(s)} f_X(s) \tag{30}
$$

Finalemant, les équations (26) s'écrivent :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \partial_t A - B(t) - 4\pi C_* I^2 \overline{r_I} & = & -4\pi C_* A^2 \overline{r_A} - \frac{A}{\overline{\overline{\tau'_A}}} \\ \\ \partial_t I & = & -4\pi C_* AI(\overline{r_A} + \overline{r_I}) - 4\pi C_* I^2 (2\overline{r_I}) - \frac{I}{\overline{\overline{\tau'_I}}} + \frac{A}{\overline{\overline{\tau'_A}}} \end{array}\right. \tag{31}$$

ou encore, en réarrangeant un peu les termes :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \partial_t A & = & B(t) + 4\pi C_* (I^2 \overline{r_I} - A^2 \overline{r_A}) - \frac{A}{\overline{\overline{\tau'_A}}} \\ \\ \partial_t I & = & -8\pi C_* (AI \frac{\overline{r_A} + \overline{r_I}}{2} + I^2 \overline{r_I}) + \frac{A}{\overline{\overline{\tau'_A}}} - \frac{I}{\overline{\overline{\tau'_I}}} \end{array}\right. \tag{32}$$

Correspondance avec le modèle macro

L'équation de D s'obtient en sommant les deux équations (32) :

$$\partial_t D \;=\; B - 4\pi C_* (I^2 \overline{r_I} + A^2 \overline{r_A}) + 2AI \frac{\overline{r_A} + \overline{r_I}}{2}) - \frac{I}{\overline{\overline{\tau'_I}}} \tag{33}$$

Mais $I^2 \overline{r_I} + A^2 \overline{r_A} + AI(\overline{r_A} + \overline{r_I}) \;=\; (A + I)(A\overline{r_A} + I\overline{r_I})$. En notant que $A + I = D$ et que $A\overline{r_A} + I\overline{r_I} \;=\; D\overline{r}$, où $\overline{r}$ designe le rayon moyen, l'équation de D s'écrit :

$$\partial_t D \;=\; B - 4\pi C_* D^2 \overline{r} - \frac{I}{\overline{\overline{\tau'_I}}} \tag{34}$$

Cette équation correspond exactement à l'équation (5) de la note du modèle macro, récrite ici :

$$\partial_t D \;=\; B - f D^2 - \frac{D - A}{\tau_I} \quad \text{avec} \quad f = 4\pi C_* r \tag{35}$$

à condition d'y substituer $\overline{r}$ à r et $\overline{\tau'_I}$ à τ_I.

L'équation de A est un peu différente du fait de la présence de deux rayons. Dans le modèle macro, elle s'ecrit :

$$\partial_t A \;=\; B(t) + 4\pi C_* (I^2 r - A^2 r) - \frac{A}{\tau_A} \tag{36}$$

Cette équation diffère de l'équation (32) relative à A par la substitution de τ_A à $\overline{\tau'_A}$ et par la substitution de r à $\overline{r_I}$ (en facteur de I^2) et à $\overline{r_A}$ (en facteur de A^2).

En conclusion, ce modèle cinétique redonne, après intégration sur le spectre de rayons, un modèle proche du modèle macro originel, à ceci près que les rayons moyens de chaque catégorie de poches interviennent séparemment dans le nouveau modèle.

Prochaine étape : faire un modèle macro à deux rayons.

2.2 Deuxième moment : équations d'évolution des fractions surfaciques

2.2.1 Equation de $\partial_t \sigma_A$

Le principe est d'intégrer sur s les équations $s\times(21)$ en utilisant $\sigma_A = \int_{[s_0,\infty[} ds\ s f_A(s)$. D'abord, on intègre $s\times(15)$, en utilisant la propriété :

$$\int_{[s_0,\infty[} ds\ s\, W(s|s_1,s_2) \;=\; s_1+s_2$$

Il vient :

$$\begin{aligned}\int_{[s_0,\infty[} ds\ sS_A(s,t) \;=\;& \frac{1}{2}\int_{[s_0,\infty[^2} ds_1 ds_2\ (s_1+s_2)\,\frac{1}{\tilde{\tau}(s_1,s_2)} f_A(s_1,t) f_A(s_2,t) \\ &+\int_{[s_0,\infty[^2} ds_1 ds_2\ (s_1+s_2)\frac{1}{\tilde{\tau}(s_1,s_2)} f_A(s_1,t) f_I(s_2,t)\end{aligned} \tag{37}$$

Mais, de façon évidente,

$$\int_{[s_0,\infty[^2} ds_1 ds_2\ \frac{s_1}{\tilde{\tau}(s_1,s_2)} f_A(s_1,t) f_A(s_2,t) \;=\; \int_{[s_0,\infty[^2} ds_1 ds_2\ \frac{s_2}{\tilde{\tau}(s_1,s_2)} f_A(s_1,t) f_A(s_2,t) \tag{38}$$

et donc :

$$\begin{aligned}\int_{[s_0,\infty[} ds\ sS_A(s,t) \;=\;& \int_{[s_0,\infty[^2} ds_1 ds_2\ s_1\,\frac{1}{\tilde{\tau}(s_1,s_2)} f_A(s_1,t) f_A(s_2,t) \\ &+\int_{[s_0,\infty[^2} ds_1 ds_2\ (s_1+s_2)\frac{1}{\tilde{\tau}(s_1,s_2)} f_A(s_1,t) f_I(s_2,t)\end{aligned} \tag{39}$$

L'intégration de l'équation $s\times(21)$ donne alors, pour les poches actives :

$$\begin{aligned}&\partial_t\sigma_A + \int_{[s_0,\infty[} ds\ s\ \partial_s(f_A(s) 2\sqrt{\pi s} C_*) \\ &= \quad -[\int_{[s_0,\infty[^2} ds ds_2\ \frac{s}{\tilde{\tau}(s,s_2)}(f_A(s_2,t)+f_I(s_2,t)) f_A(s,t) + \int_{[s_0,\infty[} ds\ \frac{s}{\tau'_A(s,t)} f_A(s,t)] \\ &\qquad +\int_{[s_0,\infty[^2} ds_1 ds_2\ \frac{s_1}{\tilde{\tau}(s_1,s_2)} f_A(s_1,t) f_A(s_2,t) \\ &\qquad +\int_{[s_0,\infty[^2} ds_1 ds_2\ \frac{s_1+s_2}{\tilde{\tau}(s_1,s_2)} f_A(s_1,t) f_I(s_2,t)\end{aligned} \tag{40}$$

Les termes en $f_A f_A$ se compensent ; dans les termes en $f_A f_I$, il ne reste que le terme $\int_{[s_0,\infty[^2} ds_1 ds_2 \frac{s_2}{\tilde{\tau}} f_A(s_1) f_I(s_2)$:

$$\begin{aligned}&\partial_t\sigma_A + \int_{[s_0,\infty[} ds\ s\ \partial_s(f_A(s) 2\sqrt{\pi s} C_*) \\ &= \int_{[s_0,\infty[^2} ds_1 ds_2\ \frac{s_2}{\tilde{\tau}(s_1,s_2)} f_A(s_1,t) f_I(s_2,t) - \int_{[s_0,\infty[} ds\ \frac{s}{\tau'_A(s,t)} f_A(s,t)\end{aligned} \tag{41}$$

L'intégrande dans le membre de gauche peut s'écrire

$$s\partial_s(f_A(s)2\sqrt{\pi s}C_*) \;=\; \partial_s(sf_A(s)2\sqrt{\pi s}C_*) - (f_A(s)2\sqrt{\pi s}C_*)$$

et l'intégrale du terme en ∂_s s'exprime en fonction des conditions aux limites. D'où :

$$\begin{aligned}
&\partial_t\sigma_A \;-\; s_0B \;-\; \frac{s_0}{2}\int_{[s_0,\infty[^2} ds_1ds_2\;\frac{1}{\tilde{\tau}(s_1,s_2)}f_I(s_1,t)f_I(s_2,t) \;-\; \int_{[s_0,\infty[} dsf_A(s)2\sqrt{\pi s}C_* \\
&= \int_{[s_0,\infty[^2} ds_1ds_2\;\frac{s_2}{\tilde{\tau}(s_1,s_2)}f_A(s_1,t)f_I(s_2,t) - \int_{[s_0,\infty[} ds\;\frac{s}{\tau'_A(s,t)}f_A(s,t)
\end{aligned} \tag{42}$$

Il y a quatre intégrales à calculer que nous dénotons $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$, $\mathcal{T}_3$ et $\mathcal{T}_4$:

$$\partial_t\sigma_A \;-\; s_0B \;-\; \mathcal{T}_1 \;-\; \mathcal{T}_2 \;=\; \mathcal{T}_3 \;-\; \mathcal{T}_4 \tag{43}$$

– Le premier terme s'écrit :

$$\mathcal{T}_1 \;=\; \frac{s_0}{2}\int_{[s_0,\infty[^2} ds_1ds_2\;\frac{1}{\tilde{\tau}(s_1,s_2)}f_I(s_1,t)f_I(s_2,t)$$

C'est une intégrale du type J_{XY} utilisée dans le premier moment :

$$\mathcal{T}_1 \;=\; 4\pi C_*I^2\overline{r_I}s_0 \tag{44}$$

– Deuxième terme :

$$\mathcal{T}_2 \;=\; \int_{[s_0,\infty[} dsf_A(s)2\sqrt{\pi s}C_*$$

Ceci s'exprime simplement en fonction de $\overline{r_A}$:

$$\mathcal{T}_2 \;=\; 2\pi C_*A\overline{r_A} \tag{45}$$

– Troisième terme :

$$\mathcal{T}_3 \;=\; \int_{[s_0,\infty[^2} ds_1ds_2\;\frac{s_2}{\tilde{\tau}(s_1,s_2)}f_A(s_1,t)f_I(s_2,t)$$

En substituant à $\frac{1}{\tilde{\tau}(s_1,s_2)}$ son expression :

$$\frac{1}{\tilde{\tau}(s_1,s_2)} \;=\; 4(\sqrt{\pi s_1}+\sqrt{\pi s_2})C_*$$

il vient :

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_3 \;&=\; \int_{[s_0,\infty[^2} ds_1ds_2\;4\sqrt{\pi s_1}f_A(s_1,t)s_2f_I(s_2,t) + \int_{[s_0,\infty[^2} ds_1ds_2\;4C_*f_A(s_1,t)s_2\sqrt{\pi s_2}f_I(s_2,t) \\
&= 4\pi C_*\overline{r_A}A\sigma_I \;+\; 4C_*A\int_{[s_0,\infty[} ds2s_2\sqrt{\pi s_2}f_I(s_2,t)
\end{aligned} \tag{46}$$

Le rayon cubique moyen s'écrit :

$$\overline{r_I^3} \;=\; \frac{1}{I}\int_{[s_0,\infty[} ds(\frac{s}{\pi})^{\frac{3}{2}}f_I(s,t) \tag{47}$$

Alors :

$$\mathcal{T}_3 \;=\; 4\pi C_*\overline{r_A}A\sigma_I \;+\; 4C_*AI\pi^2\overline{r_I^3} \tag{48}$$

– Quatrième terme :

$$\mathcal{T}_4 \;=\; \int_{[s_0,\infty[} ds\; \frac{s}{\tau'_A(s,t)} f_A(s,t)$$

Temps d'atténuation moyen inverse de σ_A :

$$\frac{1}{\overline{\overline{\tau'_{\sigma A}}}} \;=\; \frac{1}{\sigma_A}\int_{[s_0,\infty[} ds\; \frac{s}{\tau'_A(s,t)} f_A(s,t) \tag{49}$$

Alors :

$$\mathcal{T}_4 \;=\; \frac{\sigma_A}{\overline{\overline{\tau'_{\sigma A}}}} \tag{50}$$

Au total :

$$\partial_t\sigma_A \;-\; s_0 B \;-\; 4\pi C_* I^2 \overline{r_I} s_0 \;=\; 4\pi C_* \overline{r_A} A(\sigma_I + \frac{1}{2}) \;+\; 4\pi^2 C_* \overline{r_I^3} AI \;-\; \frac{\sigma_A}{\overline{\overline{\tau'_{\sigma A}}}} \tag{51}$$

2.2.2 Equation de $\partial_t\sigma_I$

Le principe est d'intégrer sur s les équations $s\times(21)$ en utilisant $\sigma_I = \int_{[s_0,\infty[} ds\; s f_I(s)$. L'intégration de l'équation $s\times(21)$ donne, pour les poches inactives :

$$\begin{aligned}
&\partial_t\sigma_I + \int_{[s_0,\infty[} ds\; s\; \partial_s(f_I(s) 2\sqrt{\pi s} C_*) \\
&= -[\int_{[s_0,\infty[^2} ds ds_2\; \frac{s}{\tilde{\tau}(s,s_2)}(f_A(s_2,t) + f_I(s_2,t)) f_I(s,t) + \int_{[s_0,\infty[} ds\; \frac{s}{\tau'_I(s,t)} f_I(s,t)] \\
&+ \int_{[s_0,\infty[} ds\; \frac{s}{\tau'_A(s,t)} f_A(s,t)
\end{aligned} \tag{52}$$

L'intégrale à gauche du signe "=" s'écrit comme pour $\partial_t\sigma_A$:

$$\begin{aligned}
&\int_{[s_0,\infty[} ds\; s\; \partial_s(f_I(s) 2\sqrt{\pi s} C_*) \\
&= -\int_{[s_0,\infty[} ds\; s\; f_I(s) 2\sqrt{\pi s} C_* \\
&= -2\pi \overline{r_I} C_* I
\end{aligned} \tag{53}$$

L'intégrale double du second membre se décompose en quatre termes :

$$
\begin{aligned}
&-\int_{[s_0,\infty[^2} dsds_2\ \frac{s}{\tilde{\tau}(s,s_2)}(f_A(s_2,t)+f_I(s_2,t))f_I(s,t) \\
&= \ 4C_*[\ \int_{[s_0,\infty[^2} dsds_2\ s\sqrt{\pi s} f_A(s_2,t)f_I(s,t) \\
&\qquad +\int_{[s_0,\infty[^2} dsds_2\ s\sqrt{\pi s_2} f_A(s_2,t)f_I(s,t) \\
&\qquad +\int_{[s_0,\infty[^2} dsds_2\ s\sqrt{\pi s} f_I(s_2,t)f_I(s,t) \\
&\qquad +\int_{[s_0,\infty[^2} dsds_2\ s\sqrt{\pi s_2} f_I(s_2,t)f_I(s,t)] \\
&= \ 4C_*[A\pi^2\overline{r_I^3}I + \pi\overline{r_A}A\sigma_I + I\pi^2\overline{r_I^3}I + \pi\overline{r_I}I\sigma_I]
\end{aligned}
\tag{54}
$$

Les termes d'atténuation s'ecrivent comme pour $\partial_t\sigma_A$, en introduisant le temps d'atténuation inverse moyen de σ_I :

$$
\frac{1}{\overline{\overline{\tau'_{\sigma I}}}} \ = \ \frac{1}{\sigma_I}\int_{[s_0,\infty[} ds\ \frac{s}{\tau'_I(s,t)} f_I(s,t) \tag{55}
$$

Il vient :

$$
\begin{aligned}
\int_{[s_0,\infty[} ds\ \frac{s}{\tau'_I(s,t)} f_I(s,t) \ &= \ \frac{\sigma_I}{\overline{\overline{\tau'_{\sigma I}}}} \\
\int_{[s_0,\infty[} ds\ \frac{s}{\tau'_A(s,t)} f_A(s,t) \ &= \ \frac{\sigma_A}{\overline{\overline{\tau'_{\sigma A}}}}
\end{aligned}
\tag{56}
$$

Au total :

$$
\partial_t\sigma_I \ = \ -\ 4\pi C_*[\pi\overline{r_I^3}I(A+I) + \sigma_I(A\overline{r_A} + I\overline{r_I}) - \frac{1}{2}I\overline{r_I}] \ - \ \frac{\sigma_I}{\overline{\overline{\tau'_{\sigma I}}}} \ + \ \frac{\sigma_A}{\overline{\overline{\tau'_{\sigma A}}}} \tag{57}
$$

2.2.3 Equation de $\partial_t\sigma$

La somme des équations (51) et (57) s'écrit :

$$
\begin{aligned}
\partial_t\sigma \ = \ & s_0 B \ + \ 4\pi C_* I^2\overline{r_I}s_0 \ + \ 4\pi C_*\overline{r_A}A(\sigma_I + \frac{1}{2}) \ + \ 4\pi^2 C_*\overline{r_I^3}AI \\
& -\ 4\pi C_*[\pi\overline{r_I^3}I(A+I) + \sigma_I(A\overline{r_A} + I\overline{r_I}) - \frac{1}{2}I\overline{r_I}] \ - \ \frac{\sigma_I}{\overline{\overline{\tau'_{\sigma I}}}}
\end{aligned}
\tag{58}
$$

Les termes en $4\pi^2C_*\overline{r_I^3}AI$ se compensent.
Les termes en $4\pi C_*\overline{r_A}A\sigma_I$ se compensent.
Il reste :

$$
\partial_t\sigma \ = \ Bs_0 \ + \ 4\pi C_* I^2\overline{r_I}s_0 \ - \ 4\pi^2 C_*\overline{r_I^3}I^2 \ + \ 2\pi C_*(A\overline{r_A} + I\overline{r_I}) \ - \ 4\pi C_* I\overline{r_I}\sigma_I \ - \ \frac{\sigma_I}{\overline{\overline{\tau'_{\sigma I}}}} \tag{59}
$$

Pour rendre cette équation un peu plus compréhensible, il faut récrire et regrouper quelques termes.
D'abord, puisque $\sigma_I = \pi\overline{r_I^2}I$, le terme $4\pi C_* I\overline{r_I}\sigma_I$ peut aussi s'écrire $4\pi^2 C_* I^2\overline{r_I}\,\overline{r_I^2}$. Ensuite $A\overline{r_A} + I\overline{r_I} = D\overline{r}$. Il vient alors, en regroupant les termes en I^2 :

$$\partial_t\sigma = Bs_0 - \frac{\sigma_I}{\tau'_{\sigma I}} + 2\pi C_* D\overline{r} - 4\pi C_* I^2\overline{r_I}\left(\pi\frac{\overline{r_I^3}}{\overline{r_I}} + \pi\overline{r_I^2} - s_0\right) \tag{60}$$

Cette équation est identique à l'équation (7) de la note du modèle macro :

$$\partial_t\sigma = Ba_0 - \frac{\pi r^2}{\tau_I}(D - A) + 2\pi r D C_* - f(D - A)^2(2\pi r^2 - a_0)$$

si on y substitue σ_I à $\pi r^2 I$, $\overline{r}$ à r, $\overline{r_I}$ à r dans le facteur de contact f et $\pi(\frac{\overline{r_I^3}}{\overline{r_I}} + \overline{r_I^2})$ à $2\pi r^2$ dans le terme de collision.

3 Modèle macro à deux rayons