Paramétrisation de la dynamique de population de poches : formulation positive

JYG 4 juillet 2022

Notre modèle décrit une population de wakes circulaires identiques. Il s'agit de représenter, à l'aide de ce schéma très simple, une population de poches d'ages et de tailles variées, dont certaines sont alimentées par des colonnes convectives pendant que d'autre sont simplement en train de s'effondrer. En outre ces poches peuvent entrer en collision ou fusionner. Il s'agit de la deuxième version de ce modèle, la première ayant pour défaut d'avoir des régimes stationnaires à densités négatives.

0.1 Principes

- Les poches naissent à partir des CuNimb issus des cumulus $\longrightarrow$ taux de naissances B.
- Les poches meurent par effondrement lorsque la convection ne les alimente plus.
- Les poches disparaissent aussi à l'occasion des rencontres, soit que leur rencontre mène à une fusion ($\longrightarrow$ diminution du nombre de poches d'une unité) soit qu'elle mène à la création d'une nouvelle poche pendant que les deux autres meurent ($\longrightarrow$ diminution du nombre de poches d'une unité).
- Les processus de rencontre mènent à un changement de rayon des poches concernées. Comme notre modèle décrit des poches de même rayon, ces changements discontinus locaux de rayons vont être représentés par une évolution continue du rayon moyen. Du coup, $\partial_t r$ sera différent de C_*.
- Il y a **deux catégories de poches** : les poches actives (alimentées par des colonnes convectives) et les poches inactives, lesquelles s'effondrent. Trois variables décrivent ces populations : D est la densité totale, A est la densité de poches actives et I la densité de poches inactives. On a évidemment $D = A + I$.
- Il y a **trois types de rencontres** : entre deux poches inactives, entre deux poches actives et entre une poche active et une poche inactive. Les trois taux de rencontre par unité de surface seront désignés par $[I^2]_{col}$, $[A^2]_{col}$ et $[IA]_{col}$. Nous faisons l'hypothèse que les rencontres de type I^2 sont de nature collisionnelle : les deux poches entrant en collisions meurent alors qu'une nouvelle colonne convective apparaît engendrant une nouvelle poche active. Les rencontres de type A^2 et AI , au contraire, sont de nature fusionnelle, amenant à une nouvelle poche active à la place des deux poches incidentes.
- **La densite de poches actives** évolue sous l'effet des naissances, des morts (temps de vie τ' à paramétrer), des collisions I^2 (qui apportent chacune une nouvelle poche active) et des collisions A^2 (qui diminuent chacune le nombre de poches actives d'une unité) :
$$\partial_t A \; = \; B \; - \; \frac{1}{\tau'} A \; + \; [I^2]_{col} \; - \; [A^2]_{col} \tag{1}$$
- **La densité de poches inactives** évolue sous l'effet des morts des poches actives (lorsqu'une poche active meurt, elle devient une poche inactive), des morts des poches

inactives (temps de vie τ à paramétrer), des collisions I^2 (qui font chacune disparaître deux poches inactives) et des collisons IA (qui font chacune disparaître une poche inactive) :

$$\partial_t I \;=\; \frac{1}{\tau'}A \;-\; \frac{1}{\tau}I \;-\; 2[I^2]_{col} \;-\; [IA]_{col} \tag{2}$$

- **La densité totale de poches** varie alors sous l'action des naissances, des effondrements de poches inactives et des collisions :

$$\partial_t D \;=\; B \;-\; \frac{D-A}{\tau} \;-\left([A^2]_{col} + [I^2]_{col} + [IA]_{col}\right)$$

  Mais $[A^2]_{col} + [I^2]_{col} + [IA]_{col}$ est égal au taux total de collisions, sans distinction du type de poche ; on l'écrira $[D^2]_{col}$:

$$\partial_t D \;=\; B \;-\; \frac{D-A}{\tau} \;-[D^2]_{col} \tag{3}$$

- Pour estimer le taux de rencontre $[D^2]_{col}$ il faut évaluer le nombre de rencontres dN, par unité de surface, qui ont lieu lorsque le rayon croit de dr. Deux poches se rencontrent lorsque la distance entre leurs centres est comprise entre $2r$ et $2(r + dr)$. Ainsi le nombre de rencontres pendant dt est egal à la moitié du nombre de poches situées dans les couronnes $[2r, 2(r + \partial_t r\; dt)]$ (la moitié puisque les rencontres sont alors comptées deux fois). L'aire de ces couronnes est $2\pi(2r)D(2\partial_t r)$ et le nombre de centres de poches dans ces couronnes est $2\pi(2r)D^2(2\partial_t r)$. Finalement, $[D^2]_{col} \;=\; 4\pi r D^2 \partial_t r$. Alors :

$$\partial_t D \;=\; B \;-\; \frac{D-A}{\tau} \;-\; 4\pi r D^2 \partial_t r$$

  Pour simplifier les écritures définissons le facteur de contact :

$$f \;=\; 4\pi r \partial_t r \tag{4}$$

  Avec cette notation, le taux de rencontre s'ecrit :

$$[D^2]_{col} \;=\; fD^2$$

  et l'équation d'évolution de D :

$$\partial_t D \;=\; B \;-\; \frac{D-A}{\tau} \;-\; fD^2 \tag{5}$$

  Le même raisonnement mène aux taux de rencontre $[I^2]_{col}$, $[A^2]_{col}$ et $[IA]_{col}$:

$$\begin{aligned} [I^2]_{col} &= fI^2 \\ [A^2]_{col} &= fA^2 \\ [IA]_{col} &= 2fIA \end{aligned} \tag{6}$$

  Le facteur 2 dans la dernière équation tient au fait que les poches sont, dans ce cas, discernables et que, donc, il n'y a pas double comptage.
- **La fraction surfacique** couverte par les poches σ augmente par la naissance des poches (chaque nouvelle poche a une aire $a_0 \;=\; \pi r_0^2$, où r_0 est un paramètre) et par étalement ; elle diminue par mort des poches (chaque mort fait disparaitre une aire πr^2 où r est le rayon des poches) et possiblement par rencontres.

– Les rencontres de type I^2 affectent la fraction surfacique σ : chaque collision entraîne la création d'une aire a_0) pendant que les deux poches incidentes disparaissent (disparition d'une aire $2\pi r^2$). Les rencontres de type A^2 et AI, qui sont de type fusionnel, laissent au contraire la fraction σ invariante.
  L'équation d'évolution de σ s'écrit alors :

$$\partial_t \sigma \ = \ Ba_0 \ - \ \frac{\pi r^2}{\tau}(D-A) \ + \ 2\pi r D C_* \ - \ [I^2]_{col}(2\pi r^2 - a_0)$$

  soit :

$$\partial_t \sigma \ = \ Ba_0 \ - \ \frac{\pi r^2}{\tau}(D-A) \ + \ 2\pi r D C_* \ - \ f(D-A)^2(2\pi r^2 - a_0) \tag{7}$$

  Cette équation exprime $\partial_t \sigma$ en fonction de D, A, r et f, c'est-à-dire en fonction des variables d'état D, A et σ (puisque $r = \sqrt{\sigma/(\pi D)}$), et de f.
– L'expression du **facteur de contact** f en fonction des variables d'état s'obtient en combinant l'équation (7) avec la dérivée temporelle de la relation $\sigma \ = \ \pi r^2 D$:

$$\partial_t \sigma \ = \ \frac{1}{2} f D \ + \ \pi r^2 \partial_t D \tag{8}$$

  La différence des deux dernières relations permet d'éliminer $\partial_t \sigma$. Il vient :

$$0 \ = \ Ba_0 \ - \ \frac{\pi r^2}{\tau}(D-A) \ + \ 2\pi r D C_* \ - \ f(D-A)^2(2\pi r^2 - a_0) \ - \ \frac{1}{2} f D \ - \ \pi r^2 \partial_t D$$

  La substitution de $\partial_t D$ donnée par (5) donne :

$$\begin{aligned} 0 \ = \ & Ba_0 \ - \ \frac{\pi r^2}{\tau}(D-A) \ + \ 2\pi r D C_* \ - \ f(D-A)^2(2\pi r^2 - a_0) \ - \ \frac{1}{2} f D \\ & - \ \pi r^2 \left[B \ - \ \frac{D-A}{\tau} \ - \ f D^2 \right] \end{aligned} \tag{9}$$

  Le regroupement des termes en f donne :

$$\frac{f}{2} \left[2(D-A)^2(2\pi r^2 - a_0) \ + \ D \ - \ 2\pi r^2 D^2 \right] \ = \ B(a_0 - \pi r^2) \ + \ 2\pi r D C_*$$

  d'où, finalement :

$$f \ = \ 2 \frac{B(a_0 - \pi r^2) \ + \ 2\pi r D C_*}{2(D-A)^2(2\pi r^2 - a_0) \ + \ D(1 \ - \ 2\sigma)} \tag{10}$$

– **Récapitulation.** Les équations s'écrivent :

$$\left\{ \begin{aligned} \partial_t D \ &= \ B \ - \ \frac{D-A}{\tau} \ - \ f D^2 \\ \partial_t A \ &= \ B \ - \ \frac{1}{\tau'} A \ + \ f(D-A)^2 \ - \ f A^2 \\ \partial_t \sigma \ &= \ Ba_0 \ - \ \frac{\pi r^2}{\tau}(D-A) \ + \ 2\pi r D C_* \ - \ f(D-A)^2(2\pi r^2 - a_0) \end{aligned} \right. \tag{11}$$

et

$$\left\{\begin{array}{lcl} \sigma & = & \pi r^2 D \\ \\ f & = & 2\dfrac{B(a_0 - \pi r^2) \; + \; 2\pi r D C_*}{2(D-A)^2(2\pi r^2 - a_0) \; + \; D(1 \; - \; 2\sigma)} \end{array}\right. \tag{12}$$

– Les poches qui disparaissent par mort ou par collision contribuent au **détraînement**. Les naissances créent des zones (w) prises sur (x) : elles contribuent à **l'entraînement**.

0.2 Aspects techniques

0.2.1 Paramétrisation de τ'

[A FAIRE]

0.2.2 Paramétrisation de τ

Considérons une poche inactive ayant pour rayon et hauteur initiales r_0 et h_0. En supposant que la poche s'effondre adiabatiquement en gardant un volume constant (en négligeant la variation de la masse volumique et en supposant la masse constante) on obtient (V est le volume de la poche) :

$$\left.\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{lcl} r & = & \sqrt{\dfrac{V}{\pi h}} \\ \\ \partial_t h & = & -2C_*\sqrt{\dfrac{\pi h^3}{V}} \end{array}\right. \\ \\ \left\{\begin{array}{lcl} \text{Wape} & = & \dfrac{1}{2} h \delta\theta_{surf} \\ \\ C_* & = & \sqrt{\text{Wape}} \end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{C_*}{C_{*0}} \; = \; \sqrt{\dfrac{h}{h_0}} \end{array}\right\} \Longrightarrow \partial_t h \; = \; -2h^2\sqrt{\frac{\pi}{V h_0}} C_{*0} \tag{13}$$

La formule de $\partial_t h$ s'intègre facilement. En exprimant tout en fonction de C_* on obtient :

$$(\frac{C_{*0}}{C_*})^2 \; = \; 1 \; + \; 2\frac{C_{*0}}{r_0} t \tag{14}$$

Je fais l'hypothèse que la poche est morte lorsque la vitesse d'expansion devient inférieure à une vitesse seuil C_{*t}. Cette vitesse seuil est atteinte au bout d'un temps t_l donné par :

$$(\frac{C_{*0}}{C_{*t}})^2 \; = \; 1 \; + \; 2\frac{C_{*0}}{r_0} t_l$$

ce qui donne :

$$t_l \; = \; \frac{r_0}{2C_{*0}}[(\frac{C_{*0}}{C_{*t}})^2 \; - \; 1] \tag{15}$$

Application : A chaque instant nous connaisons le rayon r et la vitesse d'expansion C_* de la poche représentative. Nous connaissons donc la durée t_l qu'il lui reste à vivre :

$$t_l = \frac{r}{2C_*}[(\frac{C_*}{C_{*t}})^2 - 1]$$

Supposant un régime permanent ($D-A$, r et C_* constants), le nombre de poches qui meurent dans l'intervalle [t, t+δt] est égal au nombre de poches inactives ayant un age compris entre t$_l$-δt et t$_l$, doit $(D - A)\frac{\delta t}{t_l}$. En prenant $\tau = t_l$ nous retrouvons le terme de mortalité de l'équation 5.

0.2.3 Paramétrisation de α (effet du cisaillement

A FAIRE!!!

0.3 Stochastic trigger

- Analysis of LES (Large Eddy Simulation" of 10 July 2006 case over Niamey :
  1. PDF of cumulus sizes is exponential.
  2. deep convection triggers when there are large cumulus.
- Trigger = "largest cumulus size exceeds a given threshold"
- From PDF of Cu size $\longrightarrow$ PDF of largest cumulus size
- From the thermal model $\longrightarrow$ number of cumulus clouds per unit area
- $\Longrightarrow$ number of cumulo-nimbus per unit area
- $\Longrightarrow$ probability of triggering; use of a random number generator to implement this probability (no trigger $\Rightarrow$ ALE set to zero).

0.4 Model equations

- A : number of active wakes per unit area
- D : number of wakes per unit area
- σ : fractionnal area covered by wakes
- r : wake radius
- B : birth rate of Cumulonimbus (and of wakes)
- a_0 : initial area of newborn wakes
- C_* : gust front velocity
- τ_{cv} : lifetime of convective plumes
- τ : lifetime of collapsing wakes
- β : fraction of wakes that are active
- α : factor going from zero (colliding wakes merely merge, whithout wake area loss) to 1 (colliding wakes induce a new one that grows while the two others collapse) : should depend on shear. Presently, $\alpha = 1$.

$$
\begin{cases}
\partial_t A = B - \dfrac{1}{\tau_{cv}}(A - \beta D) \\[2ex]
\partial_t D = B - \dfrac{D - A}{\tau} - 4\pi r D^2 \partial_t r \\[2ex]
\partial_t \sigma = B a_0 - \dfrac{\pi r^2}{\tau}(D - A) + 2\pi r D C_* - \alpha 4\pi r D \partial_t r (2\sigma - D a_0)
\end{cases}
$$

and from $\sigma = \pi r^2 D : \partial_t \sigma = 2\pi r D \partial_t r + \pi r^2 \partial_t D$