Paramétrisation de la dynamique de population de poches

JYG 18 octobre 2017

Notre modèle décrit une population de wakes circulaires identiques. Il s'agit de représenter, à l'aide de ce schéma très simple, une population de poches d'ages et de tailles variées, dont certaines sont alimentées par des colonnes convectives pendant que d'autre sont simplement en train de s'effondrer. En outre ces poches peuvent entrer en collision ou fusionner.

0.1 Principes

- Les poches naissent à partir des CuNimb issus des cumulus $\longrightarrow$ taux de naissances B.
- Les poches meurent par effondrement lorsque la convection ne les alimente plus.
- Les poches disparaissent aussi à l'occasion des collisions, soit que leur rencontre mène à une fusion ($\longrightarrow$ diminution du nombre de poches d'une unité) soit qu'elle mène à la création d'une nouvelle poche pendant que les deux autres meurent ($\longrightarrow$ diminution du nombre de poches d'une unité).
- Les processus de collision mènent à un changement de rayon des poches concernées. Comme notre modèle décrit des poches de meme rayon, ces changements discontinus locaux de rayons vont etre représentés par une évolution continue du rayon moyen. Du coup, $\partial_t r$ sera différent de C_*.
- Il y a **deux catégories de poches** : les poches actives (alimentées par des colonnes convectives) et les poches inactives, lesquelles s'effondrent. Deux variables décrivent ces populations : D est la densité totale et A est la densité de poches actives.
- Pour simplifier, nous écrivons que **la densité de poches actives** est rappellée avec un temps de relaxation τ_{cv} (= temps de vie des panaches convectifs) vers une fraction β de la densité totale (l'idée étant que β dépend de ALE$_{wk}$ - |CIN|, c'est-à-dire de la capacité des poches à recréer des colonnes convectives à leurs fronts de rafales) :

$$\partial_t A \;=\; B \;-\; \frac{1}{\tau_{cv}}(A \;-\; \beta D)$$

- **La densité totale de poches** varie alors sous l'action des naissances, des effondrements de poches inactives et des collisions :

$$\partial_t D \;=\; B \;-\; \frac{D - A}{\tau} \;-[\partial_t D]_{col}$$

  où τ désigne la temps de vie des poches inactives (à paramétrer), $[\partial_t D]_{col}$ est la densité de collisions par unité de temps.
- Pour estimer le taux de collision $[\partial_t D]_{col}$ il faut évaluer le nombre de rencontres dN, par unité de surface, qui ont lieu lorsque le rayon croit de dr. Deux poches se rencontrent lorsque la distance entre leurs centres est comprise entre $2r$ et $2(r + dr)$. Ainsi le nombre de rencontres pendant dt est egal à la moitié du nombre de poches situées dans les couronnes $[2r, 2(r + \partial_t r\ dt)]$ (la moitié puisque les rencontres sont alors comptées

deux fois). L'aire de ces couronnes est $2\pi(2r)D(2\partial_t r)$ et le nombre de centres de poches dans ces couronnes est $2\pi(2r)D^2(2\partial_t r)$. Finalement, $[\partial_t D]_{col} = 4\pi r D^2 \partial_t r$. Alors :

$$\partial_t D = B - \frac{D - A}{\tau} - 4\pi r D^2 \partial_t r \tag{1}$$

- **La fraction surfacique** couverte par les poches σ augmente par la naissance des poches (chaque nouvelle poche a une aire $a_0 = \pi r_0^2$, où r_0 est un paramètre) et par étalement ; elle diminue par mort des poches (chaque mort fait disparaitre une aire πr^2 où r est le rayon des poches) et possiblement par rencontres.
- Les rencontres entre poches qui en affectent la fraction surfacique sont celles qui induisent la formation d'une nouvelle poche (création d'une aire a_0) pendant que les deux poches incidentes disparaissent (disparition d'une aire $2\pi r^2$). Nous faisons l'hypothèse que toutes les rencontres sont de type "fusion" si le cisaillement est fort et de type "collision" si le cisaillement est faible. En représentant le poids relatif des deux processus par une variable α, qui vaut 0 pour un cisaillement fort et 1 pour un cisaillement faible, la variation de la fraction surfacique des poches lors des rencontres s'écrit $\alpha[\partial_t D]_{col}(2\pi r^2 - a_0)$. Alors :

$$\partial_t \sigma = B a_0 - \frac{\pi r^2}{\tau}(D - A) + 2\pi r D C_* - \alpha 4\pi r D \partial_t r (2\sigma - D a_0)$$

  où α reste à paramétrer en fonction du cisaillement (pour le moment je prends $\alpha = 1$).
- De la relation $\sigma = \pi r^2 D$ nous pouvons tirer :

$$\partial_t \sigma = 2\pi r D \partial_t r + \pi r^2 \partial_t D$$

  La différence des deux dernières relations permet d'éliminer $\partial_t \sigma$ et d'obtenir une expression (compliquée) de $\partial_t r$.
- Les poches qui disparaissent par mort ou par collision contribuent au **détrainement**. Les naissances créent des zones (w) prises sur (x) : elles contribuent à **l'entrainement**.

0.2 Aspects techniques

0.2.1 Paramétrisation de β

Paramétrisation très simple fonction de [ALE$_{wk}$-|CIN|] avec deux seuils :
- Pour ALE$_{wk}$-|CIN| < 0, $\beta = 0$.
- Pour ALE$_{wk}$-|CIN| $>$ 2*|CIN|, $\beta = 1$.
- Pour $0 <$ ALE$_{wk}$-|CIN| $<$ 2*|CIN|, interpolation linéaire.

Ce facteur 2 est évidemment parfaitement arbitraire. Et cette paramétrisation n'est pas satisfaisante pour CIN $= 0$. A REVOIR !!

0.2.2 Paramétrisation de τ

Considérons une poche inactive ayant pour rayon et hauteur initiales r_0 et h_0. En supposant que la poche s'effondre adiabatiquement en gardant un volume constant (en négligeant la variation de la masse volumique et en supposant la masse constante) on obtient (V est le volume de la poche) :

$$\left.\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{lcl} r &=& \sqrt{\dfrac{V}{\pi h}} \\[2ex] \partial_t h &=& -2C_*\sqrt{\dfrac{\pi h^3}{V}} \end{array}\right. \\[6ex] \left\{\begin{array}{lcl} \text{Wape} &=& \dfrac{1}{2} h\delta\theta_{surf} \\[2ex] C_* &=& \sqrt{\text{Wape}} \end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{C_*}{C_{*0}} = \sqrt{\dfrac{h}{h_0}} \end{array}\right\} \Longrightarrow \partial_t h = -2h^2\sqrt{\frac{\pi}{V h_0}} C_{*0} \tag{2}$$

La formule de $\partial_t h$ s'intègre facilement. En exprimant tout en fonction de C_* on obtient :

$$(\frac{C_{*0}}{C_*})^2 = 1 + 2\frac{C_{*0}}{r_0} t \tag{3}$$

Je fais l'hypothèse que la poche est morte lorsque la vitesse d'expansion devient inférieure à une vitesse seuil C_{*t}. Cette vitesse seuil est atteinte au bout d'un temps t_l donné par :

$$(\frac{C_{*0}}{C_{*t}})^2 = 1 + 2\frac{C_{*0}}{r_0} t_l$$

ce qui donne :

$$t_l = \frac{r_0}{2C_{*0}}[(\frac{C_{*0}}{C_{*t}})^2 - 1] \tag{4}$$

Application : A chaque instant nous connaisons le rayon r et la vitesse d'expansion C_* de la poche représentative. Nous connaissons donc la durée t_l qu'il lui reste à vivre :

$$t_l = \frac{r}{2C_*}[(\frac{C_*}{C_{*t}})^2 - 1]$$

Supposant un régime permanent ($D-A$, r et C_* constants), le nombre de poches qui meurent dans l'intervalle [t, t+δt] est égal au nombre de poches inactives ayant un age compris entre t_l-δt et t_l, doit $(D - A)\frac{\delta t}{t_l}$. En prenant $\tau = t_l$ nous retrouvons le terme de mortalité de l'équation 1.

0.2.3 Paramétrisation de α (effet du cisaillement

A FAIRE!!!

0.3 Stochastic trigger

- Analysis of LES (Large Eddy Simulation" of 10 July 2006 case over Niamey :
  1. PDF of cumulus sizes is exponential.

2. deep convection triggers when there are large cumulus.

- Trigger = "largest cumulus size exceeds a given threshold"
- From PDF of Cu size $\longrightarrow$ PDF of largest cumulus size
- From the thermal model $\longrightarrow$ number of cumulus clouds per unit area
- $\Longrightarrow$ number of cumulo-nimbus per unit area
- $\Longrightarrow$ probability of triggering ; use of a random number generator to implement this probability (no trigger $\Rightarrow$ ALE set to zero).

0.4 Model equations

- A : number of active wakes per unit area
- D : number of wakes per unit area
- σ : fractionnal area covered by wakes
- r : wake radius
- B : birth rate of Cumulonimbus (and of wakes)
- a_0 : initial area of newborn wakes
- C_* : gust front velocity
- τ_{cv} : lifetime of convective plumes
- τ : lifetime of collapsing wakes
- β : fraction of wakes that are active
- α : factor going from zero (colliding wakes merely merge, whithout wake area loss) to 1 (colliding wakes induce a new one that grows while the two others collapse) : should depend on shear. Presently, $\alpha = 1$.

$$\begin{cases} \partial_t A = B - \dfrac{1}{\tau_{cv}}(A - \beta D) \\ \partial_t D = B - \dfrac{D - A}{\tau} - 4\pi r D^2 \partial_t r \\ \partial_t \sigma = B a_0 - \dfrac{\pi r^2}{\tau}(D - A) + 2\pi r D C_* - \alpha 4\pi r D \partial_t r (2\sigma - D a_0) \end{cases}$$

and from $\sigma = \pi r^2 D$: $\partial_t \sigma = 2\pi r D \partial_t r + \pi r^2 \partial_t D$