Paramétrisation de la dynamique de population de poches : formulation cinétique en aires

JYG 1er décembre 2022

Première tentative d'écriture d'un modèle de dynamique de population de poches froides dans une formulation cinétique où la variable d'état des poches est l'aire (notée s) et non le rayon.

0.1 Principes

variables

- grandeur d'intérêt : $f(s,t)$ = densité spatiale de poches ayant une aire s à ds près. f est un nombre de poches par m^2 d'espace et par m^2 d'aire.
- Les poches naissent avec une aire s_0 ; comme elles ne peuvent que grandir, il s'agit de leure aire minimum. Il n'y a pas de limite supérieure à leur taille.
- La densité totale de poches est donnée par :

$$D(t) = \int_{s_0}^{\infty} f(s,t)ds$$

- Les poches actives et inactives ont des densités $f_A(s,t)$ et $f_I(s,t)$ avec :

$$A(t) = \int_{s_0}^{\infty} f_A(s,t)dr \qquad I(t) = \int_{s_0}^{\infty} f_I(s,t)dr$$

Equations générales

Équations de bilan d'un domaine $\Omega_S = [s_1, s_2]$, avec $s_1 \neq s_0$. Ils'agit là d'établir les équations valables dans l'intérieur de $]s_0,\ +\infty[$, à l'exclusion de la frontière. Le cas où Ω_S touche la frontière du domaine relève de la question des conditions à la limite.

$$\begin{aligned} N_A(t) &= \textstyle\int_{s_1}^{s_2} f_A(s,t)ds \\ N_I(t) &= \textstyle\int_{s_1}^{s_2} f_I(s,t)ds \end{aligned} \qquad (1)$$

Pour chacune des populations A et I, on écrit :

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= [\text{disparition}] + \quad [\text{apparition}] + \quad [\text{flux aux frontieres}] \\ \frac{dN_A}{dt} &= (\tfrac{dN_A}{dt})_1 + \qquad (\tfrac{dN_A}{dt})_2 + \qquad (\tfrac{dN_A}{dt})_3 \\ \frac{dN_I}{dt} &= (\tfrac{dN_I}{dt})_1 + \qquad (\tfrac{dN_I}{dt})_2 + \qquad (\tfrac{dN_I}{dt})_3 \end{aligned} \qquad (2)$$

– Disparitions, supposées linéaires en f_A et f_I :

$$\begin{aligned}
(\frac{dN_A(t)}{dt})_1 &= \int_{s_1}^{s_2} -\frac{1}{\tau_A(s,t)} f_A(s,t)ds \\
(\frac{dN_I(t)}{dt})_1 &= \int_{s_1}^{s_2} -\frac{1}{\tau_I(s,t)} f_I(s,t)ds
\end{aligned} \tag{3}$$

– Apparitions, représentées par des termes sources représentant l'effet des rencontres entre poches :

$$\begin{aligned}
(\frac{dN_A(t)}{dt})_2 &= \int_{s_1}^{s_2} S_A(s,t)ds \\
(\frac{dN_I(t)}{dt})_2 &= \int_{s_1}^{s_2} S_I(s,t)ds
\end{aligned} \tag{4}$$

– Flux aux frontières, liés au taux de croissances des poches :

$$\begin{aligned}
(\frac{dN_A(t)}{dt})_3 &= f_A(s_1,t)v_A(s_1,t) \ - \ f_A(s_2,t)v_A(s_2,t) \\
(\frac{dN_I(t)}{dt})_3 &= f_I(s_1,t)v_I(s_1,t) \ - \ f_I(s_2,t)v_I(s_2,t)
\end{aligned} \tag{5}$$

où $v_A(s,t)$ et $v_I(s,t)$ sont les vitesse d'accroissement des aires s des poches actives et inactives à l'instant t. On peut remplacer les differences des seconds membres par des intégrales des dérivées :

$$\begin{aligned}
(\frac{dN_A(t)}{dt})_3 &= \int_{s_1}^{s_2} -\partial_s(f_A(s,t)v_A(s,t))ds \\
(\frac{dN_I(t)}{dt})_3 &= \int_{s_1}^{s_2} -\partial_s(f_I(s,t)v_I(s,t))ds
\end{aligned} \tag{6}$$

où ∂_s désigne la dérivation partielle par rapport à s.

Noter que les vitesses $v_A(s,t)$ et $v_I(s,t)$ sont reliées aux vitesse d'étalement $c_A(s,t)$ et $c_I(s,t)$ par :

$$v_A(s,t) \ = \ 2\sqrt{\pi s} c_A(s,t) \qquad v_I(s,t) \ = \ 2\sqrt{\pi s} c_I(s,t)$$

Au total, on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_{s_1}^{s_2} \partial_t(f_A(s,t))ds + \int_{s_1}^{s_2} \partial_s(f_A(s,t)v_A(s,t))ds &= \int_{s_1}^{s_2} -\frac{1}{\tau_A(s,t)} f_A(s,t)ds + \int_{s_1}^{s_2} S_A(s,t)ds \\
\int_{s_1}^{s_2} \partial_t(f_I(s,t))ds + \int_{s_1}^{s_2} \partial_s(f_I(s,t)v_I(s,t))ds &= \int_{s_1}^{s_2} -\frac{1}{\tau_I(s,t)} f_I(s,t)ds + \int_{s_1}^{s_2} S_I(s,t)ds
\end{aligned} \tag{7}$$

et comme ceci est vrai quels que soient s_1 et s_2, les équation d'évolution sur $]s_0,\ +\infty[$ s'écrivent :

$$\begin{aligned}
\partial_t(f_A(s,t)) \ + \ \partial_s(f_A(s,t)v_A(s,t)) \ &= \ -\frac{1}{\tau_A(s,t)}f_A(s,t) \ + \ S_A(s,t) \\
\partial_t(f_I(s,t)) \ + \ \partial_s(f_I(s,t)v_I(s,t)) \ &= \ -\frac{1}{\tau_I(s,t)}f_I(s,t) \ + \ S_I(s,t)
\end{aligned} \tag{8}$$

0.2 Modèles couplés d'évolution des populations de poches actives et inactives

Disparitions

Les poches disparaissent par deux processus : les rencontres avec d'autres poches et la mort spontanée. La mort des poches libres est représentée par les durées de vie τ'_A et τ'_I.

La disparition par rencontre sont décrites par les "sections efficaces" de collision $\frac{1}{\tilde{\tau}_{AA}}$, $\frac{1}{\tilde{\tau}_{AI}}$, $\frac{1}{\tilde{\tau}_{IA}}$, $\frac{1}{\tilde{\tau}_{II}}$. Les taux de disparition des poches s'écrivent :

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{\tau_A(s,t)} \ &= \ -\int_{s_0}^{+\infty} \frac{1}{\tilde{\tau}_{AA}(s,s_2)} f_A(s_2,t)ds_2 - \int_{s_0}^{+\infty} \frac{1}{\tilde{\tau}_{AI}(s,s_2)} f_I(s_2,t)ds_2 - \frac{1}{\tau'_A(s,t)} \\
-\frac{1}{\tau_I(s,t)} \ &= \ -\int_{s_0}^{+\infty} \frac{1}{\tilde{\tau}_{IA}(s,s_2)} f_A(s_2,t)ds_2 - \int_{s_0}^{+\infty} \frac{1}{\tilde{\tau}_{II}(s,s_2)} f_I(s_2,t)ds_2 - \frac{1}{\tau'_I(s,t)}
\end{aligned} \tag{9}$$

Comme on traite toutes les poches comme identiques, les $\tilde{\tau}$ sont les mêmes (dans cette description les poches sont discernables puisque de rayons différents : il n'y a pas lieu de diviser le taux de collision par deux pour prendre en compte l'indiscernabilité) :

$$\frac{1}{\tilde{\tau}(s_1,s_2)} \ = \ \frac{1}{\tilde{\tau}_{AI}}(s_1,s_2) = \frac{1}{\tilde{\tau}_{IA}}(s_1,s_2) = \frac{1}{\tilde{\tau}_{AA}}(s_1,s_2) = \frac{1}{\tilde{\tau}_{II}}(s_1,s_2) \tag{10}$$

Le temps $\tilde{\tau}$ s'exprime en fonction des rayons des poches et des vitesses d'étalement (voir l'exposé de Pascal su la dynamique de population de goutes ou la note sur le modèle macro de dynamique de population de poches). On passe du rayon r à l'aire s et réciproquement par :

$$s \ = \ \pi r^2 \qquad r = \sqrt{\frac{s}{\pi}}$$

Si on fait l'hypothèse diluée et si on suppose que les vitesses d'étalement sont uniquement fonction de l'aire ($c_A(s,t) \ = \ c_I(s,t) \ = \ G(s)$), alors $\tilde{\tau}$ est donné par :

$$\frac{1}{\tilde{\tau}(s_1,s_2)} = 2(\sqrt{\pi s_1} + \sqrt{\pi s_2})(G(s_1) + G(s_2)) \tag{11}$$

En particulier, pour une vitesse d'étalement uniforme (et égale à C_*) $G(s)$ s'écrit :

$$G(s) \ = \ C_*$$

Les équations (9) s'écrivent maintenant :

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{\tau_A(s,t)} &= -\int_{s_0}^{+\infty} \frac{1}{\tilde{\tau}(s,s_2)}(f_A(s_2,t)+f_I(s_2,t))ds_2 - \frac{1}{\tau'_A(s,t)} \\
-\frac{1}{\tau_I(s,t)} &= -\int_{s_0}^{+\infty} \frac{1}{\tilde{\tau}(s,s_2)}(f_A(s_2,t)+f_I(s_2,t))ds_2 - \frac{1}{\tau'_I(s,t)}
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Sources

Les poches actives ont pour source les rencontres entre poches et les naissances de poches (liées aux naissances de cumulonimbus et aux collisions entre poches inactives). Les naissances se font toutes avec une aire s_0 ; elles interviennent dans la condition à la limite en s_0. Dans cette partie on ne considère que les sources internes au domaine.

Source de poches actives. On désigne par $W_{AA}(s|s_1,s_2)$ la probabilité que la rencontre d'une poche d'aire s_1 avec une poche d'aire s_2 mène à une poche d'aire s (avec des définitions analogues pour W_{AI} et pour W_{IA}). Alors, la source $S_A(s,t)$ s'ecrit :

$$
\begin{aligned}
S_A(s,t) = & \int\int W_{AA}(s|s_1,s_2)\frac{1}{\tilde{\tau}(s_1,s_2)}f_A(s_1,t)f_A(s_2,t)ds_1ds_2 \\
& + \int\int W_{AI}(s|s_1,s_2)\frac{1}{\tilde{\tau}(s_1,s_2)}f_A(s_1,t)f_I(s_2,t)ds_1ds_2 \\
& + \int\int W_{IA}(s|s_1,s_2)\frac{1}{\tilde{\tau}(s_1,s_2)}f_I(s_1,t)f_A(s_2,t)ds_1ds_2
\end{aligned}
\tag{13}
$$

où les probabilités W sont données par :

$$
\begin{aligned}
W_{AA}(s|s_1,s_2) &= \delta(s-(s_1+s_2)) \\
W_{AI}(s|s_1,s_2) &= \delta(s-(s_1+s_2)) \\
W_{IA}(s|s_1,s_2) &= \delta(s-(s_1+s_2))
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Comme $W_{AA} = W_{AI} = W_{IA}$ et comme les W et $\tilde{\tau}$ sont symétriques en s_1 et s_2, la source de poches actives s'écrit aussi :

$$
S_A(s,t) = \int\int W_{AA}(s|s_1,s_2)\frac{1}{\tilde{\tau}(s_1,s_2)}(f_A(s_1,t)f_A(s_2,t) + 2f_A(s_1,t)f_I(s_2,t))ds_1ds_2
\tag{15}
$$

En tenant compte de l'expression de W_{AA}, on peut intégrer explicitement sur s_2 :

$$
S_A(s,t) = \int_{s_0}^{s-s_0} \frac{1}{\tilde{\tau}(s_1,s-s_1)}(f_A(s_1,t)f_A(s-s_1,t) + 2f_A(s_1,t)f_I(s-s_1,t))ds_1
\tag{16}
$$

Source de poches inactives. Les poches inactives ont pour source les morts des poches actives :

$$
S_I(s,t) = \frac{1}{\tau'_A(s,t)}f_A(s,t)
\tag{17}
$$

Flux aux frontières

Le debit d'apparition de poches en s_0 est la somme de deux termes : le taux de naissance de cumulonimbus issus des thermiques $B(t)$ (chaque nouveau cumulonimbus étant supposé donner une nouvelle poches d'aire s_0) et le taux de naissance de cumulonimbus issus des collisions de poches inactives. Ce débit d'apparition en s_0 se transforme en un flux de poches actives croissant à partir de s_0 :

$$G(s_0)f_A(s_0) \;=\; B(t) \;+\; \int\int \frac{1}{\tilde{\tau}(s_1, s_2)} f_I(s_1,t)f_I(s_2,t)ds_1ds_2 \tag{18}$$

En revanche, le flux de poches inactives en s_0 est nul :

$$G(s_0)f_I(s_0) \;=\; 0 \tag{19}$$

Équations d'évolution sur $]s_0, \; +\infty[$

En regroupant tous les termes on obtient le système d'équations :

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_t(f_A(s,t)) \;+\; \partial_s(f_A(s,t)G(s)) \\ \quad = \quad -[\displaystyle\int_{s_0}^{+\infty} \frac{1}{\tilde{\tau}(s,s_2)}(f_A(s_2,t)+f_I(s_2,t))ds_2 + \frac{1}{\tau'_A(s,t)}]f_A(s,t) \\ \qquad\quad + \displaystyle\int_{s_0}^{s-s_0} \frac{1}{\tilde{\tau}(s_1, s-s_1)}(f_A(s_1,t)f_A(s-s_1,t) \;+\; 2f_A(s_1,t)f_I(s-s_1,t))ds_1 \\ \partial_t(f_I(s,t)) \;+\; \partial_s(f_I(s,t)G(s)) \\ \quad = \quad -[\displaystyle\int_{s_0}^{+\infty} \frac{1}{\tilde{\tau}(s,s_2)}(f_A(s_2,t)+f_I(s_2,t))ds_2 + \frac{1}{\tau'_I(s,t)}]f_I(s,t) \\ \qquad\quad + \displaystyle\frac{1}{\tau'_A(s,t)} f_A(s,t) \end{array}\right. \tag{20}$$

avec les conditions aux limites :

$$\left\{\begin{array}{lcl} G(s_0)f_A(s_0) & = & B(t) \;+\; \displaystyle\int\int \frac{1}{\tilde{\tau}(s_1,s_2)} f_I(s_1,t)f_I(s_2,t)ds_1ds_2 \\ G(s_0)f_I(s_0) & = & 0 \end{array}\right. \tag{21}$$

0.3 Et maintenant

Il reste à préciser des paramétrisations pour τ'_A et pour τ'_I.

Et je ne sais pas quoi faire de ces équations. Stéphane dit qu'on devrait pouvoir retrouver le modèle macro en faisant les approximations judicieusement. J'avoue être complétement perdu.

mais ça va certainement venir ...