

EXPOSÉ ET MISE AU POINT BIBLIOGRAPHIQUE

CAUSALITÉ ET RELATIONS DE KRAMERS-KRONIG ⁽¹⁾

Par N. G. VAN KAMPEN,

Institut de Physique théorique de l'Université d'Utrecht.

traduit par FRANÇOIS LURÇAT

Institut de Physique de la Faculté des Sciences de Lille.

Résumé. — A l'aide d'exemples empruntés à diverses branches de la physique (élasticité, théorie des oscillations, optique, etc.) l'auteur montre que les *relations de Kramers-Kronig* (relations entre les parties réelle et imaginaire de l'indice de réfraction, ou d'une grandeur analogue) sont une conséquence du *principe de causalité*, selon lequel l'effet ne peut se produire avant la cause. Il montre ensuite comment ce principe peut être appliqué à la microphysique et donne des relations entre les parties réelle et imaginaire des éléments de la matrice S. Il discute la diffusion d'un champ électromagnétique classique et celle de particules de Schrödinger, puis il indique comment ces résultats peuvent être étendus au cas de la diffusion de champs quantifiés.

Abstract — Taking examples in various fields of physics (elasticity, theory of oscillations, optics,...) the author shows that the *Kramers-Kronig relations* between real and imaginary parts of the index of refraction (or analogous quantity) are a consequence of the *principle of causality*, i. e. the principle that the effect cannot take place before the cause. He then shows how this principle can be applied to microscopic physics, giving relations between the real and imaginary parts of the elements of the S matrix. The scattering of (classical) electromagnetic field and of Schrödinger particles are discussed, and the principle of generalization to the scattering of quantum fields is given.

1. **Introduction.** — Quand la lumière se propage dans un milieu, il y a *dispersion* : l'indice de réfraction n varie avec la fréquence ω de la lumière. Une formule qui exprime n en fonction de ω s'appelle une *formule de dispersion*. En 1872 Sellmeier [1] écrivit la formule de dispersion suivante, à partir de l'hypothèse que l'influence du milieu peut être attribuée à différentes sortes de particules élastiquement liées :

$$n(\omega) - 1 = \sum_r \frac{a_r}{\omega_r^2 - \omega^2}.$$

Les ω_r sont les fréquences propres des particules qui entrent en résonance. Au voisinage des fréquences de résonance, cette formule de dispersion n'est plus une bonne approximation. Chaque constante a_r est égale au coefficient d'absorption totale dans la raie de résonance correspondante. Pour les rayons X, les résonances sont trop serrées pour qu'on puisse les considérer séparément ; c'est pourquoi vers 1927 Kramers et Kronig [2] proposèrent presque simultanément de remplacer la formule de Sellmeier par :

$$n(\omega) - 1 = \int_0^\infty \frac{a(\omega_r)}{\omega_r^2 - \omega^2} d\omega_r. \quad (1)$$

L'indice de réfraction est donc déterminé dès que la fonction $a(\omega_r)$, c'est-à-dire l'absorption en fonction de la fréquence, est connue. Pour que l'intégrale dans (1)

⁽¹⁾ Article paru dans *Nederlands Tijdschrift voor Natuurkunde*, 1958, 24, 1-14 et 29-42.

ait un sens, on convient de prendre pour la singularité ω la *valeur principale* ⁽²⁾.

Plus tard il apparut que la relation de Kramers et Kronig (1) est vraie dans des conditions beaucoup plus générales que ce qui précède ne le laisse supposer. Elle est entièrement indépendante de tout modèle particulier pour l'interaction de la lumière avec le milieu, et peut s'obtenir d'un point de vue général de la façon suivante. Supposons qu'un court train d'ondes lumineuses tombe sur un milieu. Pour étudier la propagation à l'intérieur de ce milieu, on doit se représenter le train d'ondes comme formé d'ondes monochromatiques (composantes de Fourier) ; chaque onde monochromatique individuelle, de fréquence ω , se propage avec sa propre vitesse $c/n(\omega)$, et subit un certain affaiblissement, caractérisé par un coefficient d'absorption $a(\omega)$. Ceci modifiera notablement la forme du train d'ondes ; en général il s'étalera quelque peu. Les détails de cette déformation dépendent de la forme précise des fonctions $n(\omega)$ et $a(\omega)$ (donc de la structure du milieu en question), mais il y a une condition à laquelle ils doivent nécessairement satisfaire : *le front ne peut se déplacer avec une vitesse supérieure à c*. On peut alors montrer de façon purement mathématique qu'il est nécessaire et suffisant que la relation (1) soit

⁽²⁾ C'est-à-dire que l'on enlève d'abord du domaine d'intégration un intervalle $(\omega - \varepsilon, \omega + \varepsilon)$ *symétrique* par rapport à ω , et qu'après intégration on passe à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$.

vérifiée, pour que cette « condition de causalité » soit satisfaite.

Une condition de causalité analogue existe pour toutes sortes de systèmes physiques. Une formulation générale et peu précise est : *l'effet ne peut se produire avant la cause*. Pour chaque application, cette formulation doit naturellement être précisée. Ces dernières années, ces conditions, et les relations de Kramers-Kronig qui s'en déduisent, se sont avérées utiles dans des domaines très différents mais surtout pour l'analyse de l'interaction entre les nucléons et les mésons π ⁽³⁾. Comme dans ce dernier cas on peut à peine reconnaître les idées parmi les calculs compliqués, je montrerai ici sur des exemples simples comment on parvient aux relations de Kramers et Kronig. Au paragraphe 2, à l'aide d'un exemple tiré de la théorie de l'élasticité, on montrera le lien mathématique entre la causalité et relations de Kramers et Kronig. Au paragraphe 3 on énumérera un certain nombre d'applications et d'extensions à d'autres domaines. Le paragraphe 4 est consacré à la propagation de la lumière dans un milieu, berceau des relations de Kramers et Kronig. Les résultats seront utilisés au paragraphe 5 pour obtenir des renseignements sur la diffusion de la lumière par les centres diffuseurs individuels du milieu diffusant. Au paragraphe 6 on étudiera cette diffusion individuelle à l'aide d'une autre méthode, qui au paragraphe 7 sera appliquée à la diffusion des particules par les noyaux. Au paragraphe 8 on étudiera, de façon quelque peu sommaire, la formulation de la condition de causalité en théorie des champs, et son application à la physique des mésons.

2. Exemple tiré de la théorie de l'élasticité. — Supposons qu'un barreau, sous l'action d'une force appliquée $X(t)$, subisse un allongement $x(t)$. Supposons en outre qu'il se produise une hystérésis élastique, c'est-à-dire que $x(t)$ dépende non seulement de $X(t)$ mais encore de « l'histoire antérieure » donc des valeurs $X(t')$ de la force aux instants antérieurs ($t' < t$). Dans le cas de petits allongements, cette relation est encore linéaire, en sorte qu'elle est de la forme [3]

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-t') X(t') dt' = \int_{-\infty}^{\infty} G(\tau) X(t-\tau) d\tau. \quad (2)$$

On a naturellement

$$G(\tau) = 0 \quad \text{pour } \tau < 0. \quad (3)$$

C'est dans ce cas particulier la condition de causalité est due, non pas tant à la simplicité de l'exemple choisi, mais au fait que la cause $X(t)$ et l'effet $x(t)$ sont exprimés en fonction du temps. En général cependant il sera préférable de décrire les phénomènes à l'aide des fréquences, car la relation entre x et X sera plus simple.

C'est-à-dire qu'au lieu de $G(t)$, $X(t)$, $x(t)$ on intro-

⁽³⁾ Dans ce domaine on parle habituellement de « relation de dispersion », ce qui crée souvent une confusion avec la notion définie ci-dessus de « formule de dispersion ». Ici j'utilise toujours les mots « relations de Kramers et Kronig ».

duira leurs transformées de Fourier $\widehat{G}(\omega)$, $\widehat{X}(\omega)$, $\widehat{x}(\omega)$ définies par exemple par :

$$\widehat{G}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t) e^{i\omega t} dt. \quad (4)$$

On obtient alors au lieu de l'« équation de mouvement » (2)

$$\widehat{x}(\omega) = \widehat{G}(\omega) \widehat{X}(\omega). \quad (5)$$

La fonction complexe $\widehat{G}(\omega)$ décrit les propriétés élastiques de la tige, de la manière suivante : si on applique à la tige une force périodique de fréquence ω , il s'établit une oscillation, dont l'amplitude est donnée par $|\widehat{G}(\omega)|$ et la différence de phase par rapport à la force, par l'argument de $\widehat{G}(\omega)$. Le travail produit par

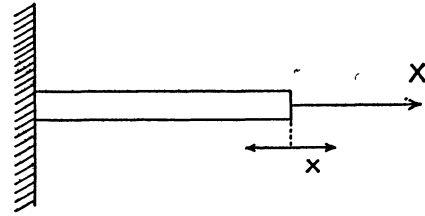


FIG. 1. — Tige viscoélastique.

la force dans l'unité de temps est égal au carré de l'amplitude de la force, multiplié par un « coefficient d'absorption »,

$$\omega \text{Im}[\widehat{G}(\omega)]. \quad (6)$$

Im désigne la partie imaginaire. La partie réelle $\text{Re}[\widehat{G}(\omega)]$ n'a en général pas de signification directe ; mais lorsque l'énergie absorbée, et par conséquent la différence de phase, sont faibles, on a

$$\text{Re}[\widehat{G}(\omega)] \sim |\widehat{G}(\omega)|$$

donc la partie réelle mesure l'élasticité (à la fréquence ω).

La transformation de Fourier a sans doute permis de mettre l'équation de mouvement sous la forme simple (5), mais la condition de causalité ne peut plus s'écrire aussi simplement que (3). Comment peut-on exprimer, à l'aide de $\widehat{G}(\omega)$, que $G(t)$ n'est pas une fonction quelconque dans l'intervalle $(-\infty + \infty)$ mais qu'elle doit vérifier la condition (3) ? Il y a là une question purement mathématique, à laquelle répond le théorème 95 du livre de Titchmarsh sur les intégrales de Fourier [4]. Avant de formuler exactement ce théorème, donnons d'abord une démonstration sommaire :

La première étape de la démonstration consiste à remplacer dans (4) la variable réelle ω par un nombre complexe $w = u + iv$. Cela est sûrement légitime pour $v > 0$, car alors l'intégrand est multiplié par le facteur $\exp(-vt)$, ce qui ne peut qu'améliorer la convergence de l'intégrale pour $t \rightarrow +\infty$. Évidemment pour $t \rightarrow -\infty$ ce facteur serait en général désastreux, mais grâce à (3) il ne fera pas de tort. On peut donc en posant

$$\widehat{G}(w) = \int_0^{\infty} G(t) e^{iwt} dt \quad (7)$$

étendre la définition de \widehat{G} à la moitié supérieure du

plan complexe. Comme (7) converge uniformément, elle définit une fonction analytique sans singularités (« holomorphe »). Donc : *par suite de la condition de causalité* (3), $\widehat{G}(\omega)$ possède un prolongement holomorphe dans la moitié supérieur du plan complexe. En outre, on peut voir facilement que (7) tend vers zéro lorsque $v \rightarrow \infty$.

Comme deuxième étape nous choisissons un chemin d'intégration fermé, comprenant l'intervalle $(-R, +R)$ sur l'axe réel et un demi-cercle de rayon R dans le demi-plan complexe supérieur. La théorie de Cauchy donne pour tout point ω situé à l'intérieur du contour :

$$\widehat{G}(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-R}^{+R} \frac{\widehat{G}(\omega)}{\omega - \omega} d\omega + \frac{1}{2\pi i} \int_{(\text{demi-cercle})}$$

si on passe à la limite $R \rightarrow \infty$, le second terme s'annule, et l'on obtient

$$\widehat{G}(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\widehat{G}(\omega)}{\omega - \omega} d\omega. \tag{8}$$

Réciproquement cette formule implique que $\widehat{G}(\omega)$

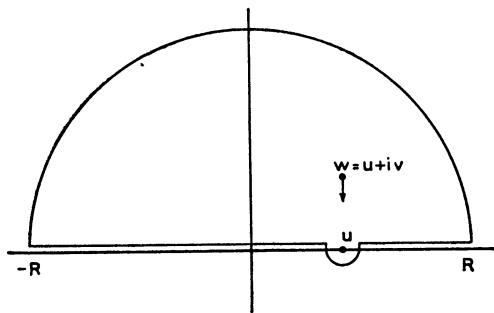


FIG. 2. — Le plan complexe ω .

est holomorphe dans le demi-plan supérieur et nulle à l'infini.

Comme troisième étape nous mettrons (8) sous une forme utilisable pratiquement. Pour cela faisons tendre $\omega = u + iv$ vers une valeur réelle, c'est-à-dire $v \rightarrow +0$. L'intégrand acquiert alors une singularité pour $\omega = u$, et le chemin d'intégration doit passer en dessous de ce point. On obtient donc la moitié du résidu en ce point, plus l'intégrale sur le reste de l'axe réel qui est une valeur principale. Le résultat est :

$$\widehat{G}(u) = \frac{1}{2\pi i} \pi i \widehat{G}(u) + \frac{1}{2\pi i} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\widehat{G}(\omega)}{\omega - u} d\omega,$$

où P signifie que pour la singularité il faut prendre la valeur principale. En séparant les parties réelles et imaginaires, on obtient

$$Re[\widehat{G}(u)] = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Im[\widehat{G}(\omega)]}{\omega - u} d\omega \tag{9a}$$

$$Im[\widehat{G}(u)] = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Re[\widehat{G}(\omega)]}{\omega - u} d\omega. \tag{9b}$$

Ces relations ne concernent que les valeurs prises par \widehat{G} sur l'axe réel, et relient par conséquent des grandeurs physiquement mesurables. D'après notre démonstration, elles constituent des conditions nécessaires pour qu'il existe un prolongement holomorphe

de $\widehat{G}(\omega)$, qui satisfasse à (8). Réciproquement, on peut montrer que chacune des relations (9a), (9b) est aussi une condition suffisante.

Le résultat peut être résumé dans le :

THÉORÈME PRINCIPAL. — Les quatre énoncés suivants relatifs à une fonction $\widehat{G}(\omega)$ sont des formulations de la même propriété :

- (i) La transformée de Fourier de $\widehat{G}(\omega)$ vérifie (3).
- (ii) $\widehat{G}(\omega)$ possède un prolongement holomorphe dans la moitié supérieure du plan complexe, qui vérifie (8).
- (iii) Les parties réelle et imaginaire de $\widehat{G}(\omega)$ sont liées par (9a).
- (iv) Les parties réelle et imaginaire sont liées par (9b).

La moitié supérieure du plan complexe de la variable ω sera par la suite notée I_+ .

La relation (9) est appelée transformation de Hilbert: les fonctions $Re[\widehat{G}(\omega)]$ et $Im[\widehat{G}(\omega)]$ sont chacune la transformée de Hilbert de l'autre. On appelle aussi (9) formules de Plemelj [5]. En physique on les nomme relations de Kramers-Kronig. On utilise en particulier (9a) sous la forme :

$$Re[\widehat{G}(u)] = \frac{2}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\omega Im[\widehat{G}(\omega)]}{\omega^2 - u^2} d\omega \tag{10}$$

(qui résulte de (9a) parce que $\widehat{G}(-\omega) = \widehat{G}(\omega)$). Cette relation exprime l'élasticité en fonction du coefficient d'absorption (6). Pour les applications pratiques c'est (10) qui est utile, mais en théorie, il vaut mieux utiliser (9).

Nous n'avons jusqu'ici — comme c'est l'usage en physique — prêté aucune attention aux propriétés mathématiques que doit posséder la fonction $G(t)$, et en particulier à son comportement pour $t \rightarrow \infty$. Pour que le théorème principal soit valable, il faut que $G(t)$ soit de carré sommable c'est-à-dire que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |G(t)|^2 dt \text{ existe et soit finie.} \tag{11}$$

Ceci garantit l'existence des intégrales utilisées, et des transformées de Fourier [4]. L'étude des exemples suivants (paragraphes 4, 6, 7) montrera que cette condition est souvent physiquement acceptable, car elle exprime le fait que l'énergie totale doit être finie. Dans l'exemple qui précède, cependant, l'intégrale (11) n'a aucune signification physique, et la condition n'est donc pas naturelle. Elle n'est d'ailleurs pas vérifiée dans le cas le plus simple ($x(t) = \text{cste} \times X(t)$). Sans doute il n'est pas difficile de généraliser la démonstration de façon à ce qu'elle comprenne aussi ce cas là ; mais on ne peut pas être sûr de ne pas rencontrer de nouvelles exceptions. La seule solution satisfaisante est d'adapter la démonstration de telle façon qu'on n'impose à $G(t)$ aucune autre condition que celles qui résultent de sa signification physique. Mais pour l'exemple considéré on n'a pas encore réussi à faire cela.

Une autre propriété de la fonction $\widehat{G}(\omega)$ doit encore être mentionnée, car elle est indispensable pour un traitement mathématique rigoureux. Du fait que $\omega \widehat{G}(\omega)$ est holomorphe dans I_+ et que $Im[\omega \widehat{G}(\omega)] \geq 0$ sur l'axe réel (à cause de sa signification physique de coefficient d'absorption), il résulte que $Im[\omega \widehat{G}(\omega)] \geq 0$ dans tout I_+ . $\omega \widehat{G}(\omega)$ appartient donc à la classe des fonctions « quasi-bornées » (et même à celle des fonctions « imaginaires positives »),

dont on connaît beaucoup de propriétés mathématiques [6]. Le fait que l'énergie dissipée soit positive résulte d'autre part de la thermodynamique, donc de la mécanique statistique. Nous rencontrerons d'autres exemples montrant le lien étroit de la causalité avec les considérations statistiques (cf. § 9).

3. Autres applications. — Bien que l'exemple traité au paragraphe 2 soit très élémentaire il contient les traits essentiels que l'on retrouve dans chaque application de la condition de causalité. On peut les formuler ainsi. On donne d'abord une « cause » et un « effet », et la relation entre eux écrite sous forme générale (cf. (2)). La condition de causalité dit alors que cette relation doit être telle que l'effet ne peut être influencé par le comportement de la cause aux temps ultérieurs. Tant que la cause et l'effet sont écrits comme des fonctions de t , la formulation de la condition sera la plupart du temps triviale (pas dans tous les cas cependant) (cf. (3)). Mais lorsqu'on passe aux transformées de Fourier, c'est-à-dire lorsqu'on introduit la fréquence comme variable indépendante, la condition devient moins simple. Elle prend alors la forme d'une proposition relative aux propriétés analytiques de la « réponse » ou « admittance » pour des fréquences complexes. En dernière analyse cette proposition peut être exprimée comme une relation à laquelle doit satisfaire l'admittance pour des fréquences réelles. Cette relation exprime la partie réelle de l'admittance comme une intégrale portant sur la partie imaginaire ou inversement : ce sont les relations de Kramers et Kronig (9), resp. (10). Pour choisir les grandeurs qui seront considérées comme cause et comme effet, et pour écrire la relation générale entre ces grandeurs, il suffit de connaître les propriétés physique du système considéré ; de même que pour choisir la forme de la condition de causalité dans la représentation en fonction du temps. Mais la traduction de cette condition dans la représentation en fonction des fréquences, et la démonstration des relations de Kramers et Kronig sont de pures mathématiques, et sont à leur place dans un traité sur les intégrales de Fourier.

Cette recette est applicable à tout système linéaire qui peut être étudié à l'aide de la notion de fréquence. Un exemple mécanique simple est l'oscillateur amorti auquel on applique la force $X(t)$. L'élongation x vérifie l'équation suivante (masse = 1, fréquence propre ω_r , amortissement γ) :

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_r^2 x = X(t) \quad (12)$$

la méthode habituelle donne la solution :

$$x(t) = \int_{-\infty}^t \frac{\sin \omega_r'(t-t')}{\omega_r'} e^{-\gamma(t-t')} X(t') dt'$$

où $\omega_r' = \sqrt{\omega_r^2 - \gamma^2} \sim \omega_r$. Ceci est la relation (2) avec un $G(t)$ qui peut dans ce cas être donné explicitement. On en déduit (1) :

$$\widehat{G}(\omega) = \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega_r \tau}{\omega_r} e^{-\gamma\tau} e^{i\omega\tau} d\tau = \frac{1}{\omega_r^2 - (\omega + i\gamma)^2} \quad (13)$$

(1) On peut aussi trouver ce résultat plus directement en prenant dans (12) une force périodique $X(t) = A \cos \omega t$ et en cherchant la solution stationnaire correspondante. L'existence de cette méthode plus directe est une des raisons pour lesquelles le langage des fréquences est si

Il est manifeste que $\widehat{G}(\omega)$ est holomorphe dans le demi-plan supérieur, et tend vers 0 à l'infini. On peut aussi vérifier que les relations (9) sont satisfaites. De plus $\widehat{G}(\omega)$ a deux pôles en dessous de l'axe réel, aux points $\pm \omega_r - i\gamma$. Ces pôles expriment l'existence d'une résonance de fréquence ω_r et de largeur à mi-hauteur 2γ . La figure 3 représente la variation de $Re[\widehat{G}(\omega)]$, $Im[\widehat{G}(\omega)]$ et $|\widehat{G}(\omega)|$ au voisinage de ω_r .

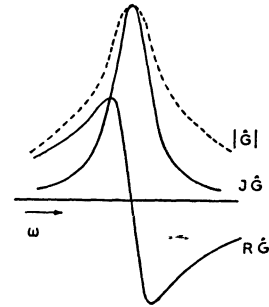


FIG. 3. — L'admittance $\widehat{G}(\omega)$ au voisinage de la résonance.

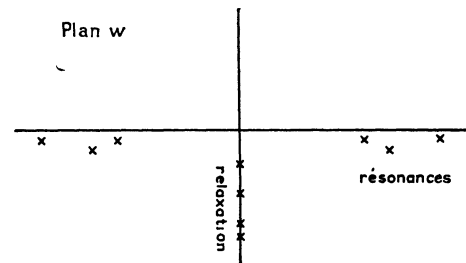


FIG. 4. — Les pôles de la fonction $G(\omega)$.

D'une façon générale, on peut dire que : un pôle de l'admittance en dessous de l'axe réel représente une résonance ; la partie réelle du pôle est (approximativement) la fréquence de résonance, la partie imaginaire est la largeur de la courbe de résonance.

Un autre exemple est fourni par la polarisation diélectrique. Ici le champ électrique appliqué joue le rôle de la force X ; tandis que la polarisation est l'effet. La

constante diélectrique $\varepsilon(\omega)$ (ou plutôt $\frac{\varepsilon(\omega) - 1}{4\pi}$) est

l'admittance $\widehat{G}(\omega)$. Elle doit donc être holomorphe dans le demi-plan complexe supérieur de la variable ω , et les parties réelle et imaginaire doivent vérifier la relation (10) [7]. Un exemple important dans le cas présent est donné par la fonction :

$$\varepsilon(\omega) - 1 = a(1 + i\omega\tau)^{-1}.$$

Elle représente la relaxation diélectrique avec le temps de relaxation τ , comme l'a montré Debye [8]. D'une façon générale : un pôle sur la partie négative de

souvent utilisé, en mécanique classique comme en mécanique quantique. Une autre raison est qu'en pratique les phénomènes rapidement variables se présentent presque toujours sous forme d'oscillations stationnaires.

l'axe imaginaire représente un phénomène de relaxation ; la distance à l'axe réel est l'inverse du temps de relaxation. La fonction citée, appelée fonction de Debye, a à peu près la même allure que les courbes de résonance de la figure 3, sauf que les parties réelle et imaginaire sont inversées.

L'application de la condition de causalité à la *susceptibilité magnétique* ⁽¹⁾ $\chi = \chi' + i\chi''$ est entièrement analogue. La relation de Kramers et Kronig s'écrit alors [9] (les valeurs de Kramers et Kronig contenant toujours une valeur principale, nous omettons désormais le signe P) :

$$\chi'(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\omega' \chi''(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' + \chi(\infty).$$

On a ajouté la constante $\chi(\infty)$ car χ n'est pas nécessairement nulle pour les hautes fréquences ω . Il peut y avoir des phénomènes de résonance et de relaxation [10]. Pour concrétiser les relations de Kramers et Kronig, on peut faire apparaître les courbes représentant χ' et χ'' directement sur un oscillographe [11]. D'ailleurs, dans ces applications on n'utilise pas toujours les relations sous forme explicite, mais on les sous-entend dans la mesure ou on n'admet pour $\chi' + i\chi''$ que des fonctions analytiques de ω qui soient holomorphes dans I_+ .

On obtient une généralisation des relations de Kramers et Kronig en considérant un corps élastique auquel sont appliquées n forces X_1, X_2, \dots, X_n . Soient x_1, x_2, \dots, x_n les déplacements des points d'application : l'admittance sera une matrice $n \times n$, $\widehat{G}_{\alpha\beta}(\omega)$, qui vérifie les relations de Kramers et Kronig ⁽²⁾. Les relations de Kramers et Kronig pour des fonctions matricielles interviennent souvent aussi dans d'autres cas ; en outre, on peut tenir compte des effets thermiques en ajoutant des variables X_0 (température) et x_0 (qualité de chaleur fournie) [12].

Un cas important est celui des *réseaux électriques* [13]. La tension appliquée à un « dipôle » est considérée comme la cause, le courant comme l'effet. L'admittance $1/Z(\omega)$ possède donc les propriétés qui ont été démontrées plus haut pour $\widehat{G}(\omega)$. On peut démontrer des propriétés analogues pour les quadripôles et les réseaux plus compliqués (pour lesquels l'admittance est une matrice). Ces propriétés analytiques de la matrice admittance ont d'ailleurs été déjà démontrées d'une autre façon, en particulier par Foster [14] ⁽³⁾.

⁽¹⁾ Pour être en accord avec la mécanique quantique nous avons pris pour facteur de temps $\exp(-i\omega t)$ et non $\exp(i\omega t)$. C'est pourquoi nos définitions des qualités complexes ϵ et χ s'écartent des définitions usuelles $\epsilon = \epsilon' - i\epsilon''$, resp $\chi = \chi' - i\chi''$. Il en résulte aussi que les moitiés supérieure et inférieure du plan complexe sont interverties ; mais les relations de Kramers et Kronig ne sont pas modifiées (puisque elles ne contiennent que des grandeurs réelles).

⁽²⁾ Et qui de plus est symétrique par suite des relations d'Onsager.

⁽³⁾ La démonstration de celui-ci repose sur le fait que tout réseau peut être décomposé en éléments d'ont l'impédance est de la forme $R - i\omega L - 1/i\omega C$. La propriété de la partie imaginaire mentionnée à la fin du précédent paragraphe joue ici un rôle indispensable. On admet généralement aussi la possibilité d'éléments sans résistance ohmique (ou plutôt de résistance négligeable). Dans ce cas, certains pôles, qui autrement se trouveraient en dessous de l'axe réel, peuvent être situés sur cet axe.

La raison pour laquelle on étudie ces propriétés générales de l'admittance en théorie des réseaux est qu'elles permettent de répondre à la question : quelles sont les fonctions admittances, données *a priori*, qui peuvent être réalisées à l'aide d'éléments convenablement choisis ?

Considérons maintenant un exemple élémentaire : la diffraction de la lumière par un *réseau*. Supposons que tombe sur le réseau une courte impulsion lumineuse, c'est-à-dire une superposition d'ondes planes avec des amplitudes et des phases telles qu'elles forment un « paquet d'ondes » limité dans l'espace, par exemple une fonction δ . Le spectroscopiste qui observe sous un angle θ reçoit une seule composante de Fourier, donc une onde sinusoidale, qui est par définition infinie. Ceci est manifestement en contradiction flagrante avec la causalité.

Pour résoudre ce paradoxe, il faut remarquer que la lumière reçue dans la direction θ n'est pas strictement monochromatique, mais occupe une bande de fréquences de largeur $\Delta\nu = c(B \sin \theta)^{-1}$ où B est la largeur du réseau [15]. Le paquet d'ondes émis dans cette direction n'a donc pas de raison d'être infiniment long ; on peut voir facilement que sa longueur n'est pas inférieure à $B \sin \theta$. Mais un tel élargissement d'un paquet d'ondes incident en fonction δ n'a rien de

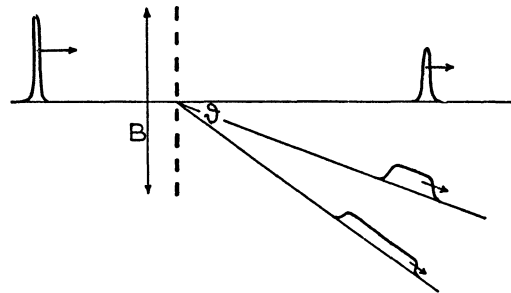


FIG. 5. — L'étalement d'un paquet d'ondes à la traversée d'un réseau.

paradoxal ; sa longueur est précisément la différence des chemins parcourus par la lumière qui atteint l'œil via le trait supérieur du réseau, et par celle qui est passée par le trait inférieur. D'une façon générale on peut voir ainsi que dans un interféromètre de pouvoir de résolution $\Delta\nu$ il doit y avoir une différence de marche d'au moins $c/\Delta\nu$. On peut comparer ce résultat à la relation d'incertitude de la mécanique quantique.

4. Propagation de la lumière dans un milieu. — Considérons une plaque formée d'un milieu diélectrique d'épaisseur D . Un paquet d'ondes électromagnétiques arrive de la gauche et tombe sur la plaque sous incidence normale. Chaque composante de Fourier subit en traversant le milieu un affaiblissement dû à l'absorption, et un déphasage correspondant au chemin optique parcouru dans le milieu. Par suite, l'amplitude de chaque onde monochromatique sera, après son passage dans la matière, multipliée par les facteurs $\exp(-\alpha D/2)$ et $\exp(i\omega n D/c)$, où $\alpha(\omega)$ est le coefficient d'absorption et $n(\omega)$ l'indice de réfraction. Ces

grandeurs peuvent être groupées en un nombre d'ondes complexe

$$\kappa(\omega) = \omega n(\omega)/c + \frac{1}{2} i\alpha(\omega) = \omega N(\omega)/c$$

où $N(\omega) = n(\omega) + i(c/2\omega)\alpha(\omega)$ est l'indice de réfraction complexe usuel. Si on écrit pour le champ électrique incident sur la face gauche de la plaque

$$E_{in}(t) = \int \widehat{E}_{in}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

on a pour le champ sur la face droite

$$\widehat{E}_{out}(\omega) = e^{i\kappa(\omega)D} \widehat{E}_{in}(\omega). \quad (14)$$

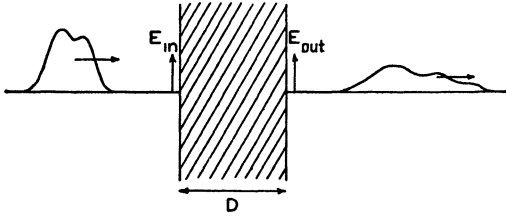


Fig. 6. — Déformation d'un paquet d'ondes au passage dans un milieu.

La condition de causalité exige alors que $\exp(i\kappa(\omega)D)$ possède un prolongement analytique dans I_+ . Ceci conduit à la relation de Kramers et Kronig mentionnée au paragraphe 1 :

$$n'(\omega) - 1 = \frac{c}{\pi} \int_0^\infty \frac{\alpha(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'. \quad (15)$$

La démonstration est la suivante [16]. On doit donc exiger que, si $E_{in}(t) = 0$ pour $t < 0$, $E_{out}(t) = 0$ pour $t < D/c$. Donc : si $\widehat{E}_{in}(\omega)$ est holomorphe dans I_+ ,

$$\widehat{E}_{out}(\omega) \exp(-i\omega D/c)$$

doit l'être également. Donc $\exp\{i\kappa(\omega) - i\omega D/c\}$ doit être holomorphe dans I_+ . Il n'en résulte pas encore que $\kappa(\omega) - \omega/c$ doit être holomorphe, car les zéros de

$$\exp\{i\kappa(\omega) - i\omega D/c\}$$

devraient conduire à des singularités logarithmique de $\kappa(\omega)$. Mais ceci est exclu, car D est arbitraire. De plus $\kappa(\omega) - \omega/c$ elle-même n'est pas nulle à l'infini ; il faut diviser par ω pour obtenir une fonction nulle à l'infini. Pour cette dernière fonction, les formules de Plemelj sont valables, d'où résulte l'équation (15). Il faut encore remarquer que $\int |E_{in}(\omega)|^2 d\omega$ représente l'énergie totale du paquet d'ondes incident, que l'on peut supposer finie ; la théorie de la transformation de Hilbert peut donc s'appliquer ici de façon tout à fait rigoureuse.

La relation obtenue est satisfaite en particulier par les formules de dispersion connues. Lorentz obtenait par sa théorie des électrons [17]

$$N(\omega) - 1 = \sum_r N_r \frac{c^2/m}{\omega_r^2 - \omega^2 - i\gamma\omega_r^2 \omega}, \quad \gamma = \frac{2e^2}{3m^3c^3} \quad (16)$$

(les ω_r sont les différentes fréquences de résonance ;

les N_r sont les nombres d'électrons correspondants). Le premier membre contient l'indice de réfraction complexe $N(\omega)$, en sorte que (16) exprime aussi l'indice de réfraction ordinaire $n(\omega)$ et le coefficient d'absorption $\alpha(\omega)$ en fonction de grandeurs relatives au milieu. On peut vérifier que ces expressions de $n(\omega)$ et $\alpha(\omega)$ vérifient la relation (15), mais il est plus simple de remarquer que (16) est holomorphe dans I_+ et nulle à l'infini, donc que l'on doit bien avoir (15). Il en résulte que dans un tel milieu aucun paquet d'ondes ne peut se propager à une vitesse supérieure à c . Ceci a été vérifié explicitement autrefois par Sommerfeld et Brillouin [18] pour résoudre le paradoxe suivant. Au voisinage de ω_r , l'indice de réfraction n est une fonction décroissante de ω (dispersion anormale), et peut même être inférieur à 1 ; la vitesse de propagation c/n devrait être supérieure à c , en contradiction avec la théorie de la relativité. Un traitement approximatif du problème montre que la plus grande partie du paquet d'ondes se propage en effet avec la vitesse c/n ; mais précisément cette approximation n'est plus valable dans le domaine où $N(\omega)$ est rapidement variable. En même temps il apparut que le front d'un paquet d'ondes, dans un milieu pour lequel est vérifiée la relation (16), ne peut jamais se déplacer à une vitesse supérieure à c , ce qui est évident pour nous aujourd'hui.

Une particularité intéressante est que la théorie de Lorentz ne donne pas en fait un terme d'amortissement $-i\gamma\omega_r^2 \omega$, mais $-i\gamma\omega^3$. Pour toutes les valeurs raisonnables de ω , cela revient au même, mais en toute rigueur il en résulte que chaque dénominateur dans (16) possède un troisième zéro, voisin de $\omega = i/\gamma$, donc dans I_+ . Par suite la propagation de la lumière dans un milieu d'électrons de Lorentz n'est pas strictement causale, mais il apparaît un « précurseur » qui est en avance d'une longueur égale au rayon de l'électron. Heureusement pour Sommerfeld et Brillouin, ils utilisaient la formule approchée (16) !

Un tel pôle acausal apparaît aussi pour un électron de Lorentz libre ; il est lié au fait que l'équation de mouvement de Lorentz possède une solution anormale pour laquelle (indépendamment d'une éventuelle force appliquée) la vitesse de l'électron croît exponentiellement comme $\exp(t/\gamma)$ (solution « auto-accelérée »). Lorentz ne s'inquiétait pas de cela parce qu'il considérait le terme d'amortissement simplement comme une approximation, valable seulement pour $|\omega| \ll 1/\gamma$. Cependant Dirac [20] montra que les mêmes difficultés se produisent dans la théorie relativiste rigoureuse des particules chargées, et qu'elles sont fondamentalement liées à l'électrodynamique de Maxwell-Lorentz. En ce qui concerne la mécanique quantique, on crut longtemps qu'il ne peut y apparaître de telles solutions. Cela parce que l'effet de l'interaction entre la particule et le champ ne peut être calculé qu'en faisant un développement en série de puissances de la charge e ; il est clair qu'ainsi on ne peut trouver une solution où γ figure au dénominateur [21]. Cependant dans un modèle simplifié qui peut être traité exactement, il apparut qu'il existe un analogue quantique de la solution anormale [22]. Pauli trouva alors une anomalie analogue dans le modèle simplifié de Lee pour la théorie mésonique [23] ; on soupçonne que cette anomalie est liée aux difficultés fondamentales de la théorie des champs et c'est pourquoi les « solutions fantômes » correspondantes sont venues au centre de l'intérêt. Il est remarquable que Delsarte avait trouvé des solutions anormales de ce genre dans un cas très élémentaire, celui du calcul du champ électromagnétique dans deux milieux contigus qui possèdent des constantes diélectriques et des perméabilités différentes, mais indépendantes de ω [24].

La formule de dispersion de Sellmeier peut s'obtenir à partir de (16) comme approximation, en négligeant le terme d'amortissement au dénominateur. Mais alors les pôles qui se trouvaient dans la moitié inférieure du plan complexe viennent sur l'axe réel, et par suite la formule de Sellmeier ne vérifie pas les relations de Kramers et Kronig (15) (bien qu'elle ait amené à la découverte de ces relations (1)). La formule de dispersion quantique de Kramers-Heisenberg ne vérifie pas non plus (15), parce qu'elle est également en défaut dans les régions de résonance. Mais si on introduit — avec Weisskopf et Wigner — des termes d'amortissement convenables dans les dénominateurs de résonance, alors (15) est satisfaite [25, 26].

Le mouvement des électrons dans un cristal peut être traité d'une façon analogue. Si une onde électronique « monochromatique » d'énergie E tombe normalement sur le cristal, elle se propage à l'intérieur du cristal comme une onde de Bloch $u_k(x) \exp \{ ikx - iE(k)t \}$, où k est un paramètre et $u_k(x)$ une fonction périodique de même période que le réseau. La fonction $E(k)$, dont la forme exacte est déterminée par les propriétés du cristal, à l'allure générale indiquée par la figure 7 [27]. La relation

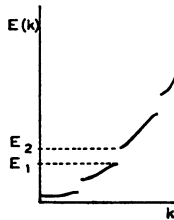


FIG. 7. — La formule de dispersion pour les électrons dans un réseau.

entre l'onde incidente et l'onde qui sort par l'autre face du milieu sera donnée, exactement comme dans (14), par le facteur $\exp (ik(E) D)$. La causalité laisse prévoir que $k(E)$ possède un prolongement holomorphe dans la moitié supérieure du plan E . A première vue cela semble impossible : la fonction $k(E)$ est formée de branches séparées par des bandes interdites telles que (E_1, E_2) . Mais une étude approfondie montre qu'on a bien le résultat voulu ; dans les bandes interdites k est imaginaire pur, et ces valeurs imaginaires, avec les valeurs réelles indiquées sur la figure 7 forment une fonction que l'on peut prolonger. Cette fonction est holomorphe dans I_+ et possède des points de branchement en E_1, E_2 , etc... Ceci peut être démontré mathématiquement à partir des propriétés de l'équation de Schrödinger pour les électrons dans un potentiel périodique. Dans ce cas la condition de causalité ne nous apprend rien de nouveau, car nous disposons grâce à l'équation de Schrödinger d'une description beaucoup plus détaillée.

5. Processus individuels de diffusion. — On sait que l'indice de réfraction n et le coefficient d'absorption α d'un milieu s'expliquent par la diffusion multiple de la lumière par un grand nombre de centres diffuseurs

(1) En même temps que Kramers et Kronig, Kallman et Marc (*Ann. Phys.*, 1927, **82**, 585) écrivirent aussi une formule de dispersion pour le cas où les fréquences de résonance sont réparties de façon continue. Ils portaient également de (16) mais ne négligeaient pas le terme d'amortissement au dénominateur. C'est pourquoi ils ne trouvaient pas les relations de Kramers et Kronig.

individuels contenus dans ce milieu. C'est pourquoi la relation (15) peut aussi être interprétée comme une propriété de ces processus de diffusion individuelle. C'est ce point de vue que nous allons développer. La diffusion par un centre diffuseur donné (que nous appellerons dans la suite « noyau ») peut être décrite comme suit. L'onde incidente (dans la direction z) sera représentée, en mettant à part le facteur de temps $\exp (-i\omega t)$, par $\exp (ikz)$, où $k = \omega/c$. L'onde diffusée est, du moins à grande distance, une onde sphérique sortante $(1/r) \exp (ikr)$, avec une amplitude f qui dépend de la direction. L'onde est donc asymptotiquement

$$e^{ikz} + \frac{e^{ikr}}{r} f(\omega, \theta). \tag{17}$$

L'« amplitude de diffusion » $f(\omega, \theta)$ ainsi définie est une fonction de k , et de l'angle θ avec la direction de l'onde incidente. Le module de f est une mesure (1) de l'intensité de l'onde diffusée, et l'argument de f est le déphasage dû à la diffusion [28].

La relation entre l'amplitude de diffusion f et les propriétés de l'onde diffusée n'est toutefois valable que pour $\theta \neq 0$; dans la direction en avant, $\theta = 0$, l'interprétation physique de la grandeur complexe f est radicalement différente. En effet, dans cette direction l'interférence entre les deux termes de (17) devient importante, en sorte qu'une séparation entre ondes incidente et diffusée n'a plus de sens. On constate que précisément l'amplitude de diffusion en avant $f(k, 0)$ est liée aux grandeurs $n(\omega)$ et $\alpha(\omega)$ qui expriment les propriétés macroscopiques du milieu ; on a

$$\alpha = N \frac{4\pi}{k} \text{Im}[f(k, 0)]; \quad n - 1 = N \frac{2\pi}{k^2} \text{Re}[f(k, 0)] \tag{18}$$

N est le nombre de « noyaux » par unité de volume du milieu.

Pour donner une brève démonstration de (18), considérons la situation représentée par la figure 8 : une onde

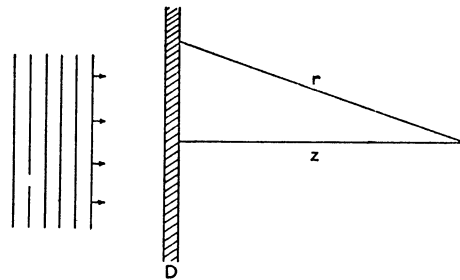


FIG. 8. — Démonstration du théorème optique.

plane monochromatique $\exp (ikz)$ tombe normalement sur une couche de matière d'épaisseur très faible D . L'état de l'onde en un point situé à la distance z après la couche est donné par :

$$e^{ikz} e^{i(N-1)kD} = e^{ikz} \{ 1 + i(N-1)kD \}.$$

D'autre part il résulte de la superposition de l'onde incidente et de toutes les ondes diffusées individuelles ; comme

(1) En effet, il est lié à la section efficace différentielle par la relation $d\sigma/d\Omega = |f|^2$.

il y a ND centres diffuseurs par unité de surface, cela donne

$$e^{ikz} + \int r^{-1} e^{ikr} f(k, \theta) ND d\theta \\ = e^{ikz} + 2\pi ND \int_z^\infty e^{ikr} f[k, \arccos(z/r)] dr.$$

Comme $kz \gg 1$, le facteur $f[\]$ varie beaucoup plus lentement que $\exp(ikr)$ donc on peut poser (méthode de la phase stationnaire).

$$e^{ikz} + 2\pi ND f(k, 0) \int_z^\infty e^{ikr} \\ = e^{ikr} [1 + 2\pi ND f(k, 0) (-ik)^{-1}]. \quad (19)$$

En comparant les deux expressions on trouve :

$$N - 1 = 2\pi k^{-2} N f(k, 0)$$

ce qui est identique à (18).

Bien que les relations (18) soient fréquemment utilisées en liaison avec la condition de causalité, il ne faut pas perdre de vue qu'elles sont d'un caractère tout différent, et n'ont en principe aucun rapport avec cette condition. Cela est apparent si on considère qu'elles ne concernent qu'une seule valeur de ω . La première des deux formules (18) est appelée théorème optique, ou aussi formule de Bohr-Peierls-Placzek [29]. Remarquons en passant que par suite de (19) $|f(k, 0)|/k$ est bornée ; la limite supérieure est $(2\pi ND)^{-1}$ où ND (nombre de centres diffuseurs par cm^2) doit être choisi de façon à ce que les centres diffuseurs soient sans interaction mutuelle.

La relation (18) nous permet maintenant de formuler la relation (15) comme une propriété du processus de diffusion individuel. On trouve que $f(\omega, 0)$ possède un prolongement holomorphe dans I_+ et que sur l'axe réel la partie réelle est liée à la partie imaginaire par

$$\text{Re}[f(k, 0)] = \frac{2\omega^2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\text{Im}[f(\omega', 0)] d\omega'}{\omega'^2 - \omega^2} \omega'. \quad (20)$$

On peut aussi démontrer la relation de Kramers et Kronig (20) sans faire le détour consistant à passer par le milieu, mais en considérant dès le début la diffusion par un noyau. La condition de causalité implique alors qu'en un point situé à une grande distance au delà du noyau, il ne peut arriver aucune onde diffusée avant l'onde incidente. Pour démontrer des relations de Kramers et Kronig analogues à (20), pour les directions autres que la direction en avant, $\theta \neq 0$, la même condition *nécessaire* s'appliquera aux processus de diffusion individuels, bien qu'elle n'ait plus alors de relation avec les propriétés macroscopiques du milieu. Mais il apparaît en même temps que ce n'était pas un hasard si la direction de propagation vers l'avant occupait une place à part.

Pour voir cela, considérons un paquet d'ondes planes qui se propagent dans la direction z et sont diffusées par un noyau (fig. 9). Si ce paquet a un front raide qui se propage suivant $z = ct$, un observateur placé à la distance r à droite du noyau ne recevra sûrement aucune onde avant l'instant $t = r/c$. Cependant, pour un observateur dans une autre direction, $\theta \neq 0$, l'instant où le front de l'onde diffusée l'atteindra dépend de la dimension du noyau. La condition de causalité perd ainsi son caractère fondamental, et se dégrade en une propriété de la diffusion par un centre

diffuseur de dimension finie. Néanmoins elle est utile aussi sous cette forme, par exemple pour la théorie de la diffusion par les noyaux atomiques, parce que dans ce cas la condition d'une dimension finie est remplie à une très grande approximation.

Supposons qu'on peut considérer le noyau comme une sphère de rayon a ; de sorte que pour $r > a$ les équations du champ libre sont vérifiées (fig. 9). Un

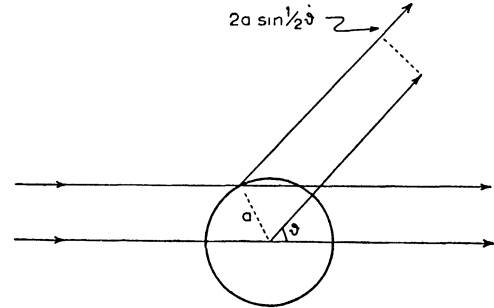


FIG. 9. — Condition de causalité et dimensions du centre diffuseur.

paquet d'ondes planes tombe sur le noyau ; l'onde totale s'écrit donc

$$\int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) \{ e^{i\omega(z/c-t)} + r^{-1} e^{i\omega(r/c-t)} f(\omega, \theta) \} d\omega.$$

Choisissons pour $A(\omega)$ une fonction qui possède les propriétés cités dans le théorème principal ; le paquet incident d'ondes planes est alors nul pour $z/c - t > 0$, il a donc un front raide qui se propage selon $z = ct$. Un observateur placé à une grande distance r , dans la direction θ ne peut recevoir aucune onde diffusée tant que :

$$t < (r - 2a \sin \theta/2) / c. \quad (21)$$

Donc la quantité

$$r^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) f(\omega, \theta) e^{i\omega(r/c-t)} d\omega$$

doit être nulle si t vérifie (21), et par suite

$$A(\omega) f(\omega) \exp [2i(\omega/c) \sin \theta/2]$$

doit posséder les propriétés du théorème principal. Il suffit pour cela que $f(\omega, \theta)$ soit holomorphe dans la moitié supérieure du plan complexe ω et que $f(\omega, \theta) \exp [2i\omega(a/c) \sin \theta/2]$ soit bornée dans cette région. L'adjonction du facteur exponentiel fait que cette condition est nettement plus faible que celle imposée à $f(\omega, 0)$, parce que le facteur exponentiel décroît lui-même rapidement lorsque la partie imaginaire de ω croît. La relation de Kramers et Kronig est maintenant :

$$\text{Re}[f(\omega, \theta) e^{2i\omega l(\theta)}] \\ = \frac{2\omega^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{(\omega'^2 - \omega^2)} \omega' \text{Im}[f(\omega', \theta) e^{2i\omega' l(\theta)}] \quad (22)$$

où $l(\theta) = (a/c) \sin(\theta/2)$. La même formule (22) est valable aussi pour des noyaux de forme quelconque, si on choisit convenablement $l(\theta)$. (22) est moins élégante et moins utilisable que (20), mais on peut vérifier

sur l'exemple de la diffraction de la lumière par un réseau (§ 3) qu'il n'est pas possible de supprimer le facteur exponentiel.

Dans ce qui précède on a supposé implicitement que la particule diffusante est fixée dans l'espace, ce qui est une bonne approximation pour un noyau atomique. Si on tient compte du recul du noyau on trouve, d'après un calcul connu pour l'effet Compton, que la lumière diffusée dans la direction θ possède une fréquence ω_1 inférieure à ω , et donnée par :

$$\frac{1}{\omega_1} = \frac{1}{\omega} + \frac{\hbar}{Mc^2} (1 - \cos \theta) \quad (23)$$

ou M est la masse du noyau. L'onde diffusée est donc

$$r^{-1} \int A(\omega) f(\omega, \theta) e^{i\omega_1(r/c-t)} d\omega$$

et c'est elle qui doit être nulle si (21) est vérifié. Donc,

$$A(\omega) f(\omega, \theta) e^{2i\omega l(\theta)} d\omega / d\omega_1$$

possède en tant que fonction de ω_1 les propriétés du théorème principal. Puisque le demi-plan supérieur ω est appliqué par (23) de façon biunivoque sur le demi-plan supérieur ω_1 , nous pouvons conclure à nouveau que $f(\omega, \theta)$ est holomorphe dans I_+ . Avant de pouvoir tirer de là une relation de Kramers et Kronig il faut encore examiner l'allure de la fonction pour $\omega \rightarrow \infty$ et $\omega_1 \rightarrow \infty$. On trouve alors, par exemple pour un diffuseur ponctuel ($l(\theta) \equiv 0$),

$$\frac{\omega + \nu}{\omega} \operatorname{Re}[f(\omega, \theta)] = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\omega'^2 + \omega\nu}{\omega'^2 - \omega^2} \operatorname{Im}[f(\omega, \theta)] d\omega'$$

ou $1/\nu$ est une abréviation pour le second terme de (23).

6. Diffuseur de rayon fini à symétrie sphérique. — Si le noyau diffuseur possède une structure à symétrie sphérique, il est avantageux de décomposer l'onde incidente en ondes multipolaires, parce que dans ce cas chaque onde multipolaire est diffusée séparément, indépendamment de la présence des autres. Pour simplifier nous ne considérerons que la première, l'onde monopolaire ou onde s . On peut se la représenter comme une onde sphérique, qui tombe sur le noyau en provenance de toutes les directions, le traverse, puis se propage comme une onde sphérique jusqu'à l'infini. L'influence du noyau se traduit par un déphasage que l'onde subit en traversant le centre. S'il n'y a pas d'absorption, l'amplitude de l'onde sortante est égale à celle de l'onde entrante.

Pour simplifier les formules, nous admettrons que le champ de l'onde est décrit par une fonction complexe $u(r, t)$ qui satisfait en dehors du noyau ($r > a$) à l'équation d'onde

$$\Delta u - \ddot{u} = 0 \quad (24)$$

Ceci est valable en particulier pour le champ électromagnétique, si on fait abstraction de son caractère vectoriel et qu'on pose $c = 1$. En l'absence de diffusion, l'onde s sera représentée par

$$u(r, t) = r^{-1} \sin \omega r e^{-i\omega t} = \frac{i}{2r} \{ e^{-i\omega(r+t)} - e^{i\omega(r-t)} \}. \quad (25)$$

La fréquence ω est arbitraire, et doit parcourir toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$ pour que les solutions (25) forment un système complet. Contrairement au cas de la description par ondes planes, le nombre

d'ondes est ici un scalaire qui prend des valeurs négatives ou positives. Le premier terme de (25) représente l'onde sphérique qui arrive avec la vitesse 1 ; le second terme est l'onde sortante. Si maintenant on introduit un noyau diffuseur, l'onde sortante est multipliée par un facteur de phase $e^{2i\eta(\omega)} = S(\omega)$, en sorte que le champ de l'onde est maintenant :

$$u(r, t) = \frac{i}{2r} \{ e^{-i\omega r} - S(\omega) e^{i\omega r} \} e^{-i\omega t}. \quad (26)$$

La relation avec la section efficace est donnée par une formule bien connue [28]

$$\sigma(\omega) = 4\pi\omega^{-2} \sin^2 \eta = 2\pi\omega^{-2} (1 - \operatorname{Re}[S]). \quad (27)$$

Un état de diffusion non stationnaire quelconque, à symétrie sphérique, peut toujours s'écrire comme une superposition de solutions stationnaires (26) :

$$ru(r, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) \{ e^{-i\omega r} - S(\omega) e^{i\omega r} \} e^{-i\omega t} d\omega \quad (28)$$

$A(\omega)$ est une fonction arbitraire, qui décrit la forme du paquet d'ondes incident. Choisissons encore pour $A(\omega)$ une fonction qui vérifie les conditions du théorème principal. Alors le paquet d'ondes incident est nul pour $r + t < 0$, donc pour $t < -r$. La condition de causalité exige alors que l'onde soit nulle pour $t < r - 2a$. Donc

$$A(\omega) S(\omega) e^{2i\omega a}$$

doit également satisfaire aux conditions du théorème principal. De là on peut déduire rigoureusement [30] que S est holomorphe dans la moitié supérieure du plan complexe ω , et que dans cette région on a :

$$|S(\omega) e^{2i\omega a}| < 1. \quad (29)$$

De là résulte la relation de Kramers et Kronig

$$\operatorname{Im}[S(\omega) e^{2i\omega a}] = -\frac{2\omega}{\pi} \int_0^\infty \frac{\operatorname{Re}[S(\omega') e^{2i\omega' a}]}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'.$$

En particulier on peut en déduire pour un diffuseur ponctuel ($a = 0$) à l'aide de (27) :

$$S(\omega) = 1 - \frac{\omega^2}{2\pi} \sigma(\omega) + \frac{i\omega}{\pi^2} \frac{\omega'^2 \sigma(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega.$$

En d'autres termes : dès que σ , donc la partie réelle de S , est connue pour toutes les valeurs de ω , on en déduit S elle-même, donc aussi la partie imaginaire. Il est vrai que dans le cas présent ceci ne donne rien de très nouveau, car comme $|S|^2 = 1$, la partie imaginaire est déterminée (au signe près) par la partie réelle ; mais il est souvent important que le signe puisse être aussi déterminé.

Par exemple dans le cas d'une diffusion faible, ce signe permet de déterminer si la force qui produit la diffusion est attractive ou répulsive. Au paragraphe 8 nous verrons un autre exemple emprunté à la physique des mésons.

La détermination du signe n'exige d'ailleurs pas toujours la relation de Kramers et Kronig complète. En effet, de (29) résulte l'inégalité [30], [31]

$$d\eta/d\omega > -a.$$

Il suit de là que η ne peut pas décroître trop vite lorsque la fréquence croît. Si on fait une estimation raisonnable de a ,

et qu'on puisse trouver un domaine de fréquences où $|\eta|$ varie fortement, cette inégalité peut être utilisée pour exclure une des possibilités $\eta = \pm |\eta|$.

Pour la diffusion des particules, on a l'inégalité $d\eta/dk > -\alpha$, à condition qu'il n'y ait pas d'états liés. Dans le cas où il y a des états liés, on peut encore écrire une inégalité du même genre, mais dont le second membre contient des termes relatifs aux états liés.

7. Diffusion des particules. — Jusqu'ici nous avons considéré un champ qui obéissait à l'équation d'ondes (24), et dont le nombre d'ondes était par conséquent lié à la fréquence par la formule de dispersion simple $\pm \omega = k$. Pour des particules obéissant à l'équation de de Schrödinger non relativiste, on a au contraire $\omega = \hbar k^2/2m$. Le paquet d'ondes (28) doit maintenant être remplacé par

$$r\psi(r, t) = \int_0^\infty A(k) \{ e^{-ikr} - S(k) e^{ikr} \} e^{-i\omega(k)t} dk \quad (30)$$

où k et $\omega(k)$ prennent seulement des valeurs positives. Il en résulte qu'on ne peut plus choisir $A(k)$ de façon à ce que le paquet d'ondes incident ait un front raide ; il y a inévitablement un précurseur infiniment long bien que faible. Par suite il y a toujours une petite chance de trouver la particule loin en avant. La condition de causalité ne peut donc plus être formulée de la même façon que jusqu'ici. Il est raisonnable de poser maintenant la condition suivante : à chaque instant t , la probabilité de trouver une particule sortante n'est pas supérieure à la probabilité que la particule incidente ait atteint le noyau. Cela revient d'ailleurs simplement à ceci que la probabilité de trouver une particule en dehors du noyau ne peut jamais être supérieure à 1.

En partant de cette condition de causalité, on peut démontrer de façon entièrement rigoureuse [32] que $D(\omega)$ est holomorphe dans I_+ , mais peut avoir des singularités pour ω réelle et négative. — En fait on savait déjà, dans le cas où le noyau consiste en un puits de potentiel, que les états liés donnent lieu à des pôles sur l'axe réel négatif. Cependant l'explication que fournit la condition de causalité est d'une part plus générale, car elle ne suppose rien sur le mécanisme de la diffusion ; mais d'autre part elle est moins détaillée, parce que l'existence de singularités autres que les pôles ne peut être exclue.

Grâce au fait que $S(\omega)$ est holomorphe dans I_+ , il est encore possible de démontrer des relations entre $Re[S(\omega)]$ et $Im[S(\omega)]$. Mais malheureusement il intervient dans ces relations des intégrales sur l'axe réel tout entier (cf. (9)), alors que seules correspondent à des états diffusion physiquement réalisables les valeurs positives de ω . Pour les valeurs négatives de ω , la fonction $S(\omega)$ est définie par prolongement analytique. Pour utiliser ces relations dans la pratique, on doit obtenir des renseignements d'une autre façon sur l'allure de ce prolongement analytique sur l'axe négatif. Dans tous les cas où $S(\omega)$ a été calculée explicitement, il apparaît que $S(\omega)$ est réelle pour $\omega < 0$. On peut donc exprimer $Re[S(\omega)]$ comme une intégrale portant sur $Im[S(\omega)]$ pour les seules valeurs positives de ω , plus une somme de demi-résidus provenant des pôles sur l'axe ω négatif. Cependant ce résultat ne peut être déduit de la seule condition de causalité.

Pour les particules relativistes également il y a une

« région non physique » analogue, celle comprise entre $-mc^2$ et mc^2 . Comme ces valeurs de l'énergie n'interviennent pas dans les états stationnaires de diffusion, elles créent premièrement une difficulté pour formuler la condition de causalité, et deuxièmement font apparaître un élément indéterminé dans l'application des formules de Plemelj. Cependant là encore on peut soupçonner que $S(\omega)$ est réelle dans ce domaine, en sorte qu'on a seulement à tenir compte des résidus correspondants aux états liés.

Jusqu'ici nous n'avons considéré que la diffusion pure, c'est-à-dire les cas où le noyau reste après la diffusion dans son état initial. On peut aussi étudier les réactions, où le noyau réémet une particule différente de la particule incidente (ou la même, mais avec une direction de spin différente). La matrice S est alors une véritable matrice $S_{\alpha\beta}$, où α et β désignent les « voies », c'est-à-dire les différentes possibilités pour l'état initial et final. On n'a pas encore traité ce problème de façon générale. Comme résultat partiel, on peut cependant mentionner que la formule connue de Breit-Wigner, qui donne la section efficace $\sigma_{\alpha\beta}$ au voisinage de la résonance, résulte directement de la condition de causalité.

A ce point nous devons dire quelques mots sur d'autres méthodes pour trouver les propriétés générales de la matrice S . Nous n'aborderons pas les démonstrations qui utilisent des modèles détaillés pour le noyau [33].

Heisenberg [34] tirait des conclusions sur les propriétés analytiques de $S(\omega)$ en partant de l'hypothèse que les états stationnaires de diffusion (30) doivent former pour $t = 0$ un système complet de fonctions de r à l'extérieur du noyau. Mais cette démonstration est inexacte ; on peut montrer que pour que le système soit complet il suffit que $S(\omega)$ possède des propriétés beaucoup plus faibles [35].

Wigner et Eisenbud [36] supposent que l'interaction à l'intérieur du noyau est représentée par un hamiltonien hermitique, qui possède un système complet de fonctions propres à l'intérieur du noyau. Ils considèrent non seulement la diffusion, mais aussi les réactions. Au lieu de la matrice S , ils préfèrent utiliser la « matrice dérivée » R , qui est liée à S par la relation

$$e^{2ika} S = (1 + ikR)/(1 - ikR).$$

Ils trouvent que $R(\omega)$ est une fonction matricielle de la forme :

$$R_{\alpha\beta}(\omega) = \sum_r \frac{\gamma_\alpha^{(r)} \gamma_\beta^{(r)}}{\omega_r - \omega}. \quad (31)$$

Les ω_r sont les fréquences de résonance, et les $\gamma_\alpha^{(r)}$ déterminent les probabilités des différentes voies. Si on retraduit les propriétés analytiques de (31) en propriétés de la matrice S , on trouve les mêmes que celles qui résultent de la condition de causalité, et en plus que S est réelle pour $\omega < 0$ [37].

L'inconvénient de cette approche est que la relation de ω_r et $\gamma_\alpha^{(r)}$ avec les fréquences de résonance et probabilités de transition observées n'est pas stricte, mais dépend encore du choix arbitraire de a . Si on considère, dans l'espace vide, une petite sphère mathématique de rayon a comme un centre diffuseur, on trouvera une matrice R de la forme (31) bien qu'il ne soit pas question ici de résonance.

Schutzer et Tiomno [38] ont essayé de déduire ces mêmes propriétés de la condition de causalité, mais la difficulté mentionnée ci-dessus, pour formuler cette condition pour des particules, leur a échappé.

Enfin Wigner a proposé une nouvelle approche, où il part

également de la condition que la probabilité de trouver la particule en dehors du noyau ne doit pas être supérieure à 1. Cette méthode n'est malheureusement publiée qu'en partie [39].

8. Les relations de Kramers et Kronig en théorie des champs. — Jusqu'ici nous avons toujours formulé la condition de causalité à l'aide des ondes incidente et émergente. Cela est nécessaire, tant qu'on ne veut faire aucune hypothèse spécifique sur l'intérieur du milieu, resp. sur le centre diffuseur. Dans le cas de la lumière, cette méthode conséquente ne donnait lieu à aucune difficulté ; mais dans le cas de particules, le traitement présente des difficultés considérables. On peut le rendre plus aisé en admettant que l'état à l'intérieur de la région où a lieu l'interaction peut lui aussi être décrit à l'aide de grandeurs de champ. Comme condition de causalité, on peut alors exiger : le champ en \mathbf{r} au temps t ne dépend pas du champ en \mathbf{r}_0 au temps antérieur t_0 , si $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| > c(t - t_0)$.

En théorie des champs, on formule cela ainsi. Supposons que les grandeurs de champ (dans la représentation de Heisenberg) soient décrites par les opérateurs $\varphi_\mu(\mathbf{r}, t)$. Dans le cas du champ électromagnétique, les φ_μ représentent les quatre composantes du potentiel-vecteur ; dans le cas de particules chargées, on prend les composantes du quadrivecteur courant. La condition d'indépendance mentionnée plus haut s'exprime alors par la relation de commutation

$$[\varphi_\mu(\mathbf{r}_0, t_0), \varphi_\nu(\mathbf{r}, t)] = 0 \text{ si } |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2 > c^2(t - t_0)^2. \quad (32)$$

Il est clair que (32) n'est pas modifiée par le passage à un autre système de référence.

Cette condition peut aussi s'interpréter autrement. La relation de commutation (32), prise pour $t = t_0$, exprime que $\varphi_\mu(\mathbf{r}, t_0)$ et $\varphi_\nu(\mathbf{r}, t_0)$ commutent tant que $\mathbf{r}_0 \neq \mathbf{r}$. Ceci garantit la possibilité, à un instant t_0 , de prendre des valeurs quelconques pour les grandeurs de champ en tous les points de l'espace. La relation (32) pour t_0 exprime que la même possibilité doit exister pour chaque observateur, indépendamment du système de référence ou il se trouve. Selon cette interprétation (32) sera considérée comme une condition pour que les équations de champ possèdent une solution pour des valeurs initiales arbitrairement choisies. De ce point de vue, c'est donc une condition pour la consistance de la théorie. En outre, nous avons supposé implicitement dans ce qui précède que la solution est possible par les méthodes habituelles de la théorie des champs, en particulier le développement en ondes planes. Cela implique qu'aucun terme exponentiellement croissant, du type des solutions anormales citées au paragraphe 4, ne peut figurer dans ce développement. Plus précisément : on suppose que les solutions qui tendent, lorsqu'on « débranche » l'interaction, vers les solutions ondes planes de l'équation de Schrödinger non perturbée, forment un système complet ; par superposition de ces solutions on peut alors obtenir toutes les valeurs des grandeurs de champ au temps t_0 ⁽¹⁾.

On ne peut ici qu'indiquer le traitement ultérieur de la condition (32). À l'aide de la théorie des champs on calcule l'amplitude de diffusion en avant et on obtient pour cette amplitude (ou du moins pour une autre grandeur liée avec celle-ci) une expression qui en

raison de (32) est holomorphe dans I_+ . Il en résulte des relations de Kramers et Kronig qui lient la partie « dispersive » de l'amplitude de diffusion avec la partie « absorptive ». Cette méthode a été développée surtout par Goldberger [40], et appliquée pour la première fois à la diffusion des rayons γ par les noyaux. Ces deux dernières années, c'est surtout l'application à la diffusion des mésons π par les protons qui a attiré l'attention [41]. Jusque vers 250 MeV, le processus de diffusion peut être décrit à l'aide d'ondes s et p . Les déphasages correspondants sont notés α_1, α_3 , et $\alpha_{11}, \alpha_{13}, \alpha_{31}, \alpha_{33}, \alpha_{33}$ (onde p , spin isobarique $3/2$, moment cinétique total $3/2$) présente un pic de résonance vers 200 MeV (dans le système du laboratoire) tandis que les autres α varient moins rapidement avec l'énergie [42]. Cependant il y a une difficulté : les sections efficaces observées ne permettent pas de déterminer sans ambiguïté les déphasages (par exemple, les sections efficaces ne sont pas modifiées si on change le signe de tous les déphasages ; cf. la fin du § 6). Mais les déphasages sont liés de façon univoque à l'amplitude de diffusion. En cherchant quelle solution pour les déphasages conduit à une amplitude de diffusion qui vérifie les relations de Kramers et Kronig, on peut faire un choix entre les différentes solutions possibles [43] ⁽¹⁾.

Pour obtenir ces relations de Kramers et Kronig, on doit intégrer la partie imaginaire de l'amplitude de diffusion sur toutes les énergies, y compris l'intervalle non physique entre $-m_\pi c^2$ et $m_\pi c^2$ (cf. § 7). Le prolongement analytique de l'amplitude de diffusion est réel dans cet intervalle, et cependant celui-ci fournit une contribution. En effet, il y a un pôle lié à la possibilité d'un état lié virtuel du pion avec le proton. Le résidu de ce pôle contribue à l'intégrale de la relation de Kramers et Kronig, et il se trouve qu'il contient la constante de couplage f du proton avec le champ mésique. Ceci permet de déterminer la valeur de cette constante à partir des expériences de diffusion ; Haber-Schaim a trouvé ainsi $f^2 = 0,082 \pm 0,015$ [45].

Les grandeurs qui décrivent le proton dans l'hamiltonien concernent le « proton nu », c'est-à-dire le proton tel qu'il existerait s'il n'y avait pas de champ mésique. Pour décrire l'interaction avec le champ mésique, on ajoute à l'hamiltonien un terme d'interaction, avec une « constante de couplage non renormalisée » f_0 . Par suite le champ mésique au voisinage du proton sera polarisé ou autrement dit le proton s'entoure d'un nuage de mésons virtuels. Ce qu'on observe dans une expérience est l'interaction de ce « proton habillé » avec un méson réel. La force de cette interaction modifiée sera décrite par une nouvelle constante, la constante de couplage renormalisée f . C'est donc cette grandeur que l'on doit porter dans la relation de Kramers et Kronig lorsqu'on veut la comparer avec l'expérience. D'ailleurs la théorie de Chew et Low conduit à des résultats très analogues [46].

Lors de la diffusion du méson π , il peut arriver que le spin du proton se renverse ; ceci donne un terme « spin-flip » dans l'amplitude de diffusion. Ce terme contient un facteur $\sin \theta$, donc il est nul pour la direction en avant et n'intervient pas dans la relation de Kramers et Kronig. C'est pourquoi on a démontré une

⁽¹⁾ Cet énoncé diffère de l'hypothèse d'Heisenberg (§ 7) que les états stationnaires forment un système complet dans la région extérieure au noyau.

⁽¹⁾ Choix qui aboutit à la solution dite de Fermi, que d'ailleurs Bethe, de Hoffmann e. a. [44] avaient rendue plausible pour d'autres raisons.

nouvelle relation de Kramers et Kronig pour $[df(\omega, \theta)/d\theta]\theta = 0$ [47] dans laquelle le terme avec renversement du spin est important. En portant dans cette relation les données expérimentales, on a pu confirmer à nouveau la valeur de f^2 , et du même coup le choix entre les différentes possibilités pour les déphasages [48]. Plus généralement, on a réussi à écrire des relations de Kramers et Kronig pour $f(\omega, \theta)$ avec $\theta \neq 0$. Dans ce cas ce n'est pas l'angle de diffusion qui doit être gardé constant dans l'intégrale sur ω , mais le transfert d'impulsion [49]. Les formules obtenues sont compliquées et difficiles à appliquer.

Ces succès des relations de Kramers et Kronig appliquée à la diffusion pion-nucléon ont été récemment quelque peu perturbés par Puppi [50]. Cet auteur a trouvé que les données expérimentales sur la diffusion des π ne satisfont à la relation de Kramers et Kronig correspondante que si on prend pour f^2 la valeur 0,04 en contradiction avec la valeur trouvée ci-dessus. Doit-on en conclure que la condition de causalité est violée ? Cela me semble prématuré parce que dans la démonstration de la relation de Kramers et Kronig concernée, en plus de la condition de causalité on utilise aussi des hypothèses plus spécifiques concernant l'interaction. Déjà l'intervention d'une constante de couplage — qui provient toujours de l'hamiltonien — montre que les relations de Kramers et Kronig utilisées ici sont moins purement phénoménologiques que dans les paragraphes précédents.

9. Conclusion. — La condition de causalité est-elle une loi inéluctable ? On ne saurait l'affirmer, car le contenu précis de la condition dépend de la façon dont elle est formulée pour une situation donnée. Pour la formuler, on doit définir une cause et un effet, c'est-à-dire qu'on doit pouvoir circonscrire un système physique et fixer ce qui sera considéré comme une action de l'extérieur, et ce qui sera considéré comme la réaction du système. En macrophysique cette séparation peut être menée jusqu'au bout sans ambiguïté, pourvu que l'on puisse faire abstraction des fluctuations statistiques. Il est évident que les considérations statistiques interviennent inévitablement à propos de la condition de causalité puisqu'il faut distinguer entre le futur et le passé. Déjà dans l'exemple mécanique simple de l'oscillateur amorti du § 3, il est essentiel que le coefficient de frottement γ soit *positif*, ce qui rompt la symétrie entre les deux directions du temps. La relation entre la mécanique statistique et les propriétés causales du champ électromagnétique a été expliquée par Wheeler et Feynman [51].

En microphysique, il n'apparaît pas de difficultés nouvelles, tant qu'on applique la condition de causalité aux seuls instruments de mesure macroscopiques. Par exemple dans une expérience de diffusion, la *cause* est l'émission des particules en direction de la cible ; l'*effet* est le fonctionnement du compteur qui reçoit les particules diffusées. Il faut seulement remarquer qu'une acausalité pendant un temps très court (10^{-23} s, pour l'électron de Lorentz) n'est pas en contradiction avec l'expérience.

Cependant cette formulation orthodoxe est beaucoup trop faible pour donner des conséquences intéressantes. C'est pourquoi aux paragraphes 6 et 7 nous avons posé une condition plus forte en exigeant que la causalité soit valable également pour les fonctions d'onde u

resp. ψ elles mêmes. Cela est hautement spéculatif puisque les valeurs de u et de ψ (ou du moins $|\psi|^2$) en un point donné ne peuvent pas être effectivement mesurées. Cependant il est conforme à l'esprit de la mécanique quantique de traiter u et $|\psi|^2$ comme des grandeurs observables, en sorte que les résultats obtenus sont dignes de confiance. Au paragraphe 8 toutefois, il s'agissait de grandeurs de champ quantifiées φ_μ . Celles-ci ne sont sûrement pas mesurables localement, parce que leurs interactions avec les autres champs ne peuvent être éliminées. C'est pourquoi nous considérerons (32) plutôt comme une condition pour la cohérence de la théorie des champs que comme l'expression d'un fait d'expérience.

Il semble que les difficultés de la théorie des champs actuelle sont étroitement liées à l'existence d'acausalités. Ceci est illustré par les tentatives (qui n'ont pas abouti) d'améliorer la théorie en introduisant une longueur élémentaire ; elles se ramènent toujours à abandonner la causalité pour les faibles distances. Il est possible que la nature soit réellement acausale aux faibles distances, c'est-à-dire qu'aucune description causale avec des grandeurs définies localement ne soit possible. Il est également possible que ce soit seulement la théorie des champs utilisée aujourd'hui qui ne soit pas la bonne, et qu'il existe une description causale avec des grandeurs de champ convenablement définies (probablement d'une façon étroitement liée aux résultats d'observations).

Je voudrais me permettre encore quelques remarques d'ordre général. La démonstration des relations de Kramers et Kronig n'est pas simple. En premier lieu, il faut formuler la condition de causalité avec précision, et se rendre compte clairement de sa signification. Il n'est guère satisfaisant de déduire de belles formules d'une hypothèse, si la justesse de l'hypothèse est moins évidente que celle des formules qui en résultent. En second lieu, la déduction mathématique exige plus de précision qu'il n'est habituel en physique, car dans le domaine des fonctions analytiques l'intuition physique est un guide peu sûr. Par exemple il ne sert à rien de savoir d'une fonction possède un prolongement holomorphe dans I_+ , si on ne sait rien sur le comportement à l'infini de ce prolongement. Autre exemple : il semble séduisant de déduire les relations de Kramers et Kronig à partir de l'hypothèse que les états stationnaires de diffusion forment un système complet de fonctions à l'extérieur du noyau ; comme on l'a remarqué au paragraphe 7, ceci est impossible. Il est également impossible de les obtenir à l'aide d'une théorie des perturbations, qui fournit un développement de l'amplitude de diffusion ou de la matrice S en puissance de la constante de couplage ; car il est essentiel qu'un terme d'amortissement figure dans le dénominateur, pour que le pôle du dénominateur de résonance s'écarte de l'axe réel vers le bas [52]. Enfin, il faut toujours se rappeler que si les relations de Kramers et Kronig constituent bien une condition à laquelle doivent satisfaire les grandeurs qui décrivent la diffusion, elles ne permettent nullement de déterminer celles-ci sans ambiguïté. Elles ne peuvent donc pas remplacer une *formule de dispersion* spécifique, mais seulement restreindre les possibilités pour cette formule.

Manuscrit reçu le 26 octobre 1960.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] SELLMEIER (W.), *Pogg. Ann.*, 1871, **143**, 272 ; 1872, **145**, 339 et 520 ; 1872 **147**, 386 et 525.
- [2] KRAMERS (H. A.), *Atti cong. inter. fis.* (Como, 1927), **2**, 545 ; *Phys. Z.*, 1929, **30**, 522 ; *Collected scientific papers* (Amsterdam, 1956), 333 et 347. KRONIG (R. de L.), *J. Opt. Soc. Amer.*, 1926, **12**, 547.
- [3] GROSS (B.), *Mathematical structure of the theories of viscoelasticity* (Paris, 1953).
- [4] TITCHMARSH (E. C.), *Introduction to the theory of Fourier integrals* (Oxford, 1937).
- [5] Voir par ex. : MUSKHELISHVILI (N. I.), *Singular integral equations* (Groningen, 1953).
- [6] NEVANLINNA (R.), *Eindeutige analytische funktionen* (Berlin, 1936).
- [7] GROSS (B.), *Phys. Rev.*, 1941, **59**, 748.
- [8] DEBYE (P.), *Polare Molekeln* (Leipzig, 1928).
- [9] KRONIG (R.), *Ned. T. Natuurk.*, 1942, **9**, 402. PAKE (G. E.) et PURCELL (E. M.), *Phys. Rev.*, 1948, **74**, 1184.
- [10] GORTER (C. J.), *Paramagnetic relaxation* (Amsterdam, 1947) ; *Progress in low temperature Physics*, 1957, **2**, 266.
- [11] BLOEMBERGEN (N.), PURCELL (E. M.) et POUND (R. V.), *Phys. Rev.*, 1948, **73**, 679.
- [12] HEIDEMANN (E.) et SPENCE (R. D.), *Z. Physik*, 1952, **133**, 109. GOURARY (B. S.), *J. Appl. Phys.*, 1957, **28**, 283. MEIXNER (J.), *Z. Physik*, 1954, **139**, 30.
- [13] GROSS (B.), *Nuovo Cimento*, Suppl. 1956, **3**, 235.
- [14] BODE (H. W.), *Network analysis and feedback amplifier design* (New York, 1945). BAYARD (M.), *Théorie des réseaux de Kirchhoff* (Paris, 1954).
- [15] BORN (M.), *Optik* (Berlin, 1933).
- [16] TOLL (J. S.), *Thèse*, Princeton, 1952.
- [17] LORENTZ (H. A.), *The theory of electrons* (Leipzig, 1910) ; BECKER (R.), *Théorie des électrons* (Leipzig, 1933).
- [18] SOMMERFELD (A.), *Ann. Physik*, 1914, **44**, 177. BRILLOUIN (L.), *idem*, 203.
- [19] TOLL (J. S.) et WHEELER (J. A.), *Precursors and the relation between absorption, refraction, and scattering of light* (version préliminaire non publiée).
- [20] DIRAC (P. A. M.), *Proc. Roy. Soc.*, 1938, (A) **167**, 148. ELIEZER (C. J.), *Rev. Mod. Physics*, 1947, **19**, 147.
- [21] BHABHA (H. J.), *Phys. Rev.*, 1946, **70**, 759.
- [22] KAMPEN (N. G. van), *Dan. Mat. Fys. Medd.*, 1951, **26**, 15.
- [23] KÄLLÉN (G.) et PAULI (W.), *Kgl. Danske Vid. Selsk. Fys. Mat. Medd.*, 1955, **30**, n° 7.
- [24] DELSARTE (J.), *Ann. scient. Ecole Norm. Sup.*, 1936, **53**, 223. ROBIN (L.), *Revue Scientifique*, 1946, **83**, 7.
- [25] KRAMERS (H. A.) et HEISENBERG (W.), *Z. Physik*, 1925, **31**, 681. [KRAMERS (H. A.), *Collected scientific papers* (Amsterdam, 1956), 293]. WEISSKOPF (V.) et WIGNER (E. P.), *Z. Physik*, 1930, **63**, 54 ; 1930, **65**, 18.
- [26] Par ex. : HEITLER (W.), *The quantum theory of radiation* (Oxford, 1954).
- [27] Par ex. : SEITZ (F.), *The modern theory of solids* (New York, 1940).
- [28] Par ex. : MOTT (N. F.) et MASSEY (H. S. W.), *The theory of atomic collisions* (Oxford, 1952).
- [29] FEENBERG (E.), *Phys. Rev.*, 1932, **40**, 40. BOHR (N.), PEIERLS (R.) et PLACZEK (G.), *Nature*, 1939, **144**, 200. HULST (H. C. van de), *Light scattering by small particles* (New York, 1957).
- [30] KAMPEN (N. G. van), *Phys. Rev.*, 1953, **89**, 1072.
- [31] WIGNER (E. P.), *Phys. Rev.*, 1955, **98**, 145.
- [32] KAMPEN (N. G. van), *Phys. Rev.*, 1953, **91**, 1267.
- [33] BREIT (G.) et WIGNER (E.), *Phys. Rev.*, 1936, **49**, 519. BETHE (H. A.) et PLACZEK (G.), *Phys. Rev.*, 1937, **51**, 450. KAPUR (P. L.) et PEIERLS (R.), *Proc. Roy. Soc.*, 1938, (A), **166**, 277. SIEGERT (A. J. F.), *Phys. Rev.*, 1939, **56**, 750. FESBACH (H.), PEASLEE (D. C.) et WEISSKOPF (V. F.), *Phys. Rev.*, 1947, **71**, 145. MOSHINSKI (M.), *Phys. Rev.*, 1951, **81**, 347 et **84**, 525. HUMBLET (J.), *Mém. Soc. Roy. Scient.*, Liège, 1952, **12**, fasc. 4.
- [34] HEISENBERG (W.), *Z. Naturforsch.*, 1946, **1**, 608. HU (N.), *Phys. Rev.*, 1948, **74**, 131. CORINALDESI (E.), *Nuclear Physics*, 1956, **2**, 420 ; *Nuovo Cimento*, 1956, **4**, 1384.
- [35] KAMPEN (N. G. van), *Physica*, 1955, **21**, 127 et 579.
- [36] WIGNER (E. P.) et EISENBUD (L.), *Phys. Rev.*, 1947, **72**, 29.
- [37] KAMPEN (N. G. van), *Rev. Mex. Phys.*, 1953, **2**, 233.
- [38] SCHUTZER (W.) et TIOMNO (J.), *Phys. Rev.*, 1951, **83**, 249.
- [39] WIGNER (E. P.) et NEUMANN (J. von), *Ann. Mathem.*, 1954, **59**, 418.
- [40] GELL-MANN (M.), GOLDBERGER (M. L.) et THIRING (W.), *Phys. Rev.*, 1954, **95**, 1612. GOLDBERGER (M. L.), *Phys. Rev.*, 1955, **97**, 508 et **99**, 979. SYMANZIK (K.), *Phys. Rev.*, 1957, **105**, 743.
- [41] GOLDBERGER (M. L.), MIYAZAWA (H.) et OEHME (R.), *Phys. Rev.*, 1955, **99**, 986. CHEW (G. F.), GOLDBERGER (M. L.), LOW (F. E.) et NAMBU (Y.), *Phys. Rev.*, 1957, **106**, 1337.
- [42] Par ex. : BETHE (H. A.) et HOFFMANN (F. de), *Mesons and fields*, vol. II (Evanston, 1955).
- [43] KARPLUS (R.) et RUDERMAN (M. A.), *Phys. Rev.*, 1955, **98**, 771. ANDERSON (H. L.), DAVIDON (W. C.) et KRUSE (U. E.), *Phys. Rev.*, 1955, **100**, 339.
- [44] HOFFMANN (F. de), METROPOLIS (N.), ALEI (E. F.) et BETHE (H. A.), *Phys. Rev.*, 1954, **95**, 1586.
- [45] HABER-SCHAIM (U.), *Phys. Rev.*, 1956, **104**, 1113.
- [46] CHEW (G. F.) et LOW (F. E.), *Phys. Rev.*, 1956, **101**, 1570. WICK (G. C.), *Rev. Mod. Physics*, 1955, **27**, 339.
- [47] OEHME (R.), *Phys. Rev.*, 1955, **100**, 1503 ; 1956, **102**, 1174.
- [48] DAVIDON (W. C.) et GOLDBERGER (M. L.), *Phys. Rev.*, 1956, **104**, 1119.
- [49] CAPPS (R. H.) et TAKEDA (G.), *Phys. Rev.*, 1956, **103**, 1877. SALAM (A.), *Nuovo Cimento*, 1956, **3**, 424. SALAM (A.) et GILBERT (W.), *idem*, 607.
- [50] PUPPI (G.) et STANGHELLINI (A.), *Nuovo Cimento*, 1957, **5**, 1305.
- [51] WHEELER (J. A.) et FEYNMAN (R. P.), *Rev. Mod. Physics*, 1945, **17**, 157.
- [52] KAMPEN (N. G. van), *Physica*, 1957, **23**, 157.