

---

# Modélisation climatique : paramétrisation de la convection profonde

*Jean-Yves Grandpeix*

Laboratoire de Météorologie Dynamique

(Avril 2014)

---

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Modélisation climatique :</b>	
	<b>Les enjeux, les modèles</b>	<b>4</b>
1.1	Les Modèles de Circulation Générale Atmosphérique (GCM atmosphériques) . . . . .	4
1.2	Paramétrisation de la convection profonde . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Le schéma d'Emanuel</b>	<b>10</b>
2.1	Description générale . . . . .	10
2.2	Descentes précipitantes . . . . .	12
2.2.1	Définition . . . . .	12
2.2.2	Problématique . . . . .	13
2.2.3	Modèle . . . . .	13
2.2.4	Récapitulation des équations du modèle de descente précipitante . . . . .	16
2.3	Annexes . . . . .	18

# Table des figures

2.1	Schéma de principe de la paramétrisation d'Emanuel de la convection moyenne ou profonde . . . . .	11
2.2	Photographie d'un courant de densité prise au Mali en Aout 2004 et schéma du couplage du courant de densité avec la convection . . . . .	14

# Chapitre 1

## Modélisation climatique : Les enjeux, les modèles

### 1.1 Les Modèles de Circulation Générale Atmosphérique (GCM atmosphériques)

Le point important pour la compréhension des GCM atmosphériques réside dans le découpage du modèle en "partie dynamique" et "partie physique". La partie dynamique détermine la circulation générale, c'est-à-dire la pression au sol, les champs de vitesse, d'humidité et de température à l'échelle résolue par le modèle (100 km à 300 km), sur tout le globe. Le modèle mathématique de la partie dynamique est constitué des équations d'Euler, dans lesquelles figurent des termes source représentant l'effet des processus d'échelle non-résolue par le modèle. La partie physique est composée de "paramétrisations physiques", lesquelles ont pour but de représenter l'effet des processus d'échelle non résolue (e.g. couche limite, convection, échanges radiatifs, ...) sur les variables de grande échelle.

Ce découpage correspond à une hypothèse de séparation d'échelle, qui est très évidente dans le cas des processus de couche limite ou de rayonnement, mais qui est beaucoup moins évidente dans le cas de la convection profonde pour laquelle les enclumes et les courants de densité sont des objets qui peuvent être aussi bien d'échelle résolue que non-résolue. Néanmoins, on considérera ici (et on considère dans les GCMs) que cette hypothèse de séparation d'échelle est valide dans tous les cas.

## Découpage interne : quelques équations d'un GCM atmosphérique

Equations dynamiques en coordonnées pression

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \vec{V} = -(\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} - \omega \partial_p \vec{V} - \vec{\nabla} \Phi - f \vec{k} \times \vec{V} + \vec{S}_v \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{V} + \partial_p \omega = 0 \\ \partial_t q = -\vec{V} \cdot \vec{\nabla} q - \omega \partial_p q = S_q \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \Phi = gz \quad \text{geopotentiel} \\ \omega = \partial_t p \quad \text{vitesse vert.} \\ q = \text{humidite specifique} \end{array} \right. \quad (1.1)$$

$\vec{S}_v$  et  $S_q$  : termes source déterminés par les **paramétrisations physiques** :

- couche limite planétaire
- convection profonde (Gros cumulus et cumulonimbus)
- nuages
- processus radiatifs
- orographie
- sol . . . . .

## Discrétisation

- Incrément temporel : de quelques minutes à une demi-heure selon la technique d'intégration utilisée.
- Maille horizontale : 100 à 300 km.
- Maille verticale : de 100 m (ou moins), au niveau de la surface, jusqu'à plusieurs kilomètres dans la troposphère libre.

## 1.2 Paramétrisation de la convection profonde

**Points importants de la paramétrisation de la convection profonde**

- Il s'agit de paramétrisations et donc de modèles 1D : on considère un système infini où sont répartis de façon homogène des nuages et des colonnes convectives.
- On veut déterminer le chauffage et l'assèchement résultant de l'effet moyen de ces courants.
- Concepts clefs : soulèvement, instabilité conditionnelle, précipitation, CAPE, CIN, entraînement, déentraînement.

- Une colonne convective n'est pas un aspirateur.
- l'entraînement est discontinu et inhomogène.
- Deux types de courants bien distincts : (1) les courants saturés (i.e. nuageux); (2) les courants insaturés descendants (descentes précipitantes = "trous d'air").

## Schémas en flux de masse

Les schémas en flux de masse ('Mass flux schemes', en anglais) sont des schémas dans lesquels on détermine explicitement les flux de masse des courants convectifs et où les tendances de température et d'humidité sont exprimées en fonction de ces flux. La détermination des divers courants verticaux, de leurs flux, de leurs températures et de leurs humidités est propre à chaque schéma convectif (voir plus loin le schéma d'Emanuel). En revanche, l'expression des tendances en fonction des flux de masse verticaux est tout à fait générale.

Pour établir ces expressions, on écrit les **équations de bilan** de masse, d'énergie statique avec eau liquide ('liquid water static energy', en anglais) et d'eau **pour l'environnement**, c'est à dire pour toute la partie du domaine qui est extérieure aux courants convectifs. Cet environnement est supposé clair (i.e. dépourvu de nuages) et animé d'un mouvement uniforme et lent (lent comparé aux mouvements convectifs : les vitesses dans l'environnement se mesurent en cm/s, alors que les mouvements convectifs se mesurent en m/s).

Il faut bien voir la ruse de cette approche : on ne sait pas ce qui se passe dans les courants convectifs ; alors on ne regarde que ce qui se passe dans leur environnement, si simple, si calme. Cette façon de faire est caractéristique des développeurs de paramétrisations de la convection nuageuse.

**Remarque :** Dans tout ce qui suit (et dans toute la littérature consacrée aux paramétrisations convectives) les flux de masse sont exprimés en débit par unité de surface de la maille. Ceci est cohérent avec les principes des paramétrisations : elles décrivent un système infini où les colonnes convectives sont réparties de façon statistiquement homogène. Dans ces conditions seules les densités spatiales ont un sens. Cependant, comme intermédiaire de calcul, on peut utiliser des "vrais" débits en multipliant toutes les formules par l'aire totale  $S_t$  d'un grand domaine (grand devant toutes les tailles caractérisant les processus considérés). Il suffit alors de diviser les formules finales par  $S_t$  pour obtenir des expressions où interviennent les densités spatiales. Ce grand domaine peut être la maille (cas de la convection de couche limite ou de la convection "pop-corn" lorsque la maille est assez grande,  $> 200$  km) ; pour les systèmes convectifs un peu gros, le domaine doit être plus grand

que la maille. Le passage de l'échelle de ce grand domaine à la maille du GCM est une question ouverte. En général, on néglige ce problème et on considère toujours (même lorsque ce n'est pas justifié) que les dimensions caractéristiques de la convection profonde sont petites devant celles de la maille.

### Bilan de l'environnement

Pour un courant vertical de fraction surfacique  $\sigma$  et de vitesse verticale  $w$ , le flux de masse  $M$  par unité de surface de la maille est :

$$\begin{aligned} M &= \rho w \sigma \\ &= -\frac{1}{g} \omega \sigma \end{aligned} \quad (1.2)$$

(noter que  $M$  est positif pour un courant ascendant) Soient  $M_i$  les divers flux de masse verticaux convectifs (ascendants ou descendants, saturés ou insaturés) et soit  $\tilde{M}$  le flux de masse vertical de l'environnement (c'est-à-dire tout ce qui est en dehors des courants convectifs) (tous flux exprimés par unité de surface de la maille) ; ces flux sont reliés au flux de masse  $\bar{M}$  moyen dans la maille par :

$$\begin{aligned} \bar{M} &= \tilde{M} + \sum_i M_i \\ &= \tilde{M} + M_c \end{aligned} \quad (1.3)$$

(où  $M_c$  est le flux de masse convectif net)

Noter que  $\bar{M}$  est une variable de grande échelle, donnée par les équations de la dynamique. Pour le modèle convectif, ce flux de masse moyen apparaît comme un forçage.

**Bilan de masse** On écrit que la variation de la masse d'air  $\tilde{m}$  de la partie de la tranche située dans l'environnement ( $\tilde{m} = \rho \delta z (1 - \sum_i \sigma_i) = \delta p / g (1 - \sum_i \sigma_i)$ ) est due : (1) aux échanges de masse horizontaux avec les courants convectifs (entraînement  $\epsilon_i$  et déentraînement  $\delta_i$  par unité de masse de la tranche) ; (2) aux échanges de masse horizontaux avec l'extérieur de la maille ; (3) aux échanges de masse verticaux :

$$\partial_t [\rho \delta z (1 - \sum_i \sigma_i)] = \tilde{M}(z) - \tilde{M}(z + \delta z) - (\sum_i \epsilon_i) \rho \delta z + (\sum_i \delta_i) \rho \delta z + \frac{1}{S_t} \int_{\Gamma} \vec{V} \vec{n} d\Gamma \rho \delta z \quad (1.4)$$

( $S_t$  est la surface totale de la maille). Soit, en utilisant l'identité  $\int_{\Gamma} \vec{V} \vec{n} d\Gamma = - \int_{\Sigma} \vec{\nabla} \vec{V} d\Sigma$  :

$$\begin{aligned} \partial_t (1 - \sum_i \sigma_i) &= g \partial_p \tilde{M} - \sum_i \epsilon_i + \sum_i \delta_i + \frac{1}{S_t} \int_{\Gamma} \vec{V} \vec{n} d\Gamma \\ \partial_t (\sum_i \sigma_i) &= -g \partial_p \tilde{M} + \sum_i \epsilon_i - \sum_i \delta_i + \vec{\nabla} \vec{V} \end{aligned} \quad (1.5)$$

( $\epsilon_i$  : entraînement ;  $\delta_i$  : déentraînement du courant ( $i$ ) ;  $\epsilon_i$  et  $\delta_i$  ont la dimension de  $\partial_z \tilde{M}$  ; une fois multipliés par l'épaisseur  $\delta z$  de la couche ils donnent les masses d'air retirées de l'environnement par entraînement et ajoutées à l'environnement par déentraînement par unité de surface de la maille).

### Bilan d'énergie statique avec eau liquide

$$\partial_t[(1 - \sum_i \sigma_i) \tilde{h}_w] = g \partial_p[\tilde{M} \tilde{h}_w] - \sum_i \epsilon_i \tilde{h}_w + \sum_i \delta_i h_{wDi} + \frac{1}{S_t} \int_{\Gamma} h_w \vec{V} \vec{n} d\Gamma \quad (1.6)$$

( $h_{wDi}$  : énergie statique avec eau liquide de l'air détraîné du courant ( $i$ ))

On fait l'hypothèse que  $\sum_i \sigma_i \ll 1$  :

$$\partial_t \tilde{h}_w - \tilde{h}_w \partial_t(\sum_i \sigma_i) = g \partial_p[\tilde{M} \tilde{h}_w] - \sum_i \epsilon_i \tilde{h}_w + \sum_i \delta_i h_{wDi} + \frac{1}{S_t} \int_{\Gamma} h_w \vec{V} \vec{n} d\Gamma \quad (1.7)$$

puis on ajoute l'équation de masse (1.5) multipliée par  $\tilde{h}_w$  à la dernière équation :

$$\partial_t \tilde{h}_w = g \tilde{M} \partial_p \tilde{h}_w + \sum_i \delta_i (h_{wDi} - \tilde{h}_w) - \overline{\vec{\nabla}(\vec{V} h_w)} + \tilde{h}_w \overline{\vec{\nabla} \vec{V}} \quad (1.8)$$

En négligeant dans l'intégrale  $\overline{\vec{\nabla}(\vec{V} h_w)}$  les contributions des zones des courants convectifs et en supposant  $h_w$  uniforme dans l'environnement on obtient finalement :

$$\partial_t \tilde{h}_w = g \tilde{M} \partial_p \tilde{h}_w + \sum_i \delta_i (h_{wDi} - \tilde{h}_w) - \overline{\vec{V} \vec{\nabla} h_w} \quad (1.9)$$

### Bilan de vapeur d'eau

$$\partial_t \tilde{q} = g \tilde{M} \partial_p \tilde{q} + \sum_i \delta_i (q_{tDi} - \tilde{q}) - \overline{\vec{V} \vec{\nabla} q} \quad (1.10)$$

où  $q_{tDi}$  désigne le contenu en eau total de l'air détraîné du courant ( $i$ ).

#### Remarques

Comme on a supposé qu'il n'y avait pas d'eau liquide dans l'environnement, l'énergie statique avec eau liquide  $\tilde{h}_w$  est égale à l'énergie statique sèche  $\tilde{h}_d$ . Les équations (1.9) et (1.10) fournissent donc directement les tendances de température et d'humidité en fonction des flux de masse ( $M_i$  et  $\delta_i$ ) et des propriétés ( $h_{wDi}$  et  $q_{tDi}$ ) des courants convectifs et de diverses variables de grande échelle ( $\tilde{M}$ ,  $\overline{\vec{V} \vec{\nabla} h_w}$  et  $\overline{\vec{V} \vec{\nabla} q}$ ).



## Expression finale des tendances de grande échelle

On peut effectuer **deux découpages différents entre convection et grande échelle**, selon que l'on exprime la subsidence induite à l'aide de  $\tilde{M}$  ou de  $M_c$  :

$$\begin{aligned}
 \partial_i \tilde{h}_w &= g\tilde{M}\partial_p \tilde{h}_w + \sum_i \delta_i [h_{wDi} - \tilde{h}_w] && -\overline{\vec{V}\vec{\nabla}h_w} \\
 &\text{ou, par la substitution } \tilde{M} \rightarrow \bar{M} - M_c && \\
 \partial_i \tilde{h}_w &= \underbrace{-gM_c\partial_p \tilde{h}_w + \sum_i \delta_i [h_{wDi} - \tilde{h}_w]}_{Q_1} && \underbrace{+g\bar{M}\partial_p \tilde{h}_w - \overline{\vec{V}\vec{\nabla}h_w}}_{\text{Grande Echelle}}
 \end{aligned} \tag{1.11}$$

Dans le second découpage, le terme de grande échelle peut aussi s'écrire comme la **divergence d'un flux** (forme conservative des équations) :

$$g\bar{M}\partial_p \tilde{h}_w - \overline{\vec{V}\vec{\nabla}h_w} = -[\partial_p(\overline{\omega h_w}) + \vec{\nabla}(\overline{\vec{V}h_w})]$$

**La tradition est de choisir le second découpage et d'avoir la tendance de grande échelle sous forme conservative.**

Conséquence : termes convectifs et de grande échelle à peu près opposés en général.

## Schéma conceptuel

- **Système convectif** = colonne convective + courants de densité + nuages associés.
- L'aire de la colonne convective est négligeable.
- **L'intensité convective** est contrôlée par les processus sous-nuageux (PBL, courants de densité, orographie)  $\rightarrow$  **déclenchement et fermeture**.
- La colonne convective est composée de flux de masse saturés (ascendant ou descendant) ; ces flux verticaux **entraînent et détraînent**.
- La colonne convective est accompagnée de **descentes précipitantes** (flux insaturés).
- La convection consomme de la **CAPE** (Convective Available Potential Energy).
- La convection subit une inhibition (**CIN** = Convective INhibition).

# Chapitre 2

## Le schéma d'Emanuel

### 2.1 Description générale

Le schéma d'Emanuel est caractérisé par :

- l'hypothèse que les courants ascendants sont suffisamment violents pour que les particules soient "catapultées" ('lofted', en anglais) de leur niveau de formation jusqu'à leur niveau de mélange sans avoir le temps de subir quelque échange que ce soit en cours de route ; cette hypothèse implique en particulier que les courants ascendants transportent intégralement le condensat qu'ils contiennent.
- la présence d'une **ascendance adiabatique** (corrolaire de l'hypothèse précédente), constituée des particules formées sous la base du nuage.
- la présence de multiples courants saturés issus du mélange d'air prélevé sur l'ascendance adiabatique avec l'air environnant ; ces courants entraînent au niveau où, après précipitation et évaporation de leur eau nuageuse, ils se retrouvent avec une flottabilité nulle : le schéma d'Emanuel est un **schéma en flux de masse à flottabilité différenciée** ('buoyancy sorted mass flux scheme', en anglais).
- la représentation explicite d'un **courant descendant insaturé** (la plupart des autres schémas ne représentent aucun courant insaturé).

La paramétrisation d'Emanuel représente, selon son auteur, tout le champ de courants nuageux ou insaturés accompagnant un ou des cumulonimbus ; elle fournit donc à la fois l'effet des petits cumulus, des cumulus congestus, des cumulonimbus et des enclumes composant un système convectif profond. Pour des raisons de simplicité seul un cumulonimbus est représenté sur La figure (2.1), mais il faut imaginer que la zone d'ascendance adiabatique, par exemple, est en fait constituée de multiples courants répartis entre des nuages d'épaisseurs variées.

L'ascendance adiabatique est la colonne vertébrale du schéma. C'est un courant constitué de particules issues du bas de la couche sous-nuageuse et montant jusqu'à son niveau de flottabilité neutre (LNB = Level of Neutral Buoyancy). Cette ascendance est épluchée au cours de son ascension par des tourbillons, ce qui fait que le débit de l'ascendance adiabatique diminue en montant. Du point de vue de la catapulte, on voit que l'on a tout un spectre de particules catapultées à des niveaux s'étageant entre le niveau de condensation (LCL = Lifting Condensation Level) et LNB. Lors de l'épluchage une partie du condensat de la particule est précipitée. Le fluide restant est mêlé à l'air environnant (ce qui constitue le processus d'entraînement) pour engendrer un spectre de mélanges se différenciant par leur proportion d'air environnant. Chacun de ces mélanges est à son tour catapulté jusqu'au niveau où, après précipitation et évaporation de son eau nuageuse, il se retrouve avec une flottabilité nulle (processus de déentraînement). Enfin, dernier courant du schéma, un courant descendant insaturé est engendré par l'évaporation d'une partie de la pluie tombant en air clair (une proportion fixe de la pluie est supposée tomber en dehors du nuage).

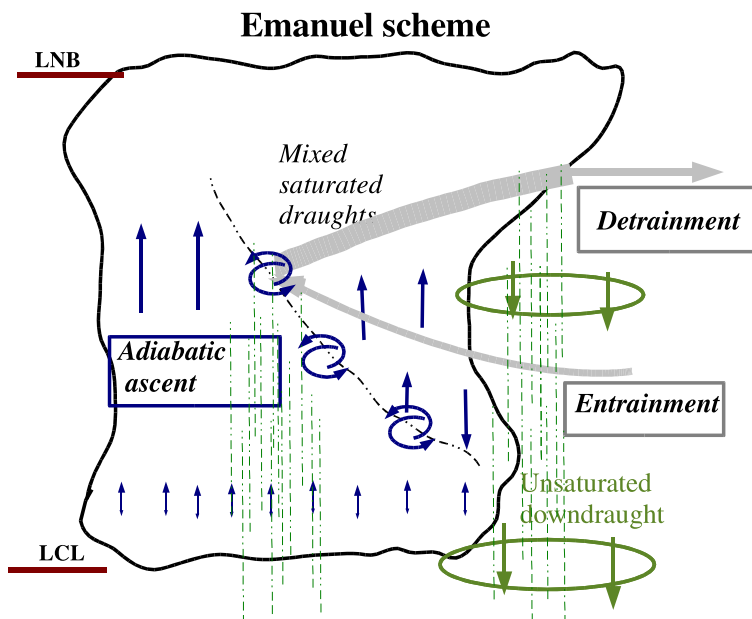


FIG. 2.1 – Schéma de principe de la paramétrisation d'Emanuel de la convection moyenne ou profonde

## Esquisse des équations du schéma d'Emanuel

1.  $M_B = f(\text{L.S., soulèvement})$ ; **Fermeture**  
 $\partial_z M_a = \text{épluchage}$   
 $\eta_a(z) = \text{adiabatique}$  .
2.  $\partial_z \partial_{z'} M_m = f(\eta_a(z), P(F), \text{L.S., Conv\_Pr}(\eta_a), \text{Conv\_Pr}(\eta_m))$   
 $\eta_m(z, z', \zeta) = \text{adiabatique}$   
**entraînement, déentraînement.**
3.  $\text{Source\_Pr}(z) = \text{Conv\_Pr}(\eta_a(z)) + \text{Conv\_Pr}(\eta_m(z))$   
 $\partial_z \text{Pr} = \text{Source\_Pr} - \text{Evap}$   
 $\partial_z (M_p^2) \simeq (\theta_p - \tilde{\theta})$   
 $M_p \partial_z \theta_p \simeq \text{Evap} + \text{Entrainement}$  .

4.
$$[\partial_t \tilde{\theta}]_{conv} = \begin{aligned} & [\textit{subsidence induite}] \\ & + [\textit{ascendance induite}] \\ & - [\textit{evap}] \end{aligned} \quad (2.1)$$

5. **Déclenchement**

## 2.2 Descentes précipitantes

### 2.2.1 Définition

**L'évaporation des précipitations en air clair et la fusion de la glace créent un puits froid**

En haut des colonnes convectives, les précipitations sont essentiellement composées de glace. Lorsqu'elles traversent l'isotherme  $0^\circ$  (vers 600 hPa sous les Tropiques), ces précipitations solides vont fondre, engendrant un puits froid.

Qu'elles soient liquides ou solides, les précipitations qui tombent en dehors du nuage convectif subissent une évaporation ou une sublimation, ce qui engendre un puits froid tout le long de leur descente. En dessous de la base du nuage convectif la totalité des précipitations tombe en milieu insaturé; le puits froid est alors très intense. Au-dessus de la base du nuage, la proportion de pluie tombant en air clair dépend fortement de la géométrie du nuage mais reste relativement faible (dans la paramétrisation d'Emanuel, on prend une hypothèse particulièrement simple : au-dessus de la base 15% des précipitations tombent en air clair).

Le résultat de ces divers processus est un puits froid dans les zones de précipitation, composé d'un puits à peu près uniforme sur toute la hauteur

des précipitations et de deux renforcements du refroidissement l'un au niveau de l'isotherme  $0^\circ$ , l'autre sous la base du nuage.

### **Le puits froid induit par les changements de phase des précipitations engendre des courants descendants**

L'air des zones de précipitation est refroidi par l'évaporation, la sublimation et la fusion de l'eau précipitée et acquiert ainsi une flottabilité négative, ce qui induit un mouvement descendant. Ces courants descendants d'air froid des zones de précipitation s'appellent les **descentes précipitantes** ('precipitating downdrafts' en anglais ou 'precipitating downdrafts' en américain). Ce sont des courants d'échelle convective (quelques dizaines de kilomètres) présentant des vitesses verticales de l'ordre de quelques m/s (5 m/s est une valeur habituelle). Ils jouent un rôle majeur dans le déroulement temporel de la convection en apportant de l'air froid en bas de la troposphère.

#### **2.2.2 Problématique**

Rôle important des descentes précipitantes dans la régulation de la convection

- Rôle inhibiteur : refroidissement (et souvent assèchement) du bas de la couche limite (échelle : quelques jours).
- Rôle amplificateur : alimentation des courants de densité  $\rightarrow$  génération de nouvelles tours convectives.

Le modèle d'Emanuel semble donner des résultats satisfaisants, mais des validations plus précises restent à faire.

#### **2.2.3 Modèle**

On considère deux courants descendants : d'une part le courant d'eau condensée (fraction massique d'eau condensée  $q_{lp}$ , vitesse de chute  $\omega_t = 45$  Pa/s, sources d'eau condensée issue de l'épluchage de l'ascendance adiabatique  $P_{ra}$  et issue du détraînement des flux mélangés  $P_{rm}$ ), d'autre part le courant insaturé (débit massique  $M_p$ , humidité  $q_{vp}$ , température potentielle  $\theta_p$ ). Ces deux courants échangent de l'eau (par évaporation des précipitations) et de la chaleur (on suppose qu'à un même niveau ils sont à la même température).

Le modèle est stationnaire. Son but, bien sûr, est de déterminer le flux de masse  $M_p$  et les flux détraînés ainsi que les propriétés du fluide détraîné, ce qui permettra, grâce aux formules du premier chapitre, de calculer l'effet des descentes précipitantes sur l'environnement.

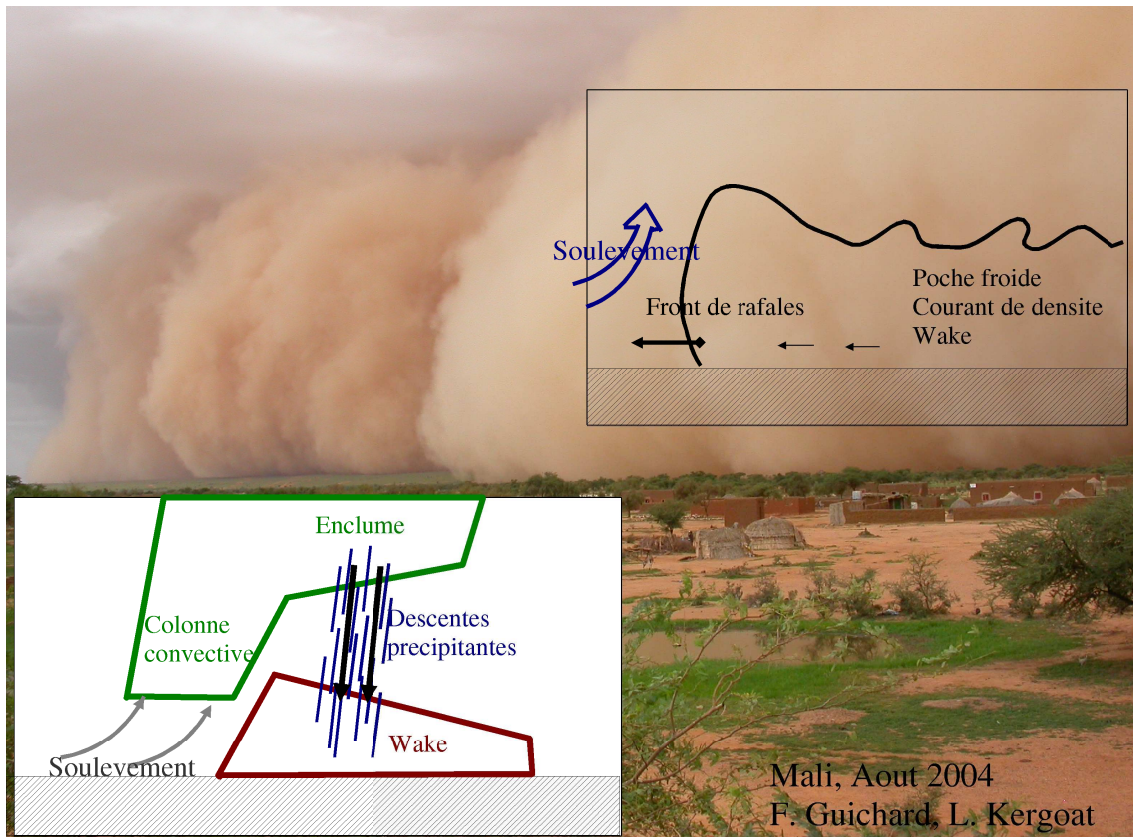


FIG. 2.2 – Photographie d’un courant de densité prise au Mali en Aout 2004 et schéma du couplage du courant de densité avec la convection

La technique de construction du modèle va à nouveau consister à écrire les équations de bilan (d’impulsion, d’énergie et de vapeur d’eau pour le courant insaturé, d’eau condensée pour le courant de précipitations) et à en tirer un moyen de calcul des évolutions des courants insaturé et d’eau condensée au fur et à mesure de leur descente. Nous nous contentons ici de détailler l’écriture du bilan d’impulsion pour le courant insaturé. L’établissement des autres formules est laissé comme exercice.

La fraction surfacique de la descente précipitante est supposée constante ( $\sigma_d = 0.01$ ). La proportion tombant en ciel clair est fixée à  $\sigma_s = 0.15$ . Le taux d’évaporation des précipitations  $E$  (en kg d’eau évaporée par kg d’air de la descente insaturée et par s) est supposé donné.

## Equation de bilan d'impulsion

On écrit que l'impulsion de la portion de descente comprise entre les surfaces de pressions  $p$  et  $p + \delta p$  est constante :

$$[\text{Source d'impulsion}] + [\text{Advection d'impulsion}] = 0$$

Comme on suppose que la section du courant est constante, toute accélération du courant entraîne une variation du flux de masse  $M_p = \rho w \sigma_d$  (comme la vitesse verticale  $w$  est négative dans les descentes précipitantes, ce flux de masse est négatif). On est ainsi amené à distinguer deux cas :

- *Le cas entraînant* : si le courant accélère, alors le flux de masse augmente en valeur absolue et il y a entraînement d'air de l'environnement dans la descente précipitante.
- *Le cas détraînant* : si le courant décélère, alors il y a détraînement d'air de la descente précipitante vers l'environnement.

Différents termes de l'équation de bilan :

- Le flux de masse entrant par la face supérieure est  $-M_p(p)$  ; il transporte l'impulsion  $w$  par unité de masse ; le flux d'impulsion entrant par la face supérieure est donc  $-[M_p w](p)$  ; il est négatif.
- De la même façon, le flux (positif) entrant en bas est  $[M_p w](p + \delta p)$ .
- Le flux d'impulsion entrant par les faces latérales est nul dans le cas entraînant. Dans le cas détraînant, le flux de masse entrant par les faces latérales est  $(M_p(p) - M_p(p + \delta p))$  et il transporte l'impulsion  $\bar{w}$  par unité de masse ( $\bar{w}$  désignant la vitesse verticale moyenne entre  $p$  et  $p + \delta p$ ) ; le flux (positif) d'impulsion entrant par les faces latérales est alors  $\bar{w} (M_p(p) - M_p(p + \delta p))$ .
- La source d'impulsion est la force d'Archimède dont la composante verticale est  $\rho g \frac{\theta_p - \tilde{\theta}}{\tilde{\theta}} \sigma_d \delta z$ , ce qui s'écrit aussi  $\frac{\theta_p - \tilde{\theta}}{\tilde{\theta}} \sigma_d \delta p$ . Cette composante verticale est négative.

La nullité du bilan s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Cas entraînant} \quad -[M_p w](p) + [M_p w](p + \delta p) \quad + \frac{\theta_p - \tilde{\theta}}{\tilde{\theta}} \sigma_d \delta p = 0 \\ \text{Cas détraînant} \quad -[M_p w](p) + [M_p w](p + \delta p) \\ \quad \quad \quad + \bar{w} (M_p(p) - M_p(p + \delta p)) \quad + \frac{\theta_p - \tilde{\theta}}{\tilde{\theta}} \sigma_d \delta p = 0 \end{array} \right. \quad (2.2)$$

En substituant  $M_p/(\rho \sigma_d)$  à  $w$  et en prenant la limite  $\delta p \rightarrow 0$ , on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Cas entraînant} \quad \partial_p \left( \frac{M_p^2}{\rho} \right) + \frac{\theta_p - \tilde{\theta}}{\tilde{\theta}} \sigma_d^2 = 0 \\ \text{Cas détraînant} \quad \partial_p \left( \frac{M_p^2}{\rho} \right) - \frac{M_p}{\rho} \partial_p M_p + \frac{\theta_p - \tilde{\theta}}{\tilde{\theta}} \sigma_d^2 = 0 \end{array} \right. \quad (2.3)$$

## 2.2.4 Récapitulation des équations du modèle de descente précipitante

### Impulsion

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Cas entraînant} \quad \partial_p \left( \frac{M_p^2}{\rho} \right) = - \frac{\theta_p - \tilde{\theta}}{\tilde{\theta}} \sigma_d^2 \\ \text{Cas détraînant} \quad \partial_p \left( \frac{M_p^2}{\rho} \right) = \frac{M_p}{\rho} \partial_p M_p - \frac{\theta_p - \tilde{\theta}}{\tilde{\theta}} \sigma_d^2 \end{array} \right. \quad (2.4)$$

### Enthalpie

$$\left\{ \begin{array}{l} g M_p \frac{1}{\tilde{\theta}} (\partial_p \theta_p) = \frac{\sigma_d \sigma_s}{C_p T} L_v E + \mathcal{E}_\theta \\ \mathcal{E}_\theta = \begin{cases} \frac{g}{\tilde{\theta}} (\tilde{\theta} - \theta_p) \partial_p M_p & \text{si } \partial_p M_p < 0 \quad (\text{cas entraînant}) \\ 0 & \text{si } \partial_p M_p > 0 \quad (\text{cas détraînant}) \end{cases} \end{array} \right. \quad (2.5)$$

### Humidité

$$\left\{ \begin{array}{l} g M_p (\partial_p q_p) = \sigma_d \sigma_s E + \mathcal{E}_q \\ \mathcal{E}_q = \begin{cases} g (\tilde{q} - q_p) \partial_p M_p & \text{si } \partial_p M_p < 0 \quad (\text{cas entraînant}) \\ 0 & \text{si } \partial_p M_p > 0 \quad (\text{cas détraînant}) \end{cases} \end{array} \right. \quad (2.6)$$

### Eau précipitante

$$\partial_p (\omega_T q_{lp} \sigma_d) = \text{Pr}_a + \text{Pr}_m - \sigma_d \sigma_s E \quad (2.7)$$

$$E = \frac{p(q^* - q_{vp}) \sqrt{q_{lp}}}{apq^* + b}$$

$$a = 2 \cdot 10^3 \text{ s} \quad ; \quad b = 10^4 \text{ Pa s}$$

**Tendances** Pour écrire l'effet des descentes précipitantes sur l'environnement on utilise les équations (1.9) et (1.10) où on substitue au flux de masse détraîné  $\delta_i$  l'expression  $-\rho g \partial_p M_p$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\partial_t \tilde{\theta})_{p,k} = g M_p (\partial_p \tilde{\theta})_k \quad \text{si } \partial_p M_p < 0 \text{ cas entr.} \\ (\partial_t \tilde{\theta})_{p,k} = g M_p (\partial_p \tilde{\theta})_k - g (\partial_p M_p) (\theta_p - \tilde{\theta}) \quad \text{si } \partial_p M_p > 0 \text{ cas detr.} \end{array} \right. \quad (2.8)$$



On obtient une écriture plus simple en combinant ces équations avec (2.5) et (2.6) :

$$\begin{cases} (\partial_t \tilde{\theta})_{p,k} = -g \partial_p [M_p(\theta_p - \tilde{\theta})]_k - \frac{\sigma_d \sigma_s \tilde{\theta}}{C_p \tilde{T}} L_v E \\ (\partial_t \tilde{q})_{p,k} = -g \partial_p [M_p(q_p - \tilde{q})]_k + \sigma_d \sigma_s E \end{cases} \quad (2.9)$$

## 2.3 Annexes

### Annexe A : Enthalpies et énergies statiques

#### Enthalpies massiques :

Grandeurs conservées dans les transformations adiabatiques isobares.

$$\left. \begin{array}{l} k \\ L_v(T) \\ k_d \\ k_l \end{array} \right\} \begin{array}{l} = (1 - q_t)k_d + q_vk_v + q_lk_l \\ = k_v - k_l \\ = C_{pd}T \\ = C_lT \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \text{enthalpie} \\ k = [(1 - q_t)C_{pd} + q_tC_l]T + L_vq_v \end{array} \right\} \quad (2.10)$$

Comme  $L_v - (C_{pv} - C_l)T = \text{cste}$ , l'enthalpie avec eau liquide  $k_w = k - q_t[L_v - (C_{pv} - C_l)T]$  est aussi conservée dans les transformations adiabatiques isobares :

$$k_w = [(1 - q_t)C_{pd} + q_tC_{pv}]T - L_vq_l$$

#### Energies statiques :

grandeurs conservées dans les transformations adiabatiques où le changement de pression est purement hydrostatique.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Adiabatisme : } dk = \frac{dp}{\rho} \\ \text{Hydrostasie : } \frac{dp}{\rho} = -gdz \end{array} \right\} dk + gdz = 0 \quad (2.11)$$

$$\text{Energie statique humide : } h = [(1 - q_t)C_{pd} + q_tC_l]T + L_vq_v + gz$$

$$\text{Energie statique sèche : } h_d = [(1 - q)C_{pd} + qC_l]T + gz$$

$$\text{Energie statique avec eau liquide : } h_w = [(1 - q_t)C_{pd} + q_tC_{pv}]T - L_vq_l + gz$$

**Enthalpie totale :** grandeur conservée dans un écoulement stationnaire, sans dissipation ni diffusion.

$$h_0 = h + \frac{1}{2}V^2 = k + \frac{1}{2}V^2 + gz$$

## Annexe B : Équations de bilan

On considère une grandeur conservative  $G$  décrite par sa quantité volumique  $q$ . L'évolution de la quantité de  $G$  contenue dans un volume  $\Omega$  de frontière  $\Sigma$  peut s'écrire sous la forme :

$$\partial_i \left( \int_{\Omega} q \, d\Omega \right) = \int_{\Omega} [\text{source}] \, d\Omega + \int_{\Sigma} q \, \vec{V} \vec{n} \, d\Sigma \quad (2.12)$$

où  $\vec{n}$  désigne la normale à  $\Sigma$  entrant dans  $\Omega$ .

Pour effectuer des développements à partir de l'équation (2.12) la formule passe-partout suivante, valable pour toute fonction  $f$  raisonnable, est très utile :

$$\int_{\Omega} \partial_i f \, d\Omega = - \int_{\Sigma} f n_i \, d\Sigma \quad (2.13)$$

où la normale est entrante et où  $\partial_i$  désigne la dérivée dans la direction  $i$ .