

Physique des nuages :

## 4. Micro-physique des nuages chauds

Jean-Yves GRANDPEIX ; Catherine RIO

Laboratoire de Météorologie Dynamique

## **Idée centrale**

Un nuage chaud est fait de gouttelettes d'eau liquide.

Si on connaît le spectre des tailles des gouttelettes, alors on peut déterminer l'épaisseur optique et l'albedo du nuage, c'est-à-dire les variables affectant le bilan radiatif terrestre.

Le principe du cours est donc de montrer comment déterminer les spectres de tailles des gouttelettes, puis d'établir le lien avec les propriétés radiatives des nuages.

## **Micro-physique des nuages : plan du cours**

- I - Micro-physique :
  - I-1 Généralités ; importance des nuages chauds
  - I-2 Aérosols - Noyaux de condensation (CCN) - Gouttelettes
  - I-3 - Croissance des gouttelettes
- II - Effet radiatif et dynamique nuageuse

# **I - Micro-physique**

I-1-Micro-physique des nuages :  
Generalites ; importance des nuages chauds

## Micro-physique des nuages : généralités (1)

Qu'est-ce-que la micro-physique des nuages ?

Différentes micro-échelles :

- $< 1\mu m$  : aérosols, noyaux de condensation.
- quelques  $\mu m$  : gouttelettes
- mm : gouttes.
- cm : micro-hétérogénéités.
- $> 1cm$ , jusqu'à la dizaine de mètres : turbulence, entraînement.

## Micro-physique des nuages : généralités (2)

Qu'est-ce-que la micro-physique des nuages chauds ?

Il s'agit des **nuages sans glace**.

La glace joue un rôle très important dans les processus nuageux et surtout dans les processus de précipitation (toutes les pluies un peu fortes impliquent des processus glacés : effet Bergeron). Mais ces processus à 3 phases sont complexes et très mal connus.

On se contente ici d'aborder de façon simple les **processus nuageux à 2 phases** (et c'est bien assez compliqué comme cela).

## Nuages chauds : les strato-cumulus



## Nuages chauds : les cumulus



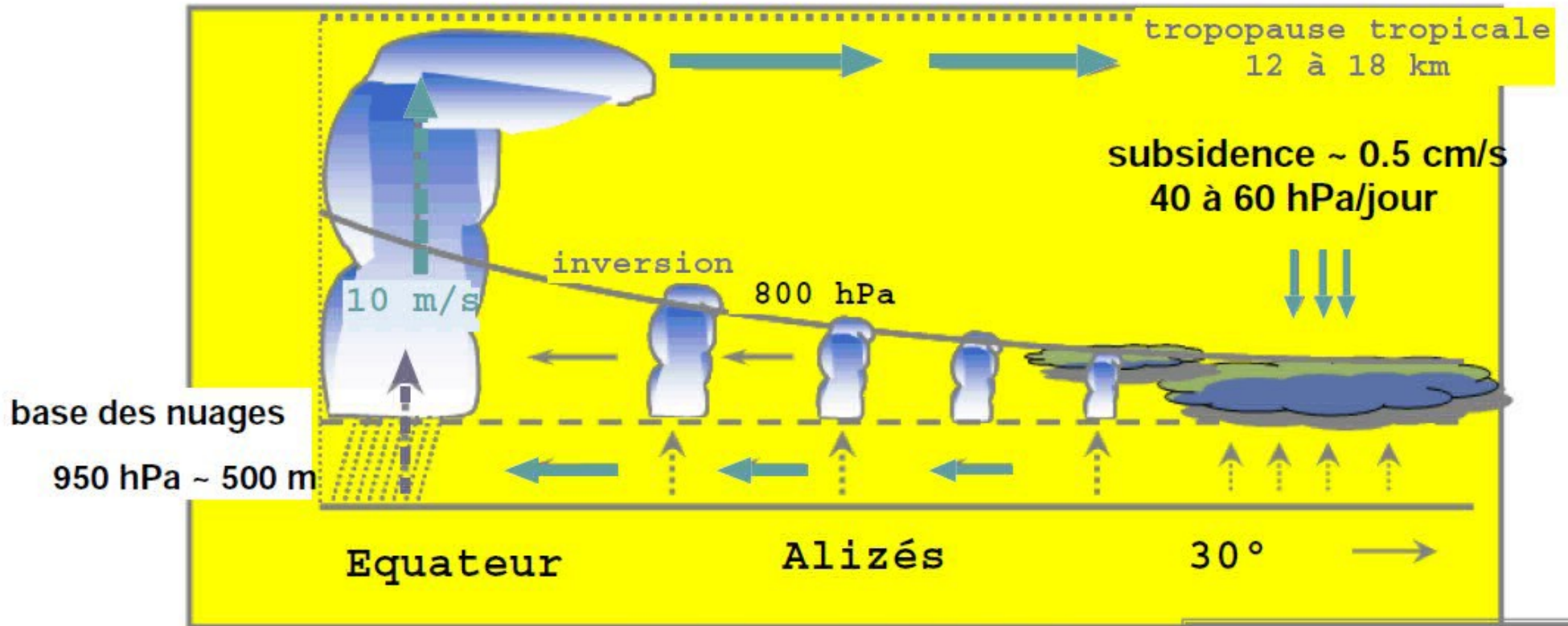


## Nuages avec glace : cumulus congestus





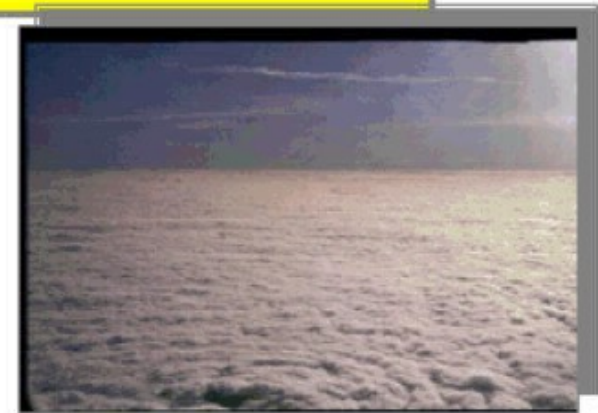
# Nuages sur les océans tropicaux



Cumulo-nimbus précipitants



Cumulus

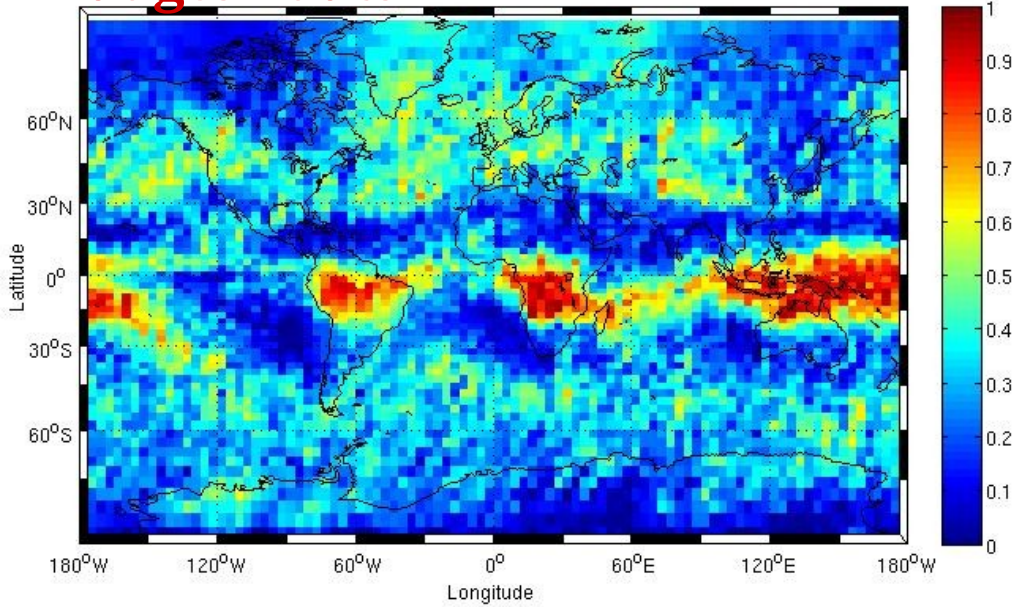


Strato-cumulus

# Fraction nuageuse (observations CALIPSO)

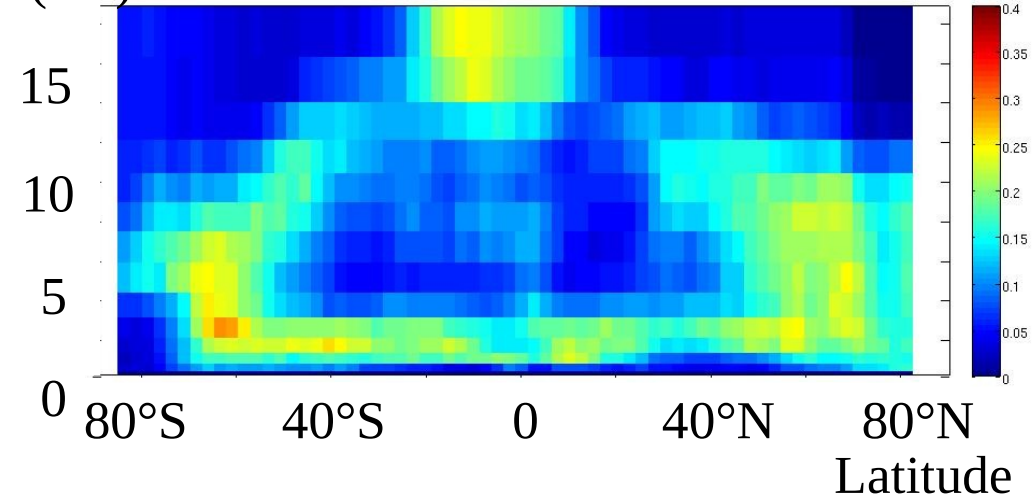
jan-fév-mars

**nuages hauts**

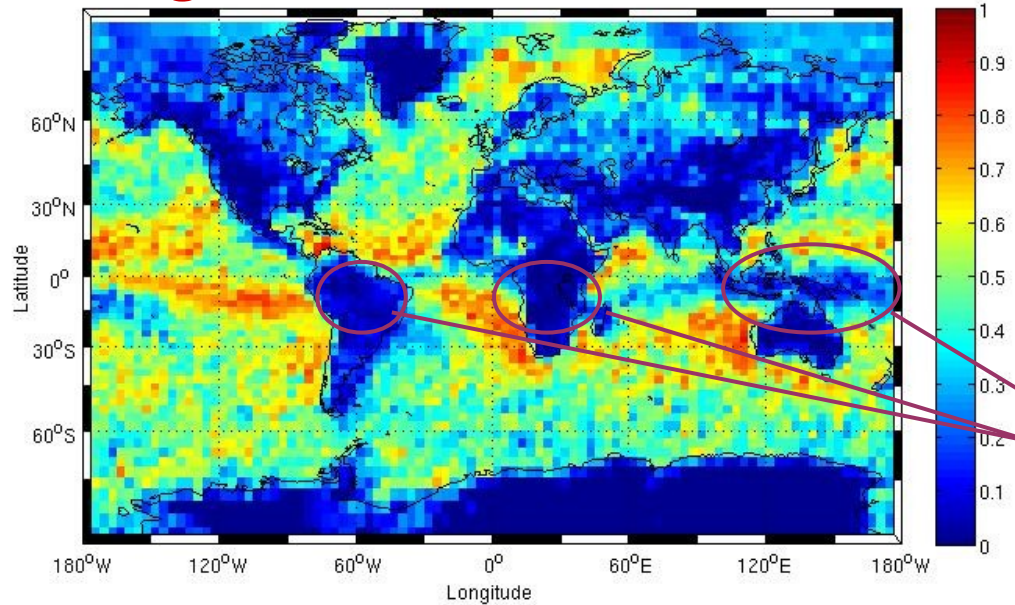


Altitude  
(km)

Moyenne zonale



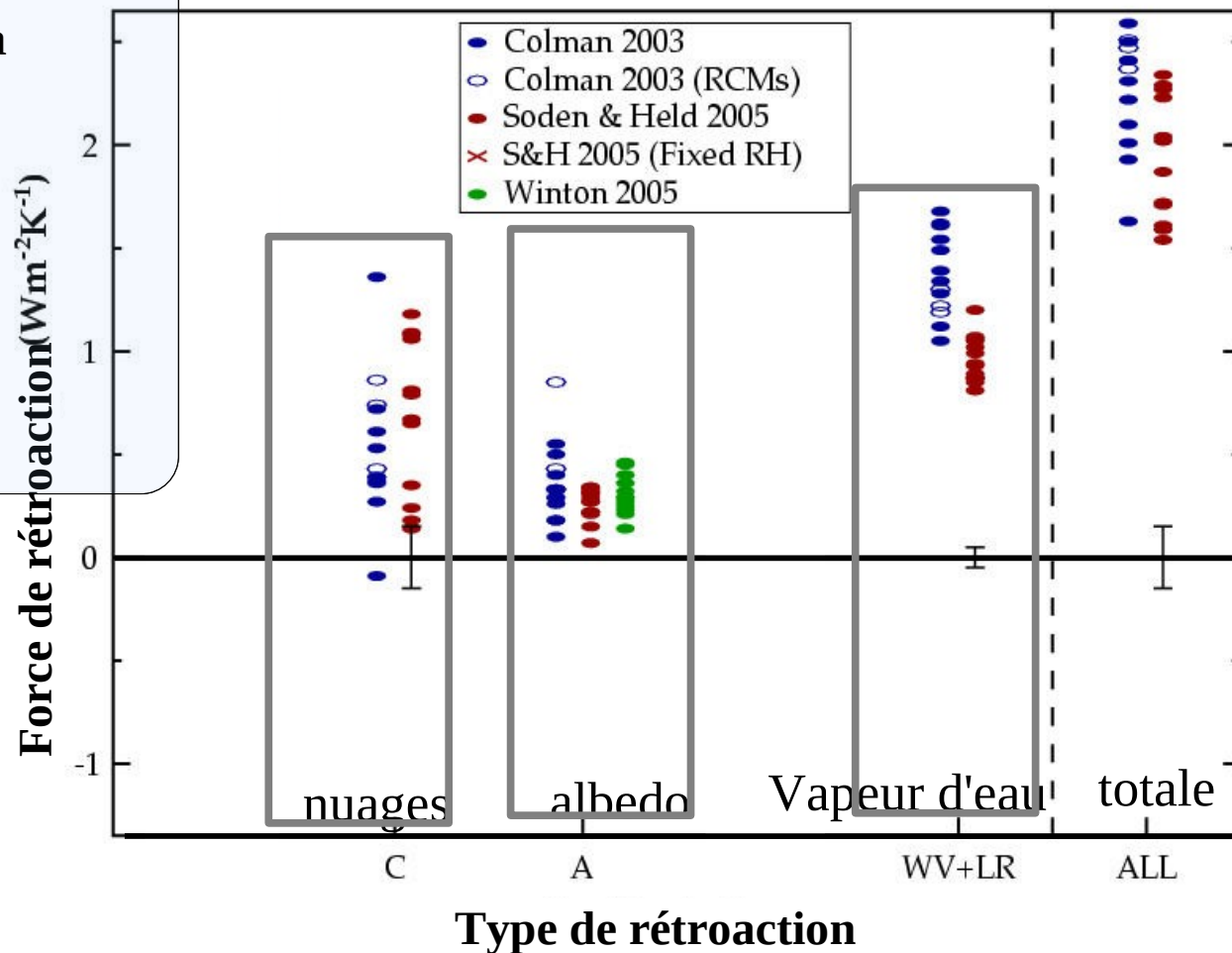
**nuages bas**



effet de masque des nuages

## Incertitudes liées aux différentes rétroactions

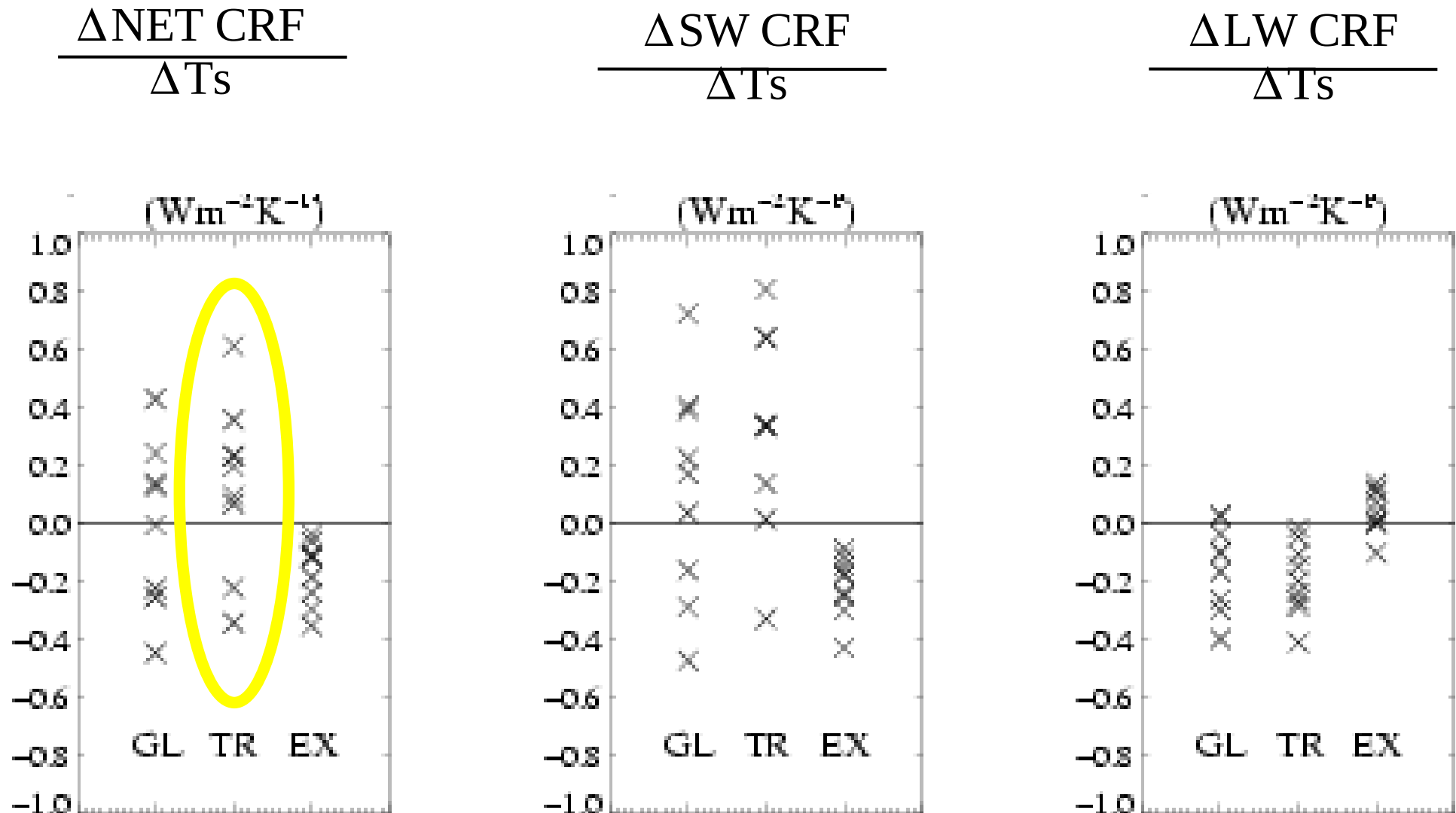
- La rétroaction la plus forte est celle liée à la vapeur d'eau.
- Depuis le précédent rapport du GIEC, il y a convergence des modèles sur les rétroactions liées à la vapeur d'eau et à la neige (même si une dispersion non négligeable demeure).
- En revanche, il n'y a aucune convergence concernant la rétroaction nuageuse = principale cause d'incertitude.



# Cloud Feedback Intercomparison Project (CFMIP)

2xCO<sub>2</sub> experiments; 8 GCMs; slab ocean

Taux de variation du forçage radiatif des nuages (W/m<sup>2</sup>/K)



(Webb et al., Clim. Dyn., 2005)

## **Récapitulation :**

Les nuages chauds sont au coeur de l'incertitude dans la prévision climatique.

De quoi sont-ils faits ?



## Micro-physique : historique

Travaux fondateurs de **John Aitken** (1880) :

"The conclusion which may be drawn from these experiments are

- 1st, that when water vapour condenses in the atmosphere, it always does so on some solid nucleus ;
- 2d, that the dust particles in the air form the nuclei on which it condenses ;
- 3d, if there was no dust in the air there would be no fogs, no clouds, no mists, and probably no rain."

Les observations d'Aitken ont été théorisées par Köhler (1921).

Ne pas oublier : C.T.R. Wilson a montré ensuite (1895) que même lorsqu'il n'y a plus aucun noyau de condensation, des gouttelettes peuvent se former lorsque la sursaturation devient suffisante. D'où un nouveau détecteur de particules ;

Wilson cloud chamber, 1912.

Voir par exemple :

[http://www-outreach.phy.cam.ac.uk/camphys/physicists/physicists\\_wilson.htm](http://www-outreach.phy.cam.ac.uk/camphys/physicists/physicists_wilson.htm)



## Mise en évidence expérimentale des processus nuageux

L'expérience de la bouteille permet de montrer :

- la formation de gouttelettes sous l'action d'une détente adiabatique.
- la structure très hétérogène du milieu nuageux (double diffusion gouttelettes - vapeur d'eau).
- la vitesse de chute des gouttelettes, d'autant plus grande que les gouttelettes sont plus grosses.
- le rôle des aérosols.

I-2-Aerosols, noyaux de condensation,  
gouttelettes

## Equilibre liquide-vapeur

### Pressions

$e$  = pression partielle de vapeur d'eau.

$e_s(T)$  = pression saturante sur interface plane d'équilibre liquide-vapeur  
(interface = passage continu d'une phase à l'autre)

### Equilibre sur interface courbe

(il s'agit d'une méthode pour retrouver les formules, non d'une démonstration, laquelle passerait par les potentiels chimiques)

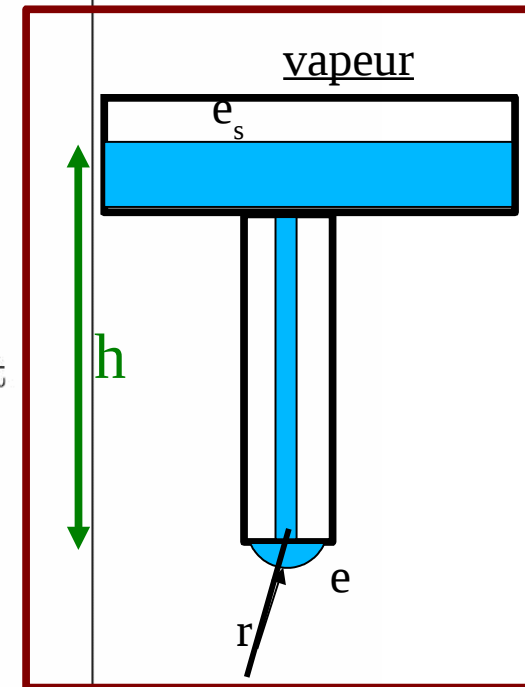
Système liquide-vapeur supposé à l'équilibre ; l'interface supérieure est plane (pression  $e_s$ ) ; l'interface inférieure est courbe ; les forces de capillarité assurent l'équilibre.

Soit  $e$  la pression dans la vapeur au voisinage du ménisque. L'équilibre du gaz isotherme donne :

$$e = e_s \exp\left(\frac{gh}{R_v T}\right)$$

L'équilibre de la colonne liquide donne :

$$e + \frac{2\sigma}{r} = e_s + \rho_l gh$$



# Gouttelette d'eau pure

D'où :

$$\frac{e}{e_s} = \exp\left(\frac{e - e_s + \frac{2\sigma}{r}}{\rho_l R_v T}\right)$$

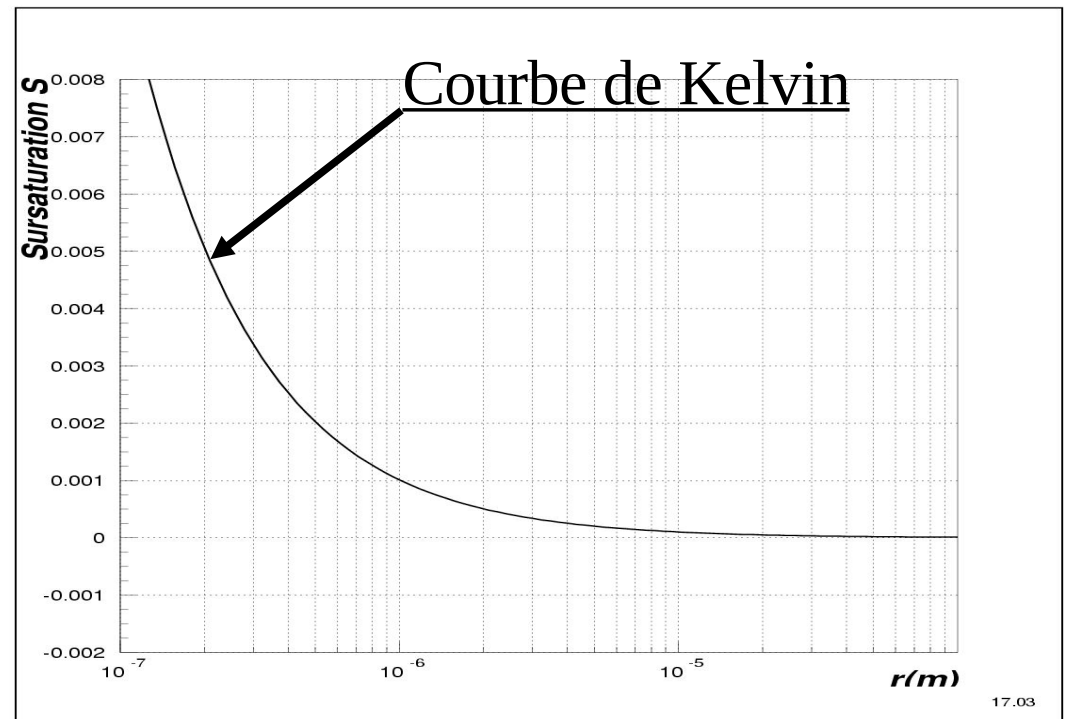
Approximation :

$$\frac{e}{e_s} = \exp\left(\frac{2\sigma}{r \rho_l R_v T}\right) \quad \text{Loi de Kelvin}$$

Définition : Sursaturation  $S = \frac{e}{e_s} - 1$

Les valeurs de sursaturation nécessaires à l'apparition d'une gouttelette selon la loi de Kelvin sont inaccessible dans les milieux naturels.

C'est là que vont entrer en jeu les aérosols.



## Les aérosols

### Origines

- Bulles éclatant à la surface des océans.
- Soulèvement de poussières.
- Activités humaines.
- Feux de forêts.
- Conversion gaz  $\longrightarrow$  particule :  $\text{SO}_2$ .

### Types

Tailles : 0.1 à 1  $\mu\text{m}$ .

Composition : sels, composés organiques, quelques minéraux (mais nucléation, c'est-à-dire le "mouillage" initial, difficile). Élément principal : les sulfates.

## Aérosols sulfatés

**La présence d'un soluté modifie la pression de vapeur saturante :**

pour  $N_s$  moles de soluté et  $N_w$  moles d'eau, la pression de vapeur est diminuée

d'un facteur  $\frac{N_w}{N_w + N_s} \simeq (1 - \frac{N_s}{N_w})$  (Loi de Raoult) :

$$\frac{e}{e_s} = (1 - \frac{N_s}{N_w}) \exp(\frac{2\sigma}{r\rho_l R_v T})$$

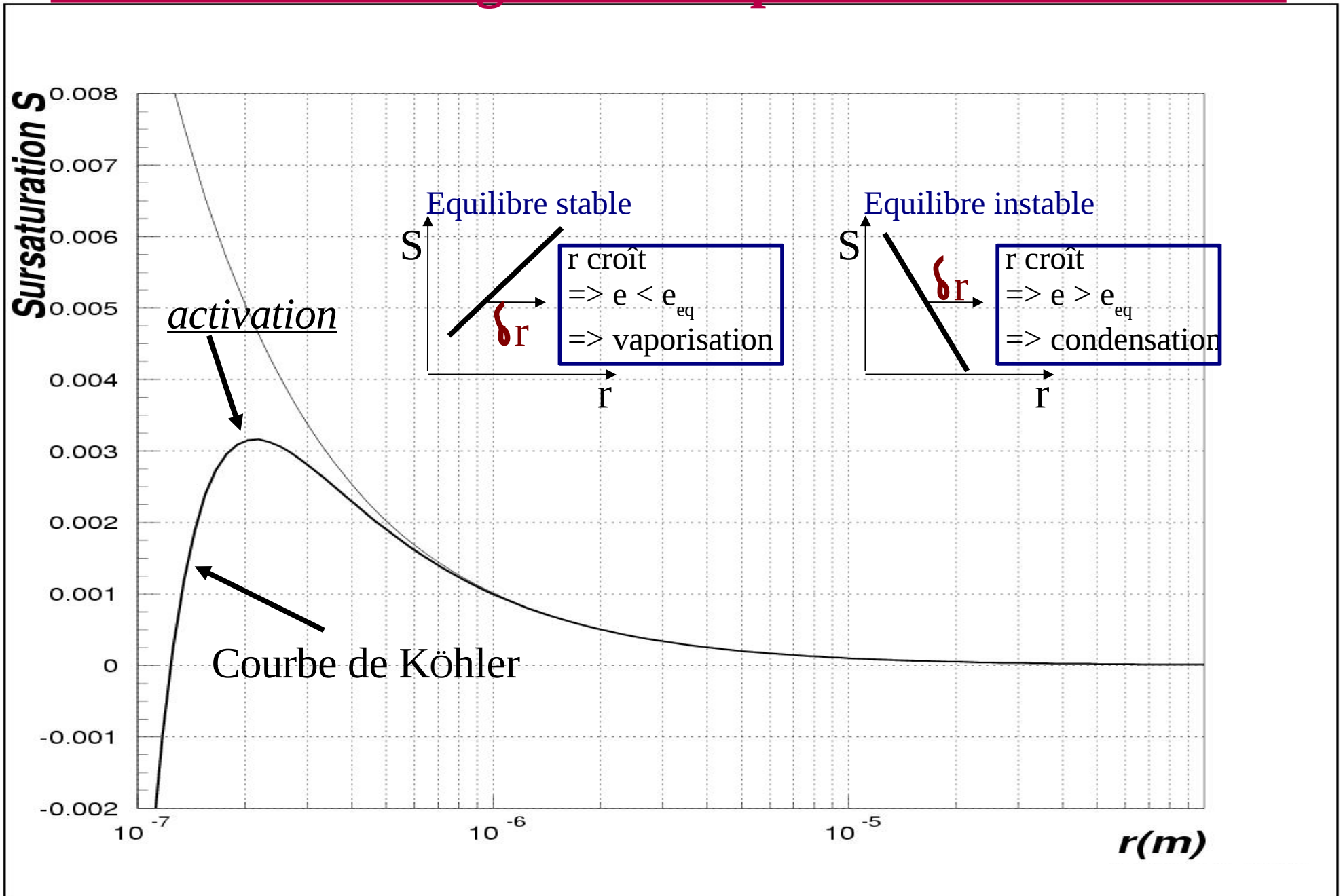
Au premier ordre :

$$S = \frac{A}{r} - \frac{B}{r^3} \quad \text{Loi de Köhler}$$

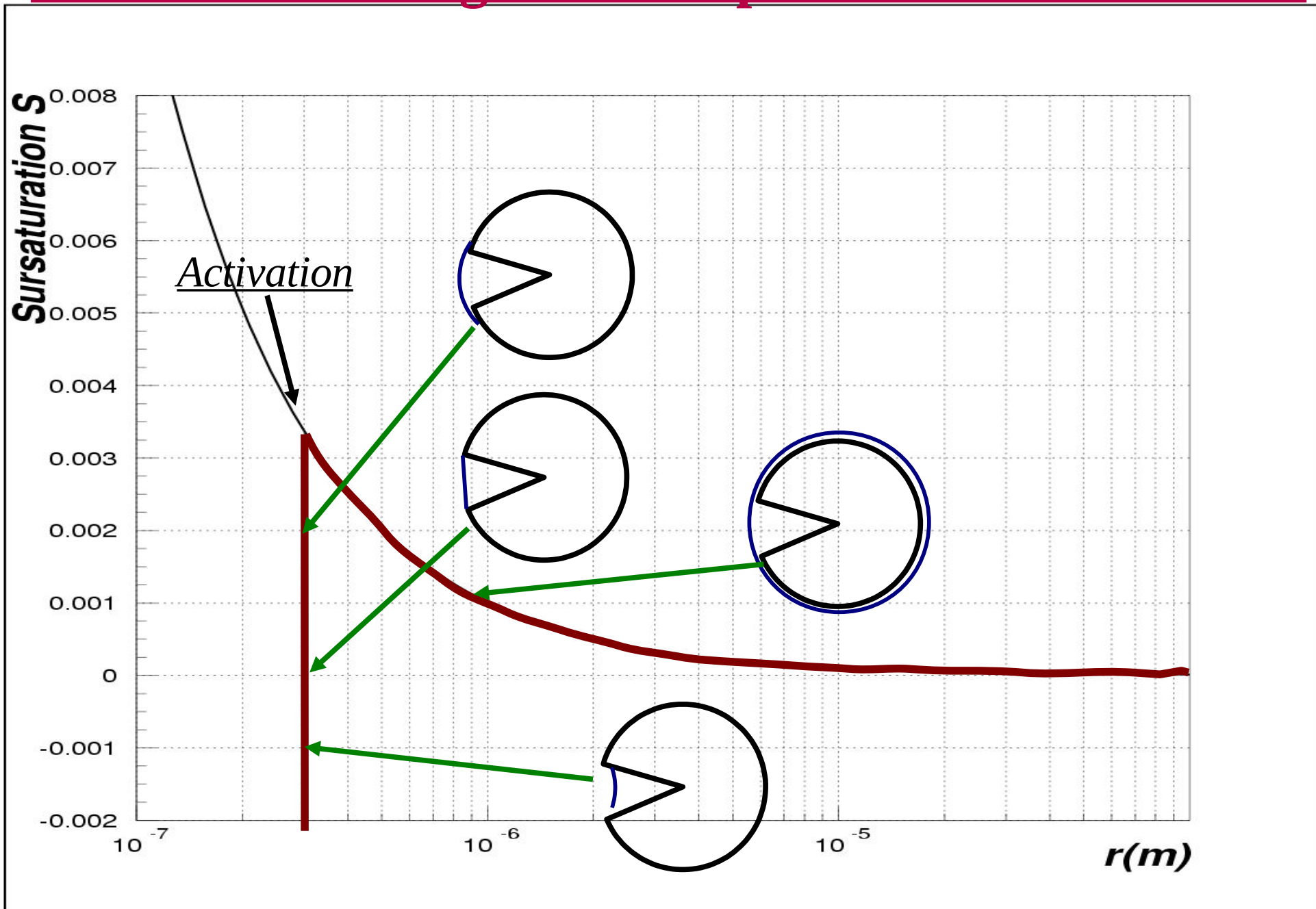
avec :  $A = \frac{2\sigma}{\rho_l R_v T}$  et  $B = N_s \frac{3M_v}{4\pi\rho_l}$ .



# Activation d'une gouttelette par un aérosol sulfaté



# Activation d'une gouttelette par un aérosol minéral



## Récapitulation aérosols, noyaux de condensation, gouttelettes

- Noyaux de condensation (ou CCN) = aérosols hydratés.
- **nucléation** = passage des aérosols de l'état sec à l'état hydraté.
- existence des noyaux de condensation permise par la baisse de la pression de vapeur d'équilibre induite par la solubilité de l'aérosol ou par les enfractuosités d'un aérosol insoluble.
- **activation** = franchissement d'un rayon critique au-dessus duquel la gouttelette est dans un état instable et croît.

# I-3-Croissance des gouttes

## Croissance des gouttes

On considère une seule goutte dans un milieu infini composé d'air et de vapeur d'eau. Grandeurs à l'infini :  $T_\infty$ ,  $q_{v\infty}$ .

**Taux de Hertz** = taux de croissance d'une goutte à température  $T_\infty$  dans un milieu homogène à  $[T_\infty, q_{v\infty}]$ .

Discontinuité de l'humidité spécifique :

- Flux de vapeur quittant la goutte  $\dot{m}_e$  = flux de vapeur à travers une surface dans une humidité  $q_{s(T_\infty)}$  :

$$\dot{m}_e = \rho_a q_{s(T_\infty)} \sqrt{\frac{R_v T_\infty}{2\pi}}$$

- Flux de vapeur incident sur la goutte  $\dot{m}_c$  = flux de vapeur à travers une surface dans une humidité  $q_{v\infty}$  :

$$\dot{m}_c = \rho_a q_{v\infty} \sqrt{\frac{R_v T_\infty}{2\pi}}$$

Taux de croissance de Hertz :

$$\rho_l [\partial_t r]_{Hz} = \rho_a \sqrt{\frac{R_v T_\infty}{2\pi}} (q_{v\infty} - q_{s(T_\infty)})$$

## Croissance des gouttes - 2

**Cas réaliste :** différents facteurs vont freiner la croissance et faire que  $\partial_t r < [\partial_t r]_{Hz}$  : (i) variation de  $q_v$  au voisinage de la surface (l'humidité devient une fonction de la coordonnée radiale  $r'$ ) ; (ii) variation de  $T$  au voisinage de la surface (= couplage avec le dégagement de chaleur latente) ; (iii) impuretés à la surface (coating).

Ici l'humidité spécifique  $q_v(r')$  est continue et vaut  $q_{v0} = q_s(T(r))$  à la surface de la gouttelette : le taux de croissance va s'exprimer à l'aide de la diffusivité moléculaire  $D_v$  :

$$\rho_l \partial_t r = D_v \rho_a (\partial_{r'} q_v)_{r'=r}$$

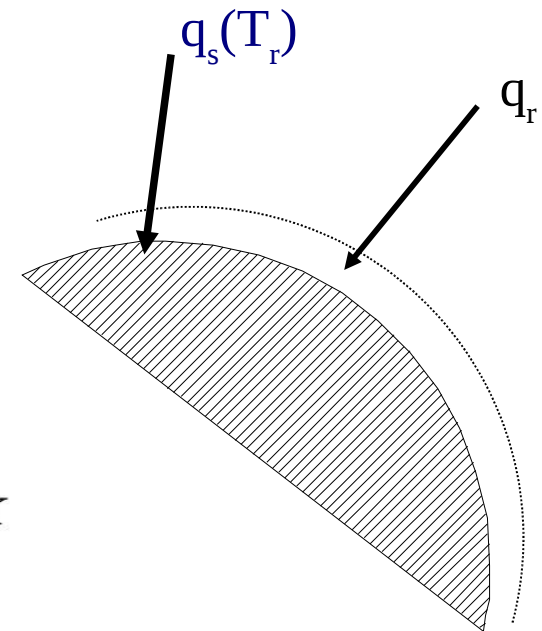
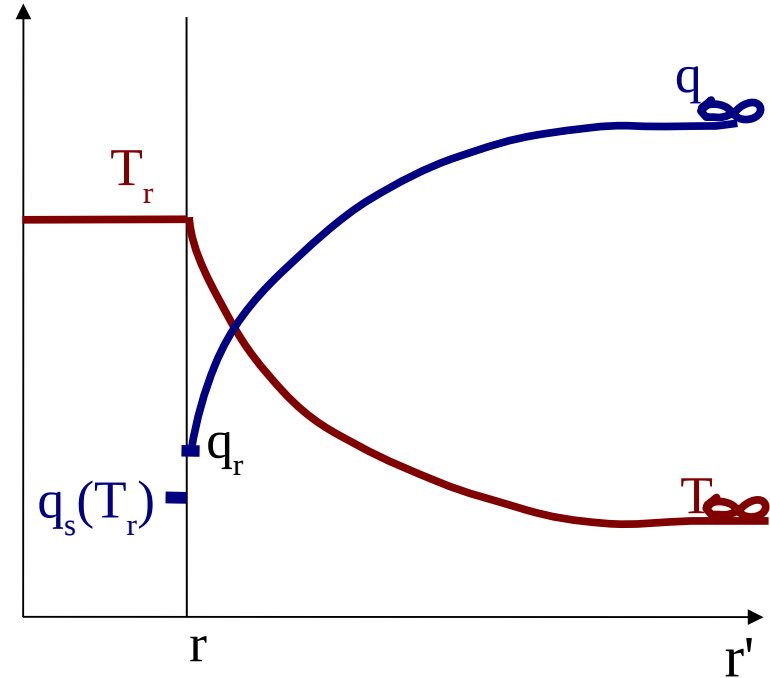
Comme on le verra dans l'annexe "Flux moléculaire dans un gaz parfait", la diffusivité  $D_v$  peut s'écrire :

$$D_v = \sqrt{\frac{R_v T}{2\pi}} \zeta$$

où  $\zeta$  désigne le libre parcours moyen.

Formule approchée :

$$D_v \simeq 2.5 \cdot 10^{-5} \frac{p_0}{p} \left(\frac{T}{T_0}\right)^{1.94} \quad \text{avec} \quad p_0 = 1000 \text{ hPa} \quad T_0 = 273.15 \text{ K}$$





### Croissance des gouttes - 3

Equations :

$$\begin{cases} \nabla^2 T = 0 & ; \quad r' \rightarrow \infty \Rightarrow T(r') \rightarrow T_\infty \\ \nabla^2 q = 0 & ; \quad r' \rightarrow \infty \Rightarrow q(r') \rightarrow q_{v\infty} = q_s(T_\infty)(1 + S) \end{cases} \quad (1)$$

Conditions à la limite en  $r$  ( $\lambda =$  conductivité du gaz) :

$$\begin{cases} q(r) = q_r \\ T(r) = T_r \\ L_v D_v \rho_a (\partial_{r'} q)_{r'=r} = -\lambda (\partial_{r'} T)_{r'=r} \end{cases} \quad (2)$$

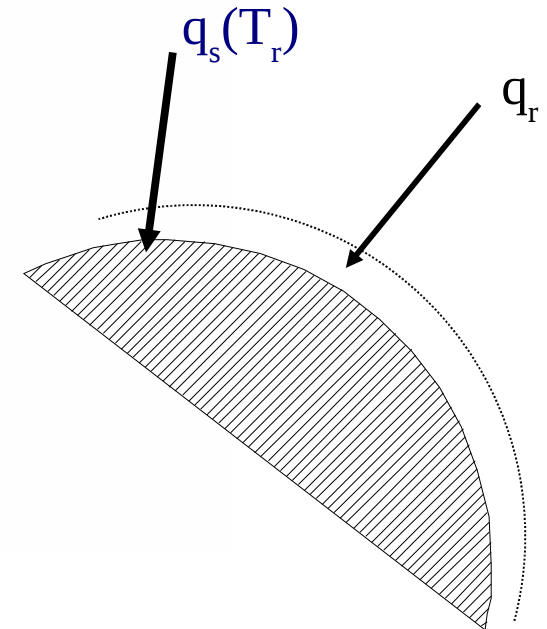
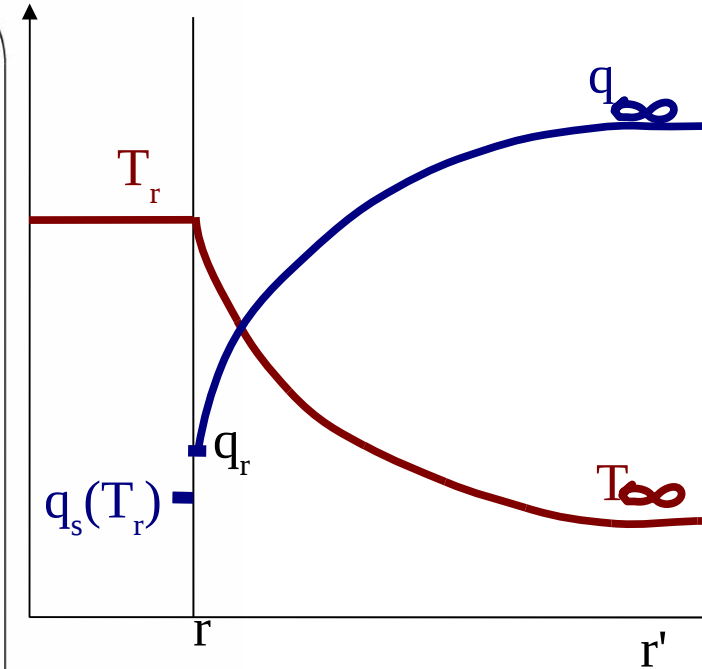
Solutions :

$$\begin{cases} q(r') = q_\infty + (q_r - q_\infty) \frac{r}{r'} & \Rightarrow (\partial_{r'} q)_{r'=r} = \frac{q_\infty - q_r}{r} \\ T(r') = T_\infty + (T_r - T_\infty) \frac{r}{r'} & \Rightarrow (\partial_{r'} T)_{r'=r} = \frac{T_\infty - T_r}{r} \end{cases} \quad (3)$$

Soit  $\Phi_m$  la densité de flux de masse de vapeur d'eau incident sur la goutte.

$$\rho_l \partial_t r = \Phi_m \quad (4)$$

**Principe :** Exprimer le flux  $\Phi_m$  sous la forme de "conductances" multipliée par un écart d'humidité, ces conductances étant montées en série.



### Croissance des gouttes - 4

**Diffusion de la vapeur dans le gaz :**

$$\begin{aligned} \Phi_m = D_v \rho_a (\partial_{r'} q)_{r'=r} &\longrightarrow \Phi_m = D_v \rho_a \frac{q_\infty - q_r}{r} \\ &\longrightarrow \text{Impedance : } Z_{diff} = \frac{r}{D_v \rho_a} \end{aligned} \quad (6)$$

**Diffusion de la chaleur dans le gaz** (couplage par la condition à la surface de la goutte) :

$$\left\{ \begin{aligned} \Phi_m = -\frac{\lambda}{L_v} (\partial_{r'} T)_{r'=r} &\longrightarrow \Phi_m = -\frac{\lambda}{L_v} \frac{T_\infty - T_r}{r} \\ \text{Clausius Clapeyron} &\longrightarrow \Phi_m = -\frac{\lambda R_v T_\infty^2}{L_v^2 q_s(T_\infty)} \frac{q_s(T_\infty) - q_s(T_r)}{r} \\ \longrightarrow \text{Impedance : } &Z_{therm} = \frac{L_v^2 q_s(T_\infty) r}{\lambda R_v T_\infty^2} \end{aligned} \right. \quad (7)$$

**Coating** ( $\alpha =$  "conductance" des impuretés de surface);

$$\Phi_m = \alpha \rho_a \frac{D_v}{\zeta} [q_r - q_s(T_r)] \longrightarrow \text{Impedance : } Z_{coating} = \frac{\zeta}{\alpha \rho_a D_v} \quad (8)$$

### Croissance des gouttes - 5

$$\left\{ \begin{aligned} \Phi_m &= \frac{q_\infty - q_s(T_\infty)}{Z_{coating} + Z_{diff} + Z_{therm}} \\ Z_{coating} &= \frac{\zeta}{\alpha D_v \rho_a} \\ Z_{diff} &= \frac{r}{D_v \rho_a} \\ Z_{therm} &= \frac{L_v^2 q_s(T_\infty) r}{\lambda R_v T_\infty^2} \end{aligned} \right. \quad (9)$$

$$\rho_l \partial_t r = \frac{\rho_l [\partial_t r]_{Hz}}{\frac{1}{\alpha} + \frac{r}{\zeta} + \frac{r L_v^2 D_v \rho_a q_s(T_\infty)}{\zeta \lambda R_v T_\infty^2}} \quad (10)$$

(avec :  $\rho_l [\partial_t r]_{Hz} = \frac{D_v}{\zeta} \rho_a (q_\infty - q_s(T_\infty))$ ).



## Vitesse de chute des gouttes

Les gouttes atteignent très vite leur vitesse limite  $v_t$ . Celle-ci est donnée par l'équilibre des forces de frottement, de gravité et d'Archimède.

**Force de frottement  $F_f$  (formule de Stokes)** (particules  $< 1$  mm) :

$$F_f = 6 \pi \eta_a r_p v_t \quad (11)$$

où  $\eta_a$  = visc. dyn. de l'air ( $\simeq 2 \cdot 10^{-5}$  kg m<sup>-1</sup> s<sup>-1</sup>),  $r_p$  = rayon de la particule.

**Poids de la goutte  $F_g$  et Force d'Archimède  $F_a$  :**

$$F_g = -\frac{4}{3}\pi r_p^3 \rho_p \quad \text{and} \quad F_a = \frac{4}{3}\pi r_p^3 \rho_a \quad (12)$$

où  $\rho_p$  = masse volumique de la particule et  $\rho_a$  = masse volumique de l'air.

**Equilibre :**

$$F_f + F_g + F_a = 0 \quad \Longrightarrow \quad 6 \pi \eta_a r_p v_t = \frac{4}{3}\pi r_p^3 (\rho_p - \rho_a) \quad (13)$$

D'où, en négligeant  $\rho_a$  devant  $\rho_p$  :

$$v_t = \frac{2 g \rho_p}{9 \eta_a} r_p^2 \quad \simeq 10^8 r_p^2 \quad (14)$$

$\Longrightarrow$  Pour  $r_p = 1, 10, 100 \mu\text{m}$ ,  $v_t = 0.1$  mm/s, 1 cm/s, 1 m/s.

## **II - Effet radiatif et dynamique nuageuse**

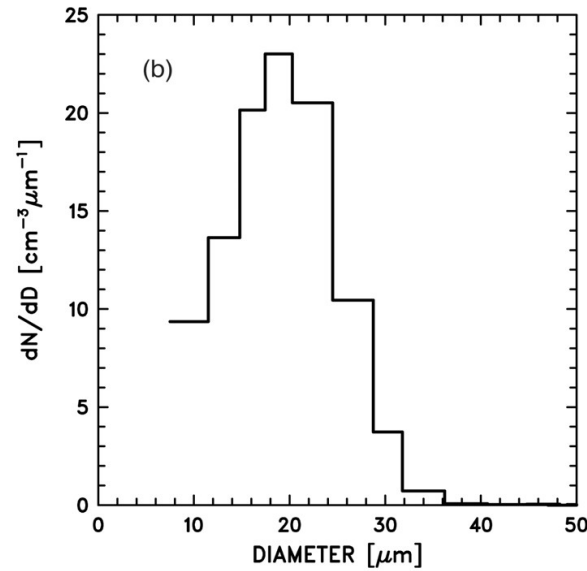
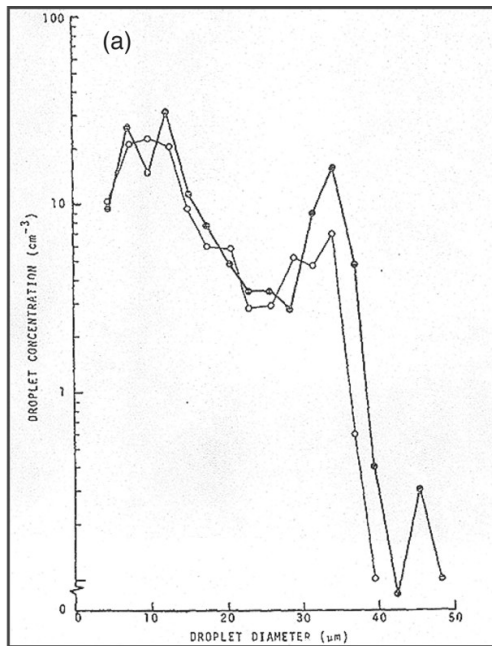
## Rôle des modèles de nuages

- Déterminer la fraction nuageuse et la fraction condensée en fonction de l'altitude.
- Déterminer les propriétés radiatives des nuages.

L'image physique est celle d'une atmosphère horizontalement statistiquement uniforme, où les champs de contenu en eau et de température sont des variables aléatoires obéissant à des lois de probabilités empiriques. Les nuages eux-mêmes sont les zones où apparaît de l'eau condensée, c'est-à-dire, pour les nuages chauds, des gouttelettes d'eau. La fonction du modèles de nuage est de représenter l'effet thermodynamique et radiatif de l'évolution de la population de gouttelettes.

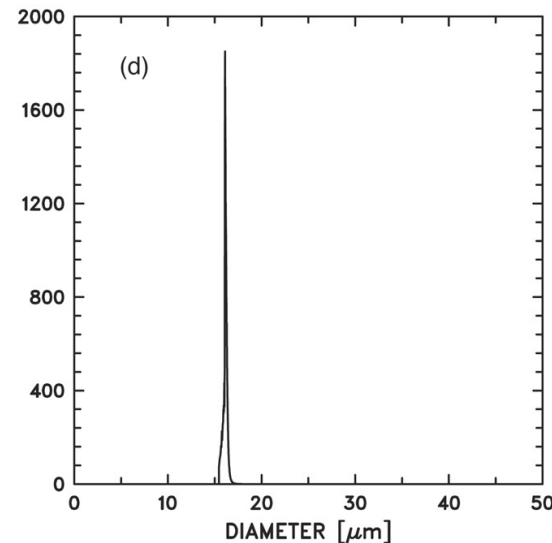
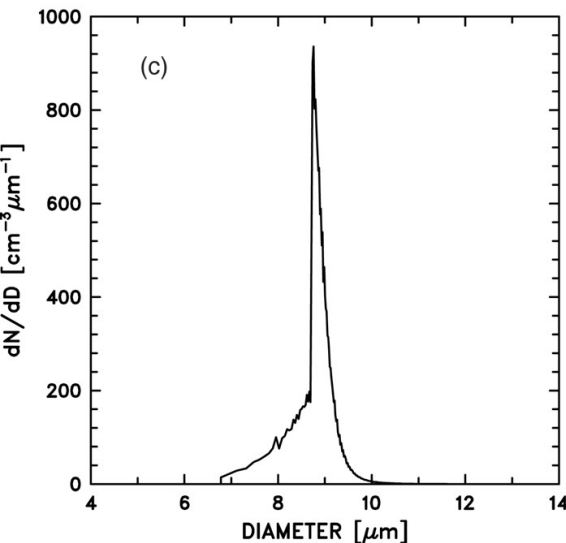
Cette population peut être décrite par une densité  $n(r, \vec{x})$ , où  $\vec{x}$  désigne la position et  $r$  le rayon. Il s'agit de représenter avec quelques paramètres l'évolution et l'effet de cette population.

# Distributions de tailles



Distributions observées de tailles de gouttelettes:

- (a) “exposed glass slides” (Warner, 1969)
- (b) Forward Scattering Spectrometer Probe (FSSP), fabriqué par PMS Inc.
- (c) fast FSSP (Brenquier et al., 1998)
- (d) distribution calculée par un modèle adiabatique



(From Lasher-Trapp et al, QJRMS, 2005)

## Variables radiatives des nuages

Les paramètres décrivant les processus radiatifs élémentaires sont :

- Le coefficient d'extinction  $\sigma_{\text{ext}} = \sigma_{\text{abs}} + \sigma_{\text{sc}}$  où  $\sigma_{\text{abs}}$  et  $\sigma_{\text{sc}}$  sont les sections efficaces volumiques d'absorption et de diffusion.  $\sigma_{\text{ext}}$  représente la surface offerte à l'extinction des photons par unité de volume (unité  $m^{-1}$ ).
- L'albedo de diffusion simple ( $= \frac{\sigma_{\text{sc}}}{\sigma_{\text{ext}}}$ )
- La fonction de phase  $p(\theta)$  donnant la probabilité de diffusion à un angle  $\theta$  de la direction incidente. Souvent on ne garde que le facteur d'asymétrie  
$$g = \int_0^{2\pi} p(\theta) \cos\theta d\theta.$$

Les paramètres décrivant les processus radiatifs à l'échelle d'un nuage ou d'un système de nuages sont :

- La fraction nuageuse  $f$  (= fraction surfacique couverte par les nuages)
- L'eau liquide intégrée sur la verticale  $W$  ("liquid water path" ou LWP) en  $kg m^{-2}$ .
- L'épaisseur optique  $\tau$  (telle que  $\Phi_{\text{trans}} = e^{(-\tau)}\Phi_{\text{inc}}$ , où  $\Phi_{\text{inc}}$  et  $\Phi_{\text{trans}}$  sont les flux incident et transmis par le nuage.
- L'albédo.

## Description statistique du nuage

Population de gouttelettes présentant un spectre de rayons  $r$  décrit par une densité de population  $n(r)$ ; avec :

$$\int_0^{\infty} n(r) dr = N \quad (15)$$

où  $N$  est le nombre d'aérosols activés par unité de volume ( $N$  va de quelques  $10 \text{ cm}^{-3}$  pour de l'air propre océanique à quelques  $1000 \text{ cm}^{-3}$  pour de l'air sale continental).

**Rayon cubique moyen  $r_v$  :**

$$r_v^3 = \frac{1}{N} \int_0^{\infty} r^3 n(r) dr \quad (16)$$

Eau liquide spécifique :

$$\rho q_l = \int_0^{\infty} dr \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_l n(r) = \frac{4}{3} \pi r_v^3 \rho_l N \quad (17)$$

**Rayon quadratique moyen  $r_s$  :**

$$r_s^2 = \frac{1}{N} \int_0^{\infty} \pi r^2 n(r) dr \quad (18)$$

Coefficient d'extinction  $\sigma_{ext}$  :

$$\begin{aligned} \sigma_{ext} &= \int_0^{\infty} Q_{ext} \pi r^2 n(r) dr \quad Q_{ext} \simeq 2 \\ &\quad \text{(facteur d'efficacite de Mie)} \\ &= Q_{ext} \pi r_s^2 N \end{aligned} \quad (19)$$



## Modèle du nuage adiabatique

**Nuage adiabatique** :  $N = \text{cste}$  et  $q_l(h) = C_w h$

Alors :

$$r_{va} = \left( \frac{3 \rho C_w h}{4\pi \rho_l N} \right)^{1/3} = \left( \frac{3 \rho C_w h}{4\pi \rho_l} \right)^{1/3} N^{-1/3} \quad (20)$$

$C_w \simeq 2 \cdot 10^{-6} m^{-1}$  (i.e. condensation = 2 g/kg/km)

soit :  $r_{va} = (Ah)^{1/3} N_a^{-1/3}$  avec  $A = \frac{3\rho C_w}{4\pi\rho_l}$

**Rayon effectif** :  $r_e = \frac{r_v^3}{r_s^2}$ .

Propriété importante :  $k = \frac{r_v^3}{r_e^3}$  varie peu (de 0.6 (continent) à 0.8 (océan)).

Alors :  $r_{ea} = k^{-1/3} r_{va}$ . Soit :

$$r_{ea} = (Ah)^{1/3} (kN_a)^{-1/3} \quad (21)$$

## Modèle du nuage adiabatique : variables intégrales

Nuage d'épaisseur  $H$ .

**Eau condensée intégrée  $W$**

$$W = \int_0^H \rho q_l dh \quad (22)$$

Nuage adiabatique :

$$W_a = \frac{1}{2} \rho C_w H^2 \quad (23)$$

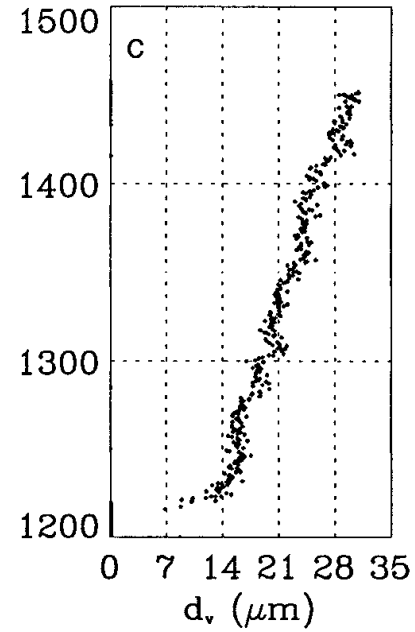
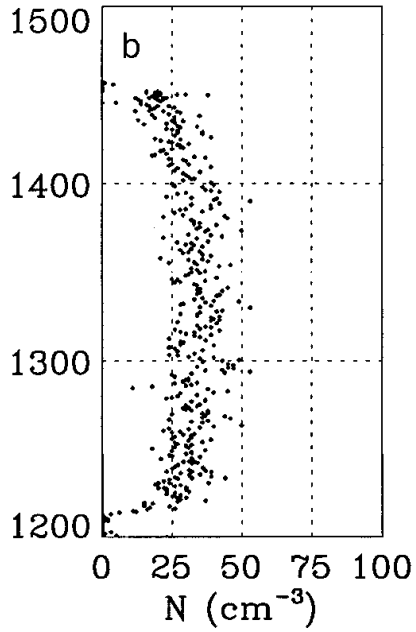
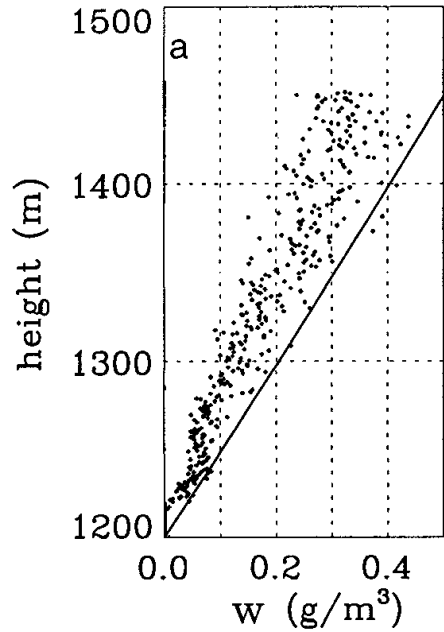
**Épaisseur optique  $\tau$**

$$\tau = \int_0^H \sigma_{ext}(h) dh \quad (24)$$

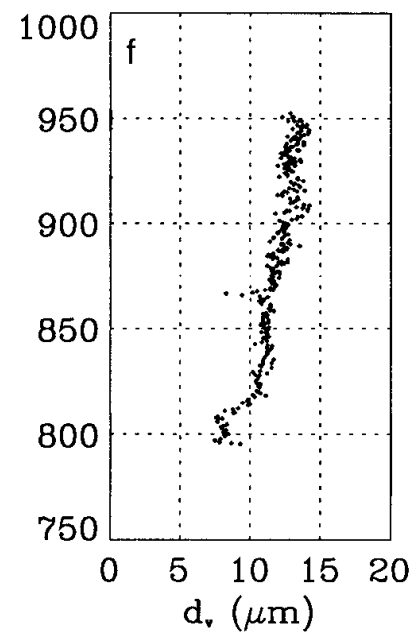
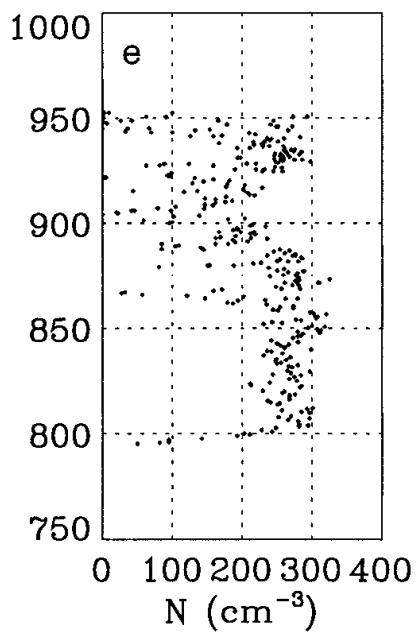
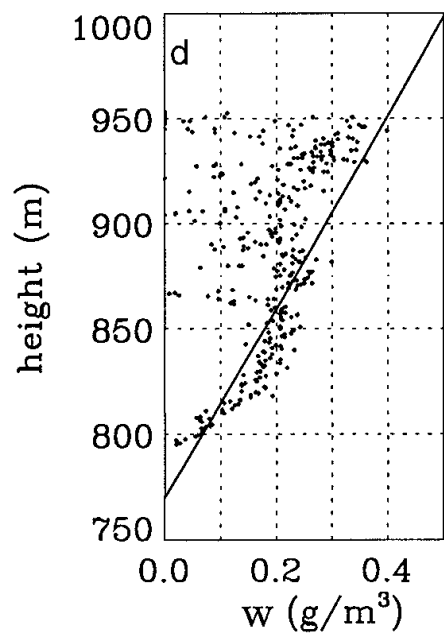
Nuage adiabatique :

$$\tau_a = Q_{ext} \left( \frac{3\pi}{5} \right) A^{2/3} (kN)^{1/3} H^{5/3} \quad (25)$$

La faible dépendance en  $N$  fait que l'épaisseur du nuage compte beaucoup plus que  $N$  : un doublement du nombre volumique de gouttelettes est comparable à une variation de l'épaisseur géométrique de 15%.



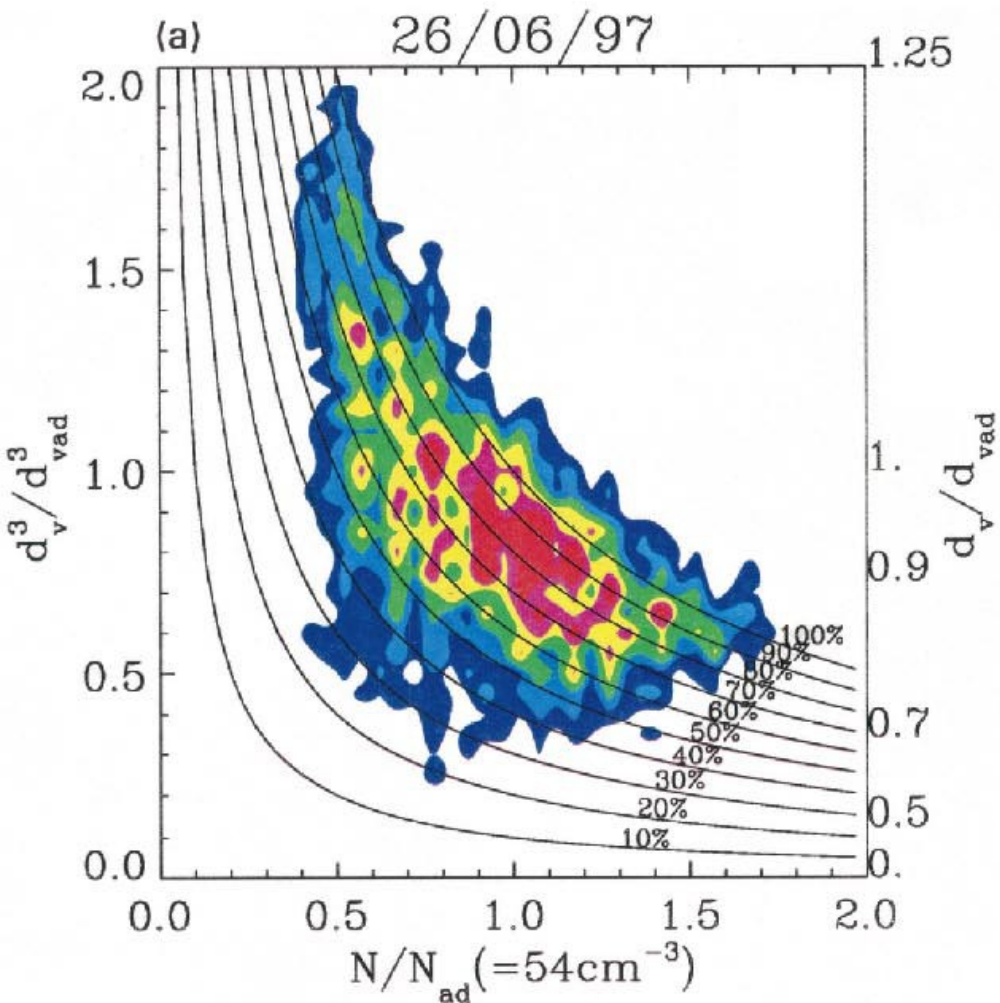
26 Juin  
Cas propre



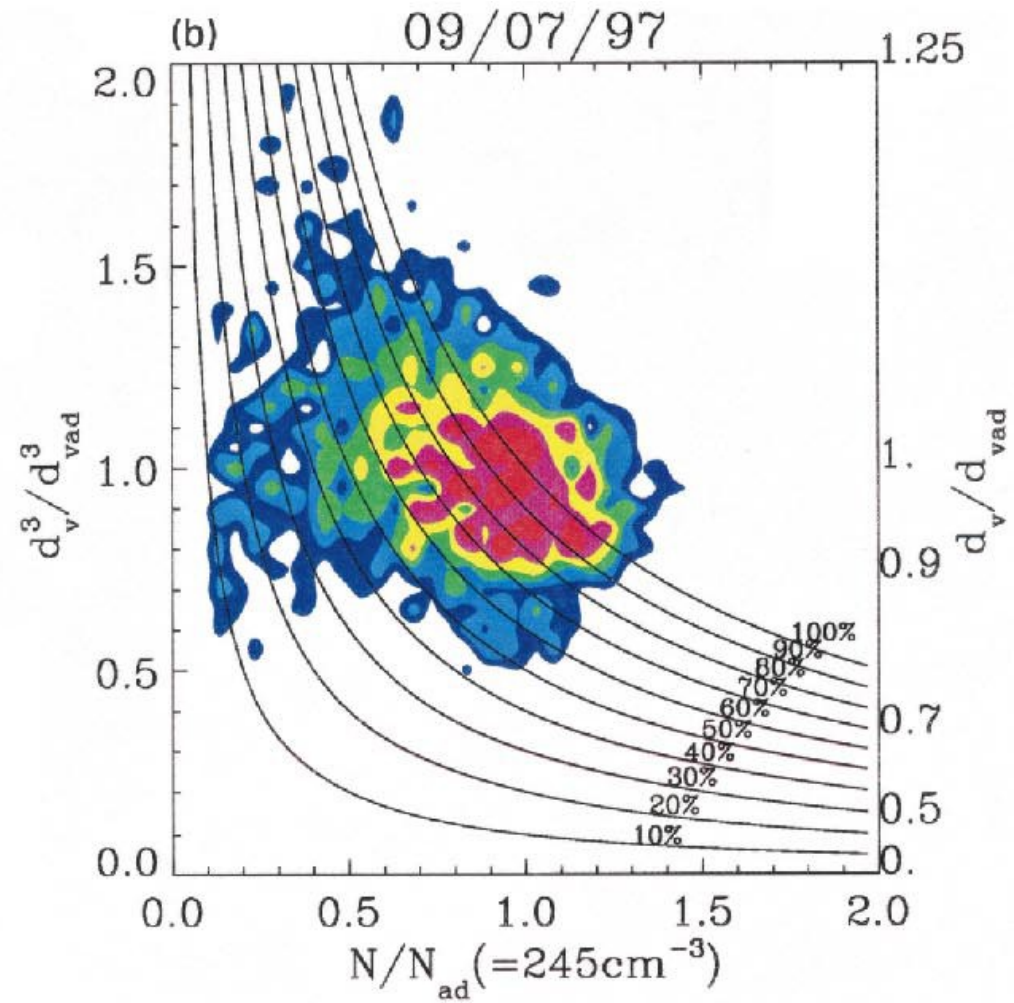
9 Juillet  
Cas Pollué

Exemples de profil vertical

## Cas maritime propre



## Cas pollué



Cumul de tous les vols

(From Brenguier et al, JAS, 2000)

## Annexe: Flux moléculaires dans un gaz parfait

On veut déterminer le flux de molécules frappant le côté positif d'un élément de surface  $\delta S$  (en l'occurrence, il s'agit d'un élément de la surface d'une gouttelette) plongé dans un gaz parfait isotherme (vapeur d'eau à la température  $T$ , de masse volumique  $\rho_v$ ). Ce gaz est mélangé à un autre gaz parfait (l'air), mais ce second gaz n'interviendra pas dans le calcul, excepté pour exprimer les équations en termes d'humidités spécifiques ( $\rho_v = q_v \rho_a$ ) et lorsque le libre parcours moyen des molécules entrera en jeu.

On se place dans le cadre de la théorie cinétique des gaz. On va considérer deux cas : d'abord le cas du gaz homogène (ce qui permet d'exprimer le taux de croissance de Hertz), puis celui d'une variation radiale de  $q_v$ .

**Cas homogène :** on connaît la densité de probabilité  $P(v_x)$  de la composante  $v_x$  de la vitesse des molécules le long de la normale à la surface considérée :

$$P(v_x) = \sqrt{\frac{m_v}{2\pi kT}} \exp\left(-\frac{m_v v_x^2}{2kT}\right) = \sqrt{\frac{1}{2\pi R_v T}} \exp\left(-\frac{v_x^2}{2R_v T}\right)$$

où  $k$  désigne la constante de Boltzmann et  $m_v$  la masse moléculaire.

Soit  $n$  la concentration volumique des molécules ( $\rho_v = nm_v$ ) la densité de flux de molécules  $\dot{n}$  frappant le côté positif du plan  $x = 0$  est :

$$\dot{n} = n \int_0^{\infty} P(v_x) v_x dv_x$$

d'où le flux de masse :

$$\dot{m} = \rho_v \int_0^{\infty} P(v_x) v_x dv_x$$

ce qui donne :

$$\dot{m} = \rho_v \sqrt{\frac{R_v T}{2\pi}}$$



**Cas  $q_v$  radialement variable :** soient  $P(\vec{v})$  la densité de probabilité du vecteur vitesse en coordonnées  $[v_x, v_y, v_z]$  et  $Q(v)$  la densité de probabilité du module de la vitesse en coordonnées  $[v, \theta, \phi]$  ; on a :

$$P(\vec{v}) dv_x dv_y dv_z = \frac{Q(v)}{4\pi} \sin\theta v^2 dv d\theta d\phi = \frac{Q(v)}{4\pi} v^2 dv d\Omega$$

avec :

$$Q(v) = 4\pi \left(\frac{m_v}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m_v v^2}{2kT}\right) \quad ; \quad \int_0^\infty Q(v) v^2 dv = 1$$

Principe : équilibre thermodynamique local  $\Rightarrow$  (1) les molécules situées dans un petit volume  $\delta V$  obéissent à la loi de Maxwell de distribution des vitesses pour la température  $T$  du volume  $\delta V$  ; (2) le nombre  $dN$  de molécules dans  $\delta V$  de vitesse dans  $[v, v + dv]$  et dans un angle solide  $\delta\Omega$  est  $dN = n Q(v) v^2 dv \frac{\delta\Omega}{4\pi} \delta V$  ; (3) si  $dN$  molécules émergent d'un volume  $\delta V$  d'épaisseur  $\delta r$  dans une même direction, le nombre de molécules ayant subi un choc dans  $\delta V$  et atteignant un élément de surface à la distance  $r$  est  $-\delta r \tau'(r) dN$ , où  $\tau(r) = \exp(-r/\zeta)$  est la transmittance d'une couche de fluide d'épaisseur  $r$  et  $\zeta$  est le libre parcours moyen des molécules.

Dans chaque volume élémentaire  $d^2V = 2\pi \sin\theta r^2 dr d\theta$ , le nombre de molécules dont la vitesse est dans l'angle solide  $\delta\Omega = \frac{\delta S \cos\theta}{r^2}$  (angle sous lequel est vue  $\delta S$  depuis  $d^2V$ ) et dont le module de vitesse est dans  $[v, v + dv]$  est  $d^3N = n d^2V \frac{\delta\Omega}{4\pi} Q(v) v^2 dv$  ; le nombre de ces molécules ayant subi un choc dans  $\delta V$  et atteignant l'élément de surface  $\delta S$  pendant le temps  $\delta t$  est  $d^3N \tau'(r) v \delta t$ . D'où la décomposition du flux de masse sur toutes les origines des molécules :

$$\begin{aligned} \dot{m} \delta S \delta t &= \int_0^\infty v^2 dv \int_0^\infty dr \int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta 2\pi r^2 n m_v \frac{\delta S \cos\theta}{4\pi r^2} Q(v) (-\tau'(r)) v \delta t \end{aligned} \quad (3)$$

En utilisant  $\int_0^\infty dv v^3 Q(v) = 4\sqrt{\frac{R_v T}{2\pi}}$  et  $\rho_v = n m_v$ , il vient :

$$\dot{m} = \sqrt{\frac{R_v T}{2\pi}} \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^\infty dr \rho_v (-\tau'(r)) 2 \sin\theta \cos\theta$$

Pour  $q_v$  uniforme, on retrouve  $\dot{m} = \rho_v \sqrt{\frac{R_v T}{2\pi}}$  ; pour  $q_v$  dépendant linéairement de  $r'$ , on obtient :

$$\dot{m} = \sqrt{\frac{R_v T}{2\pi}} \rho_a (q_{v0} + \zeta \partial_{r'} q_v)$$