

***Importance
de l'utilisation du troisième principe
pour définir l'entropie et l'enthalpie
de l'atmosphère (humide)***

Pascal MARQUET
(Météo-France. CNRM/GMAP)

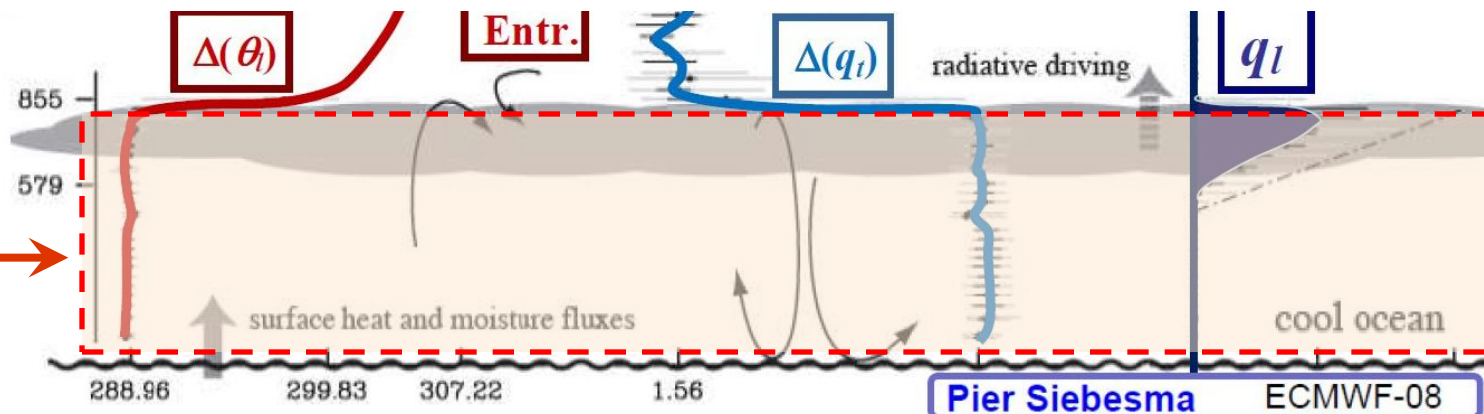


Motivations

Une question embarrassante de Irina Sandu dans les années 2006

(J.-L. Brenguier / CNRM-Toulouse, B. Stevens / UCLA) :

“Est-il possible de calculer le bilan d’enthalpie pour la couche limite des Sc marins ?” ... (pour mieux comprendre l’entraînement en sommet de couche limite des Sc, aussi leur cycle diurne, ...) ← DEPHY2...



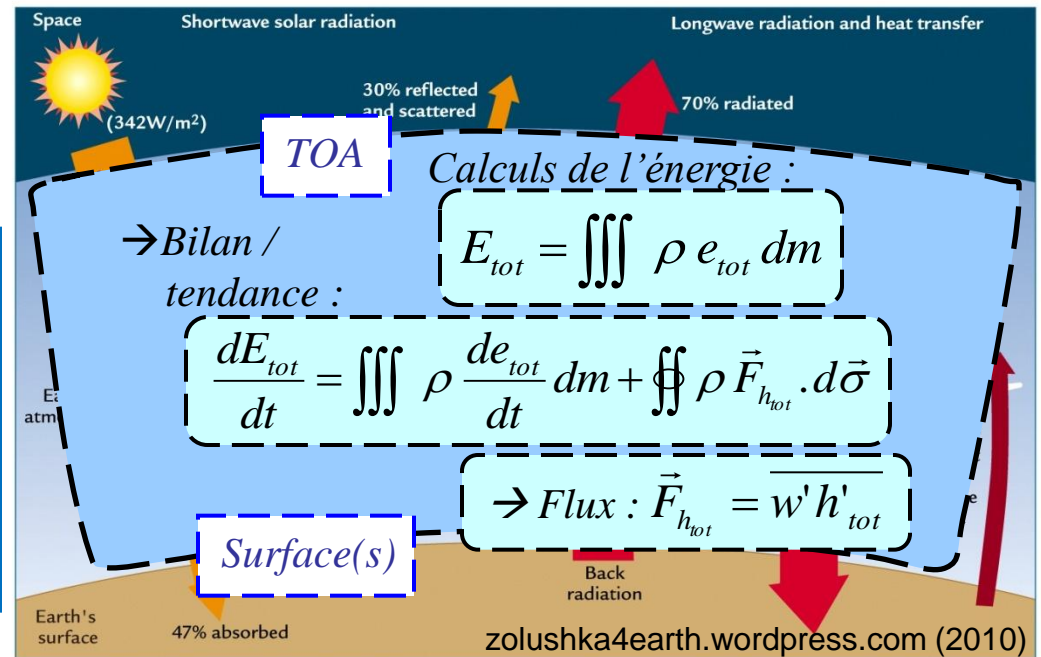
Pas de réponse ... et antagoniste avec l’approche en « exergie » ...
(« enthalpie utilisable » mélange de l’enthalpie et de l’entropie)

Motivations

La question embarrassante de Irina Sandu :
“Est-il possible de calculer le bilan d’enthalpie ?”

*Bilan de l’enthalpie ?
= bilan de l’énergie !*

→ obligation de calculer e_{tot}
et donc les flux de h_{tot}
et donc e_{tot} et h_{tot} localement !
ceci à une vraie constante près



Premières réponses en 2009 avec le bilan de l’entropie ...
car paradoxalement plus facile à calculer que l’enthalpie !

Motivations

La question embarrassante de Irina Sandu :
“Est-il possible de calculer le bilan d’enthalpie ?”

donc il faut calculer h ou s localement → pour un gaz donné :
 $h = \boxed{h_r} + c_p (T - T_r)$ ou $s = \boxed{s_r} + c_p \log(T / T_r) - R \log(p / p_r)$

Question : faut-il calculer ces références $\boxed{h_r}$ ou $\boxed{s_r}$?
→ NON si on considère un gaz unique (comme l’air sec) ...
→ **mais OUI** pour l’air humide ! car ces h_r ou s_r
génèrent des quantités variables → le cœur du problème ...

Plan de l'exposé

1) Comment calculer l'entropie « s » ? (3^{ème} principe)

- Les formulations *absolues* : de $s(\theta_s)$ et de θ_s
- Quelques profils verticaux de θ_s

2) Approximations de θ_s : 1^{er} et 2^{ème} ordres

- Applications à la problématique du « C.T.E.I. »
- Applications à la turbulence de l'air humide ? (si $K_h = K_w$)
- Autre applications si $K_h \neq K_w$?

3) Comment calculer l'enthalpie « h » ?

- La formulation « *absolue* » de $h \neq \text{MSE}$
- Redéfinition des flux d'énergie : « LH » $\neq L_v F_v$?

4) Conclusions - Perspectives



Plan de l'exposé

1) Comment calculer l'entropie « s » ? (3^{ème} principe)



- Les formulations *absolues* : de $s(\theta_s)$ et de θ_s
- Quelques profils verticaux de θ_s

2) Approximations de θ_s : 1^{er} et 2^{ème} ordres

- Applications à la problématique du « C.T.E.I. »
- Applications à la turbulence de l'air humide ? (si $K_h = K_w$)
- Autre applications si $K_h \neq K_w$?

3) Comment calculer l'enthalpie « h » ?

- La formulation « *absolue* » de $h \neq \text{MSE}$
- Redéfinition des flux d'énergie : « LH » $\neq L_v F_v$?

4) Conclusions - Perspectives



Calculs de $s(\theta_s)$? Marquet (QJRMS 2011)

Definition of a moist entropy potential temperature:
application to FIRE-I data flights

Q. J. R. Meteorol. Soc. 137: 768–791, April 2011 A

Pascal Marquet

1 Entropie spécifique → une somme pondérée :

$$s = q_d s_d + q_v s_v + q_l s_l + q_i s_i$$

Idem
Hauf & Höller
(1987)

2

$$\begin{aligned} q_d &\rightarrow s_d = (s_d)_r + c_{pd} \ln(T/T_r) - R_d \ln[p/(p_d)_r] \\ q_v &\rightarrow s_v = (s_v)_r + c_{pv} \ln(T/T_r) - R_v \ln[e/e_r] \\ q_l &\rightarrow s_l = (s_l)_r + c_l \ln(T/T_r) \\ q_i &\rightarrow s_i = (s_i)_r + c_i \ln(T/T_r) \end{aligned}$$

4

Est-il toutefois possible
d'exprimer “ s ” en fonction
d'une temp. pot. θ_s , avec
 s_{ref} et c_{pd} deux constantes ?

$$s = s_{ref} + c_{pd} \ln(\theta_s)$$

3 Valeurs de référence multipliées par des
contenus spécifiques variables → produits
eux-même variables dans l'espace et le temps !

θ_s devenant alors équivalente à s !



METEO FRANCE

Calculs de $s(\theta_s)$? Marquet (QJRMS 2011)

“ s ” en fonction d’une temp. pot. “ θ_s ” ?

$$s = s_{ref} + c_{pd} \ln(\theta_s)$$

avec deux vraies constantes :

$$c_{pd} = 1004.7 \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$$

$$s_{ref} = 1138.56 \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$$

$$\theta_s = \theta_l \exp(\Lambda_r q_t) \left(\frac{r_r}{r_v} \right)^{\gamma q_t} (1 + \eta q_t)^\kappa \left(\frac{1 + \eta r_v}{1 + \eta q_t} \right)^\kappa$$

$$\left(\frac{T}{T_r} \right)^{\lambda q_t} \left(\frac{p}{p_r} \right)^{-\kappa \delta q_t} \left(\frac{1 + \eta r_v}{1 + \eta r_r} \right)^{\kappa \delta q_t}$$

Une formulation complexe :

Variables de Betts (1973) ↓

$$\theta_l = \theta \exp \left[- \frac{L_v q_l + L_s q_i}{c_{pd} T} \right]$$

$$q_t = q_v + q_l + q_i$$

$$\Lambda_r = \frac{(s_v)_r - (s_d)_r}{c_{pd}} \approx 5.87$$

un paramètre clef ↑ entropies de références ?

$$c_{pd} = 1004.7 \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}, c_{pv} = 1846.1 \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}, c_l = 4218 \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}, c_i = 2106 \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1},$$

$$R_d = 287.06 \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}, R_v = 461.53 \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}, \kappa = R_d/c_{pd} \approx 0.2857, \lambda = c_{pv}/c_{pd} - 1 \approx 0.8375,$$

$$\delta = R_v/R_d - 1 \approx 0.608, \eta = R_v/R_d \approx 1.608, \varepsilon = R_d/R_v \approx 0.622, \gamma = R_v/c_{pd} \approx 0.46.$$

plusieurs constantes thermodynamiques ↑



Calculs de $s(\theta_s)$? Marquet (QJRMS 2011)

$$\theta_s = \boxed{\theta_l} \exp(\Lambda_r q_t) \left(\frac{r_r}{r_v}\right)^{\gamma q_t} (1 + \eta q_t)^\kappa \left(\frac{1 + \eta r_v}{1 + \eta q_t}\right)^\kappa$$

$$s = s_{ref} + c_{pd} \ln(\theta_s)$$

$$\left(\frac{T}{T_r}\right)^{\lambda q_t} \left(\frac{p}{p_r}\right)^{-\kappa \delta q_t} \left(\frac{1 + \eta r_v}{1 + \eta r_r}\right)^{\kappa \delta q_t}$$

Hauf and Höller (1987)

Une formulation complexe ?

$$s \equiv q_d s_d^0 + q_t s_l^0 + q_d c^* \ln(\theta_S^*/T_0)$$

pas plus que Hauf & Höller !

$$\theta_S^* \equiv T \left(\frac{p_d}{p_0}\right)^{-R_d/c^*} \left(\frac{e}{e_{ws}}\right)^{-(r_v R_v)/c^*} \left(\frac{e_{is}}{e_{ws}}\right)^{-(r_i R_v)/c^*} \exp\left(\frac{L_v r_l - L_f r_i}{c^* T}\right)$$

ce ne sont pas des constantes ...



Calculs de $s(\theta_s)$? Marquet (QJRMS 2011)

$$\theta_s = \boxed{\theta_l} \exp(\Lambda_r q_t) \left(\frac{r_r}{r_v}\right)^{\gamma q_t} (1 + \eta q_t)^\kappa \left(\frac{1 + \eta r_v}{1 + \eta q_t}\right)^\kappa$$

$$s = s_{ref} + c_{pd} \ln(\theta_s) \left(\frac{T}{T_r}\right)^{\lambda q_t} \left(\frac{p}{p_r}\right)^{-\kappa \delta q_t} \left(\frac{1 + \eta r_v}{1 + \eta r_r}\right)^{\kappa \delta q_t}$$

Available Enthalpy version (1993)

Une formulation complexe ?

$$s \equiv q_d (s_d)_r + q_t (s_v)_r + q_d c_p^* \ln(\theta^* / \theta_r^*)$$

pas plus que Marquet (1993) !

$$\theta^* \equiv T \left(\frac{p_d}{p_0}\right)^{-R_d/c_p^*} \exp\left(-\frac{L_v r_l + L_s r_i}{c_p^* T}\right) \left(\frac{e}{p_0}\right)^{-(r_t R_v)/c_p^*}$$

$$\theta_r^* \equiv T_r \left(\frac{(p_d)_r}{p_0}\right)^{-R_d/c_p^*} \left(\frac{e_r}{p_0}\right)^{-(r_t R_v)/c_p^*}$$

ce ne sont pas des constantes ...



Calculs de $s(\theta_s)$? Marquet (QJRMS 2011)

$$\theta_s = \boxed{\theta_l} \exp(\Lambda_r q_t) \left(\frac{r_r}{r_v}\right)^{\gamma q_t} (1 + \eta q_t)^\kappa \left(\frac{1 + \eta r_v}{1 + \eta q_t}\right)^\kappa$$

$$s = s_{ref} + c_{pd} \ln(\theta_s)$$

$$\left(\frac{T}{T_r}\right)^{\lambda q_t} \left(\frac{p}{p_r}\right)^{-\kappa \delta q_t} \left(\frac{1 + \eta r_v}{1 + \eta r_r}\right)^{\kappa \delta q_t}$$

Emanuel's version (1994)

Une formulation complexe ?

$$s^\diamond \equiv \boxed{c_p^*} \ln(\theta_l^*)$$

pas plus que Emanuel (1994) !

$$\theta_l^* = \boxed{T \left(\frac{p}{p_0}\right)^{-R^*/c_p^*} \exp\left(-\frac{L_v r_l}{c_p^* T}\right)} \left[\frac{(1 + \eta r_v)^{R^*/c_p^*}}{(\eta r_v)^{(r_t R_v)/c_p^*}} \right] \left[\frac{(\eta r_t)^{(r_t R_v)/c_p^*}}{(1 + \eta r_t)^{R^*/c_p^*}} \right]$$

ce n'est pas une constante ...



Plan de l'exposé

1) Comment calculer l'entropie « s » ? 3^{ème} principe ?

- Les formulations *absolues* : de $s(\theta_s)$ et de θ_s
- Quelques profils verticaux de θ_s

2) Approximations de θ_s : 1^{er} et 2^{ème} ordres

- Applications à la problématique du « C.T.E.I. »
- Applications à la turbulence de l'air humide ? (si $K_h = K_w$)
- Autre applications si $K_h \neq K_w$?

3) Comment calculer l'enthalpie « h » ?

- La formulation « *absolue* » de $h \neq \text{MSE}$
- Redéfinition des flux d'énergie : « LH » $\neq L_v F_v$?

4) Conclusions - Perspectives



Calculs de $s(\theta_s)$: 3^{ème} principe ?

“ s ” en fonction d’une temp. pot. “ θ_s ” ?

$$s = s_{ref} + c_{pd} \ln(\theta_s)$$

$$\theta_s = \theta_l \exp(\Lambda_r q_t) \left(\frac{r_r}{r_v} \right)^{\gamma q_t} (1 + \eta q_t)^{\kappa} \left(\frac{1 + \eta r_v}{1 + \eta q_t} \right)^{\kappa}$$

Une formulation complexe :

$$\left(\frac{T}{T_r} \right)^{\lambda q_t} \left(\frac{p}{p_r} \right)^{-\kappa \delta q_t} \left(\frac{1 + \eta r_v}{1 + \eta r_r} \right)^{\kappa \delta q_t}$$

$$\Lambda_r = \frac{(s_v)_r - (s_d)_r}{c_{pd}} \approx 5.87$$

un paramètre clef ↑ entropies de références ?

WEATHER PREDICTION

BY
NUMERICAL PROCESS



• Richardson (1922)

To find the true difference of entropy we must trace in imagination some process of adding water-substance reversibly, and the question then arises: what energy and entropy are to be ascribed to unit mass of the incoming substance? As there is an arbitrary constant of integration in the entropy, we must ask what would be the effect of an increase in this constant for the incoming water. Approximations are not here permissible, for the constant might be made indefinitely large.

The most natural way of reckoning the entropy of the water-substance would be to take it as zero at the absolute zero of temperature. It was formerly supposed that the presence of θ in the denominator of the integral which gives the entropy would make the integral have an infinity where $\theta=0$; but the measurements of Nernst, Lindemann, Korf and others* have shown that the specific heats tend to zero at $\theta=0$ in such a way that the entropy remains finite there.

Now although Hertz's calculation of the entropy difference of two samples of air saturated with ice refers, as in the case of clear air, only to the putting in of heat and not of moisture, yet it may be used to compare samples having different quantities of moisture. For let all the samples be expanded adiabatically until their temperatures

* Quoted by J. H. Jeans in his "Report on Radiation and the Quantum Theory," published by the Physical Society, London, 1914.

Systèmes "ouverts" → flux d'eau, d'énergie et d'entropie
→ définitions absolues ?
→ impacts des constantes ?

Entropie absolue :
→ $S = 0$ à 0 Kelvin
→ mesures de Nernst *et al.*
→ 3^{ème} principe

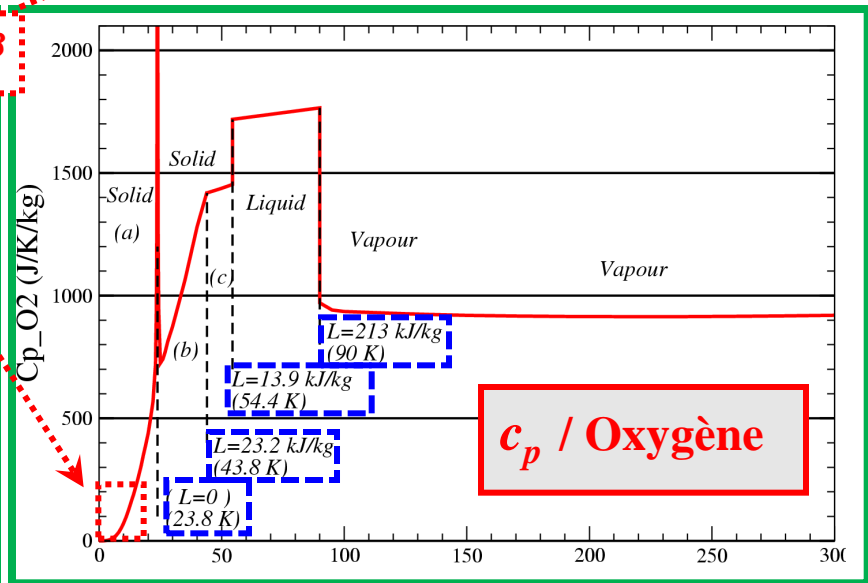
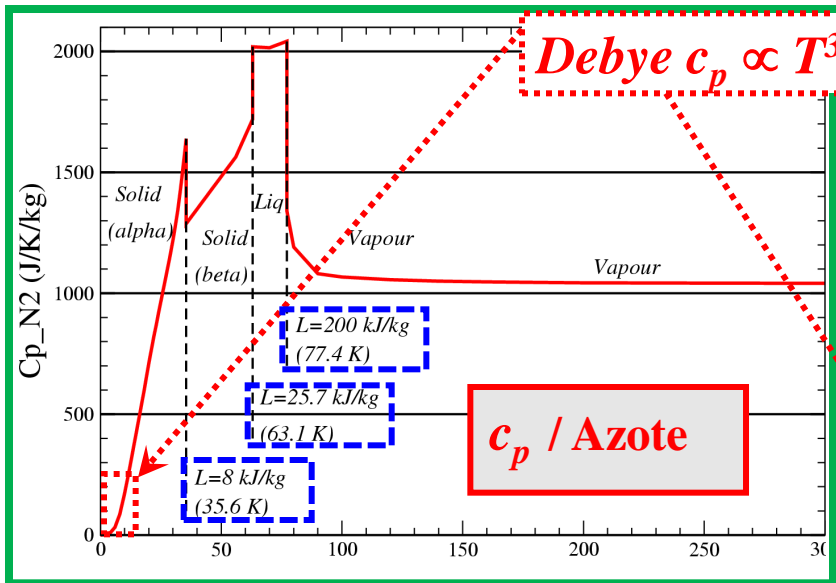
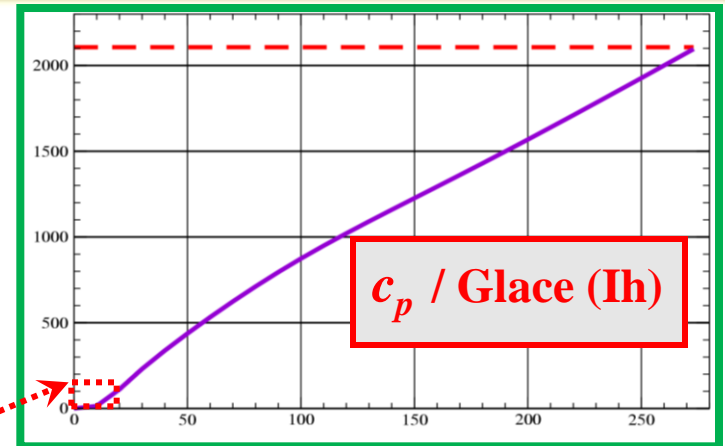
→ on peut alors comparer les parcelles d'air humide
→ différences / gradients / ...



Valeurs cryogéniques de $c_p(T)$ / W. F. Giaque (Nobel, 1949)

$$s(T_0, p_0) = s(T=0) + \int_0^{T_0} \frac{c_p(T)}{T} dT + \sum_k \frac{L_k}{T_k} + \Delta s[p_{sat}(T_0) \rightarrow p_0]$$

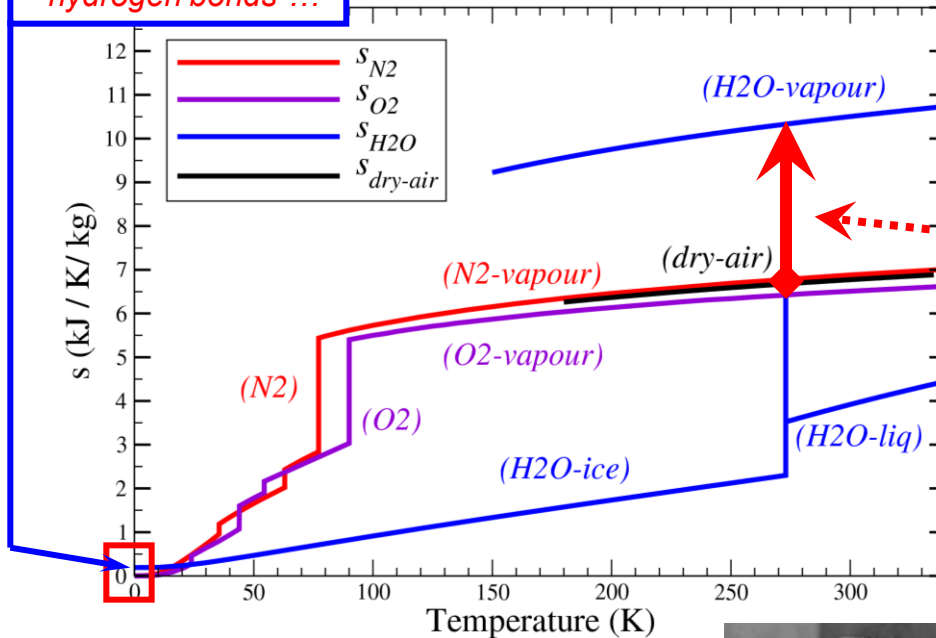
3^{ème} principe : entropies nulles pour tous les solides à 0 K



Reference values ?

Λ_r

Entropies résiduelle
à 0 K (Pauling) :
"hydrogen bonds"...



3^{ème} principe : entropies nulles
pour tous les solides à 0 K

$$\Lambda_r = \frac{(s_v)_r - (s_d)_r}{C_{pd}} \approx 5.87$$

un paramètre clef \uparrow
entropies de références pour
 $T_r = 273.15 \text{ K}$ $p_r = 1000 \text{ hPa}$
 $e_r = 6.11 \text{ hPa}$

W. F. Giaque (Nobel, 1949)



METEO FRANCE

Plan de l'exposé

1) Comment calculer l'entropie « s » ? (3^{ème} principe)

- Les formulations *absolues* : de $s(\theta_s)$ et de θ_s
- Quelques profils verticaux de θ_s ←.....

2) Approximations de θ_s : 1^{er} et 2^{ème} ordres

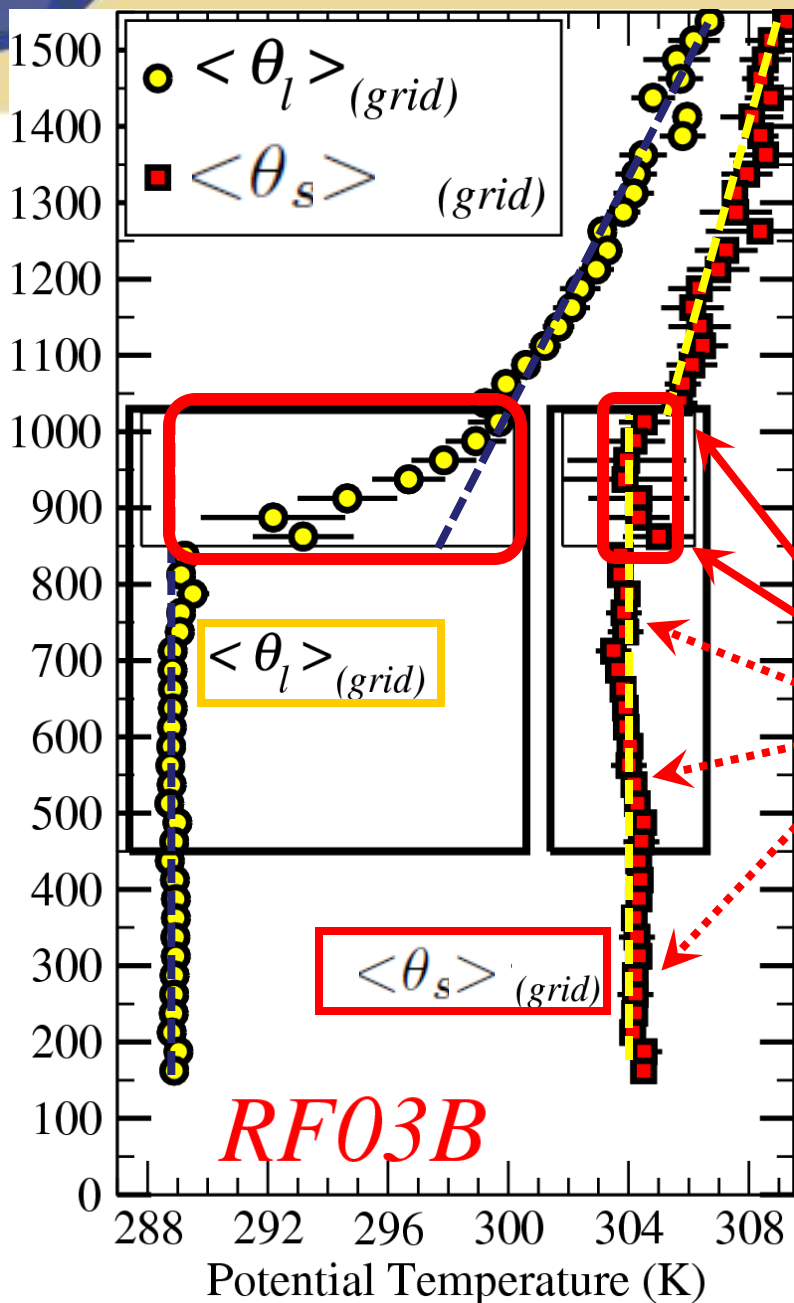
- Applications à la problématique du « C.T.E.I. »
- Applications à la turbulence de l'air humide ? (si $K_h = K_w$)
- Autre applications si $K_h \neq K_w$?

3) Comment calculer l'enthalpie « h » ?

- La formulation « *absolue* » de $h \neq \text{MSE}$
- Redéfinition des flux d'énergie : « LH » $\neq L_v F_v$?

4) Conclusions - Perspectives





Données avions de FIRE-I :

[θ_l ; θ_s] : Grid-cells

$$s = s_{ref} + c_{pd} \ln(\theta_s)$$

$\langle \theta_l \rangle$ (on the left, open circle)

$\langle \theta_s \rangle$ (on the right, open square)

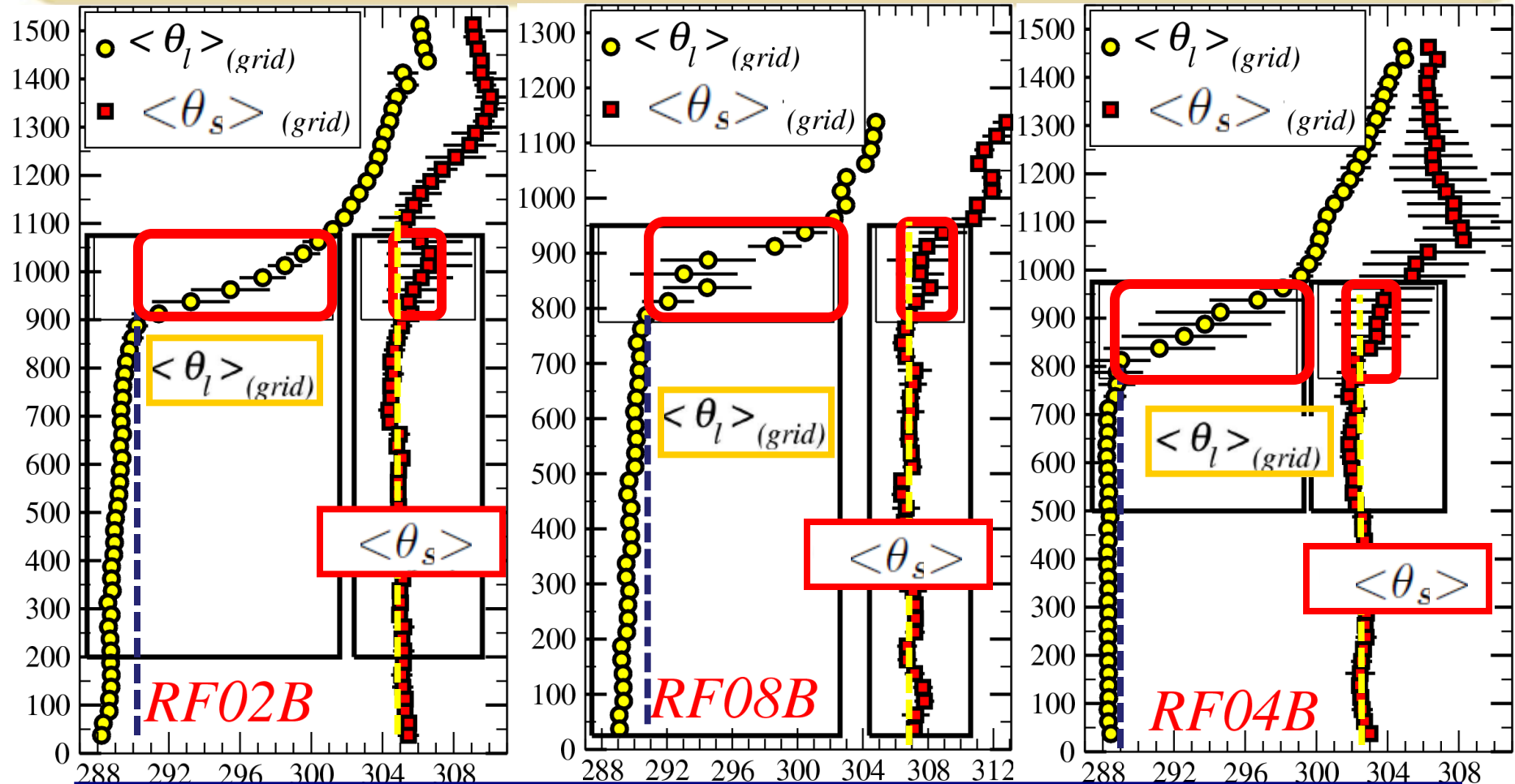
pas de saut en θ_s (faibles) au sommet !

$\theta_s \approx \text{constant dans la couche limite !}$



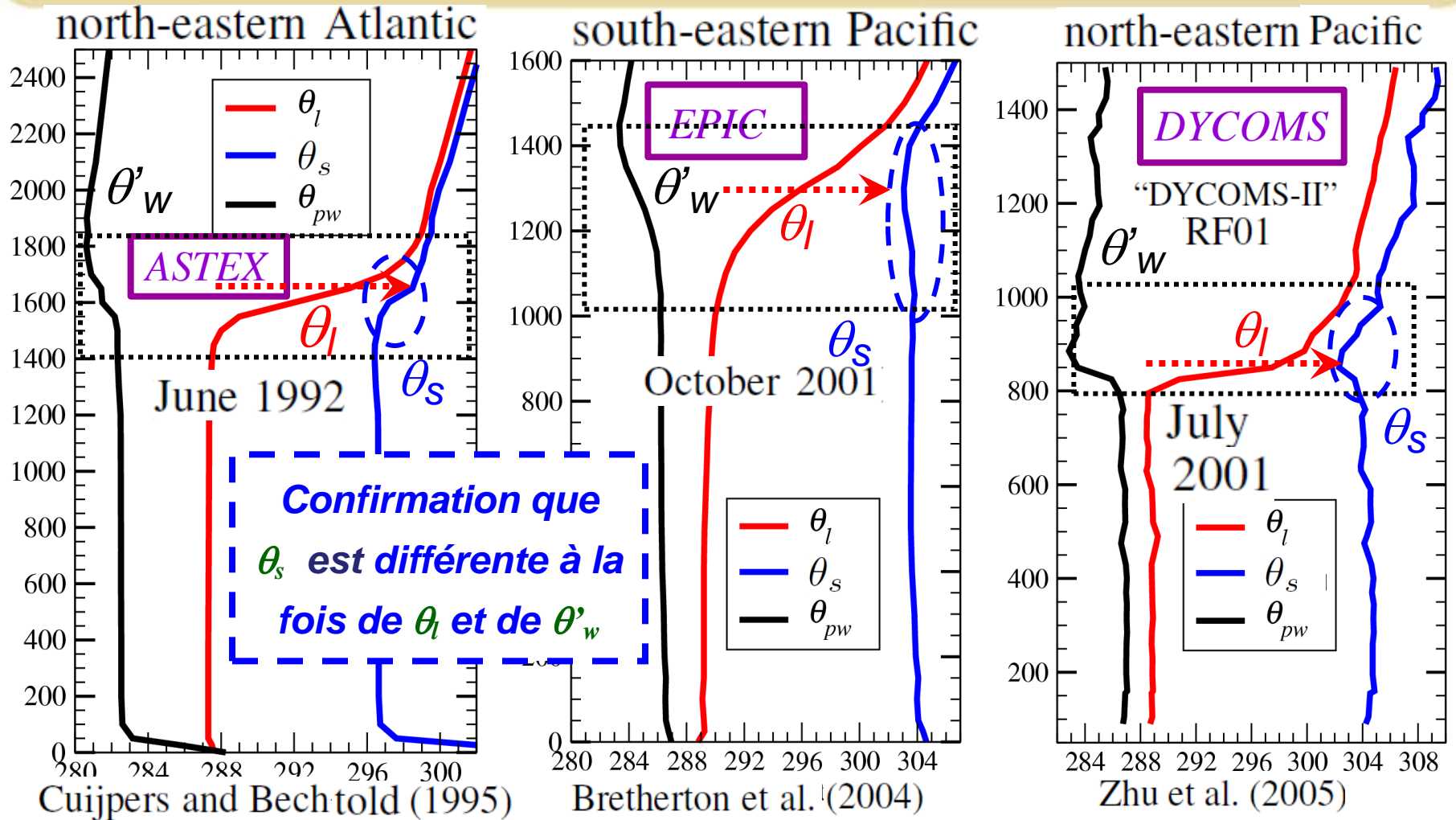
METEO FRANCE

Données avions de FIRE-I : [θ_l ; θ_s] Grid-cells



pas de sauts en θ_s au sommet / $\theta_s \approx$ constant dans la couche limite !

D'autres Stratocumulus marins :



→ importance du choix de θ_s pour mesurer l'entropie !

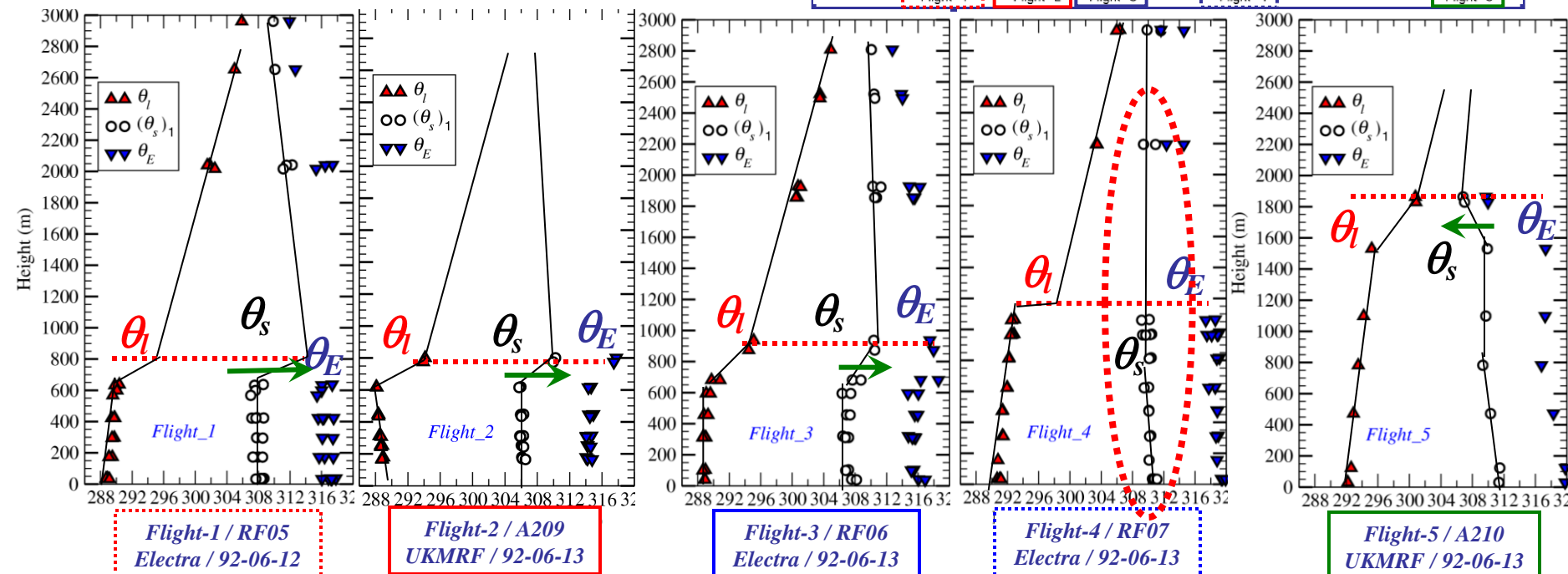
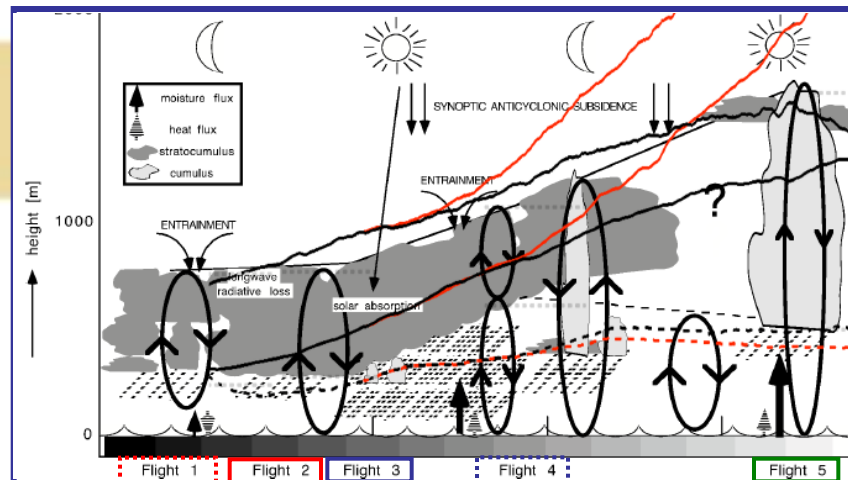


MÉTÉO FRANCE

*Transition : $Sc \rightarrow Cu$
en termes de θ_l , θ_s et de θ_E ?*

**ASTEX first
Lagrangian**

*De Roode and Dussen
(Keystone, 2010)*

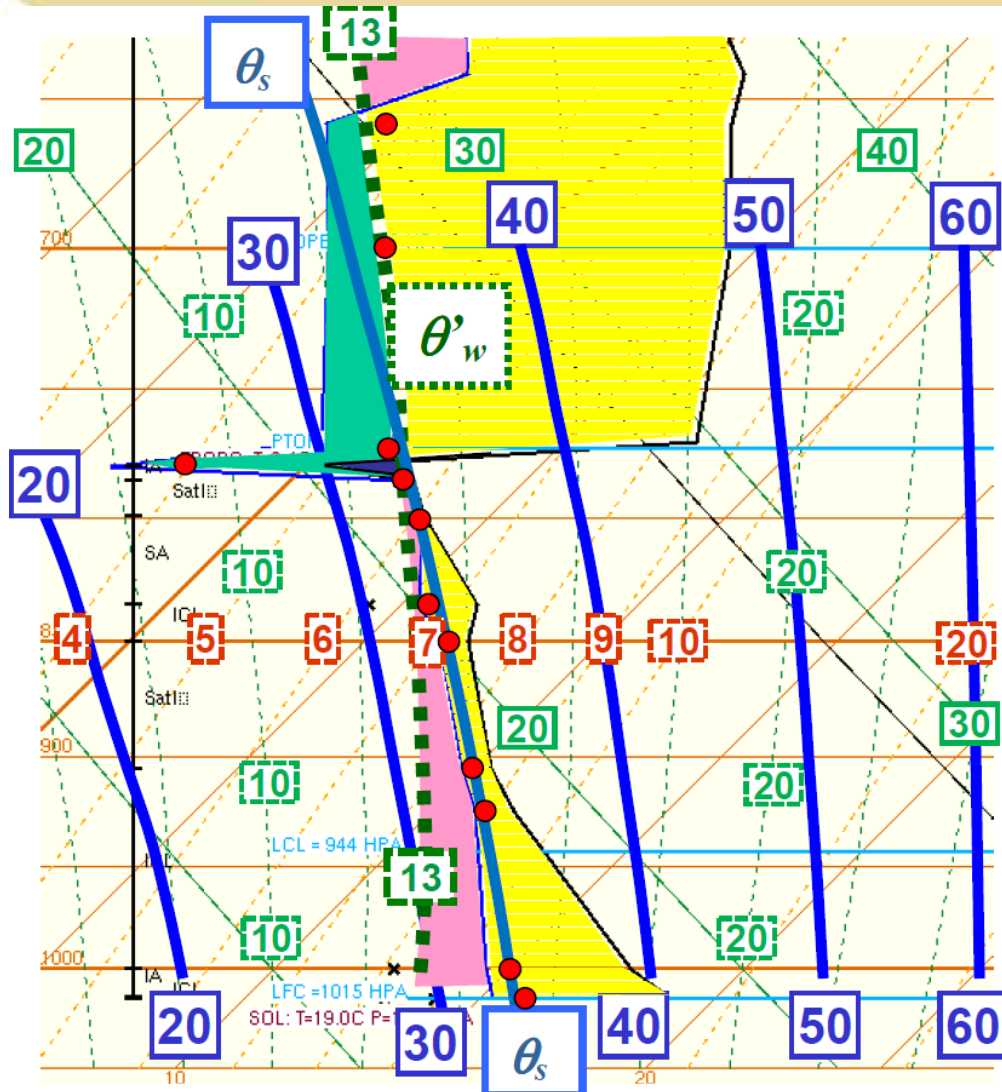


→ Neutralité pour θ_s pour pour le Flight-4 ↑ : C.T.E.I. ?



METEO FRANCE

- Radio-sondage (Bermudes, 30 mai 2010, 12UTC)



Un exemple de profil vertical observé

θ'_w

- As usual: θ'_w = thin blue line versus dashed thick green line (13 K)
- *pink* and *green* regions show that θ'_w is not conserved

- Thick blue lines represent isolines of θ_s
- Red spots represent local values of θ_s
- θ_s is almost conserved within the PBL
- θ_s is almost continuous at the top-PBL
- θ_s smoothly increases above the PBL

θ_s



METEO FRANCE

Plan de l'exposé

1) Comment calculer l'entropie « s » ? (3^{ème} principe)

- Les formulations *absolues* : de $s(\theta_s)$ et de θ_s
- Quelques profils verticaux de θ_s

2) Approximations de θ_s : 1^{er} et 2^{ème} ordres



- Applications à la problématique du « C.T.E.I. »
- Applications à la turbulence de l'air humide ? (si $K_h = K_w$)
- Autre applications si $K_h \neq K_w$?

3) Comment calculer l'enthalpie « h » ?

- La formulation « *absolue* » de $h \neq \text{MSE}$
- Redéfinition des flux d'énergie : « LH » $\neq L_v F_v$?

4) Conclusions - Perspectives



Calculs de $s(\theta_s)$: Approximations Marquet (2011)...

$$\theta_s = \theta_l \exp(\Lambda_r q_t) \left(\frac{r_r}{r_v} \right)^{\gamma q_t} (1 + \eta q_t)^{\kappa} \left(\frac{1 + \eta r_v}{1 + \eta q_t} \right)^{\kappa}$$

$$s = s_{ref} + c_{pd} \ln(\theta_s) \left(\frac{T}{T_r} \right)^{\lambda q_t} \left(\frac{p}{p_r} \right)^{-\kappa \delta q_t} \left(\frac{1 + \eta r_v}{1 + \eta r_r} \right)^{\kappa \delta q_t}$$

Une formulation complexe !



On aurait au premier ordre ? (articles de 2011)

$$\theta_s \approx \theta_l \exp(\Lambda_r q_t) \quad \Lambda_r \approx 5.87$$

→ recherche d'une justification rigoureuse
avec Jean François Geleyn (2010 ... 2013)
→ ma solution, trouvée en septembre 2013

Calculs de $s(\theta_s)$: Approximations $O(q_t^2)$?

$$\theta_s = \theta_l \exp(\Lambda_r q_t) \left(\frac{r_r}{r_v}\right)^{\gamma q_t} (1 + \eta q_t)^{\kappa} \left(\frac{1 + \eta r_v}{1 + \eta q_t}\right)^{\kappa}$$

$$s = s_{ref} + c_{pd} \ln(\theta_s)$$

$$\left(\frac{T}{T_r}\right)^{\lambda q_t} \left(\frac{p}{p_r}\right)^{-\kappa \delta q_t} \left(\frac{1 + \eta r_v}{1 + \eta r_r}\right)^{\kappa \delta q_t}$$

approximations des 3 termes encadrés :

$$\left(\frac{r_r}{r_v}\right)^{\gamma q_t} = \exp[\gamma q_t \ln(r_r/r_v)] \approx 1 - \gamma \log(r_v/r_r) q_t$$

$$(1 + \eta q_t)^{\kappa} \approx 1 + \gamma q_t \approx 1 - \gamma \log[1/\exp(1)] q_t$$

$$\left[\frac{(1 + \eta r_v)}{(1 + \eta q_t)}\right]^{\kappa} \approx -\gamma (q_t - r_v) \approx -\gamma (r_l + r_i)$$

$$\eta \kappa = \gamma$$

Calculs de $s(\theta_s)$: Approximations $O(q_t^2)$?

$$\theta_s = \theta_l \exp(\Lambda_r q_t) \left(\frac{r_r}{r_v} \right)^{\gamma q_t} (1 + \eta q_t)^\kappa \left(\frac{1 + \eta r_v}{1 + \eta q_t} \right)^\kappa$$

$$s = s_{ref} + c_{pd} \ln(\theta_s) \left(\frac{T}{T_r} \right)^{\lambda q_t} \left(\frac{p}{p_r} \right)^{-\kappa \delta q_t} \left(\frac{1 + \eta r_v}{1 + \eta r_r} \right)^{\kappa \delta q_t}$$

On a bien au « 1er » ordre :

$$\theta_s \approx \theta_l \exp(\Lambda_r q_t) + O(q_t^2) \quad \Lambda_r \approx 5.87 \gg \gamma \approx 0.46$$

Et au « 2ème » ordre :

$$\theta_s \approx \theta_l \exp \left(\left[\Lambda_r - \gamma \log \left(\frac{r_v}{r_*} \right) \right] q_t - \gamma (r_l + r_i) \right) + O(q_t^2)$$

$$\Lambda_r \approx 5.87, \gamma \approx 0.46 \text{ and } r_* \approx 12.4 \text{ g kg}^{-1}$$

+ termes de la seconde ligne négligeables ? (T, p, q_t, r_v)



Calculs de $s(\theta_s)$: Approximations $O(q_t^2)$?

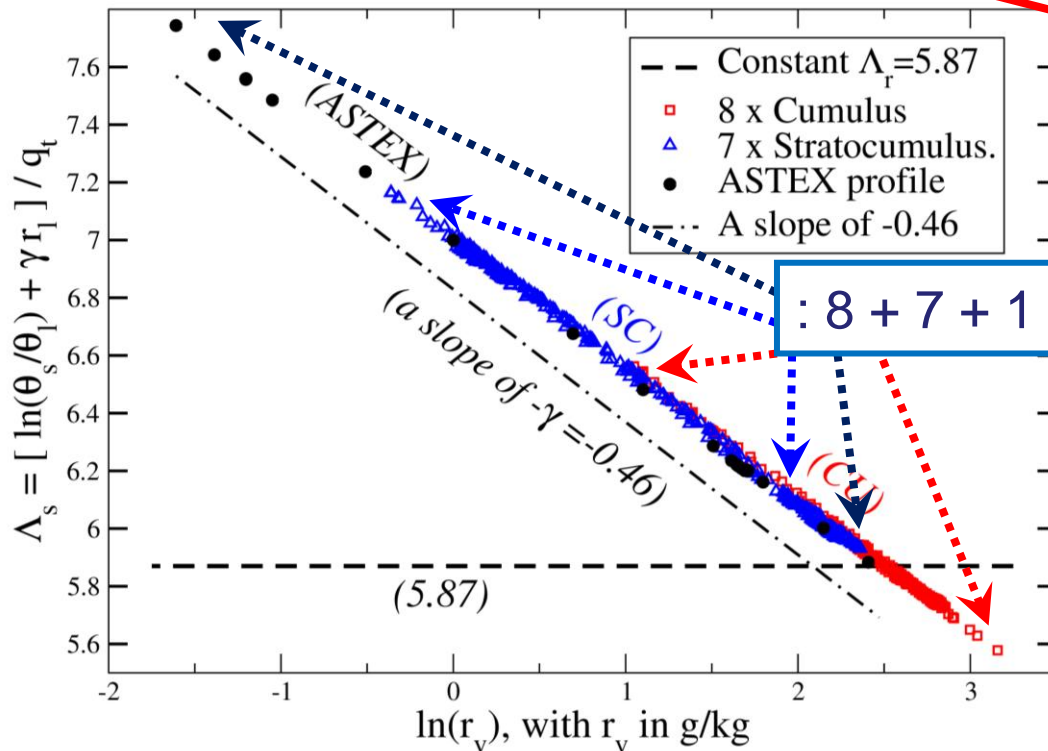
$$\theta_s \approx \theta_l \exp \left(\left[\Lambda_r - \gamma \log \left(\frac{r_v}{r_*} \right) \right] q_t - \gamma (r_l + r_i) \right) + O(q_t^2) \quad \Lambda_r \approx 5.87$$

$$\gamma \approx 0.46$$

On définit Λ_s par :

$$\theta_s = \theta_l \exp \left(\Lambda_s q_t - \gamma r_l \right) ?$$

: 8 + 7 + 1 profils de Cu et Sc



$$\Lambda_s \approx -\gamma \ln(r_v) + Cste ?$$

Ajustement linéaire en $\ln(r_v)$

La bonne pente $-\gamma \approx -0.46$

Cela valide le deuxième ordre



Calculs de $s(\theta_s)$: Approximations $O(q_t^2)$?

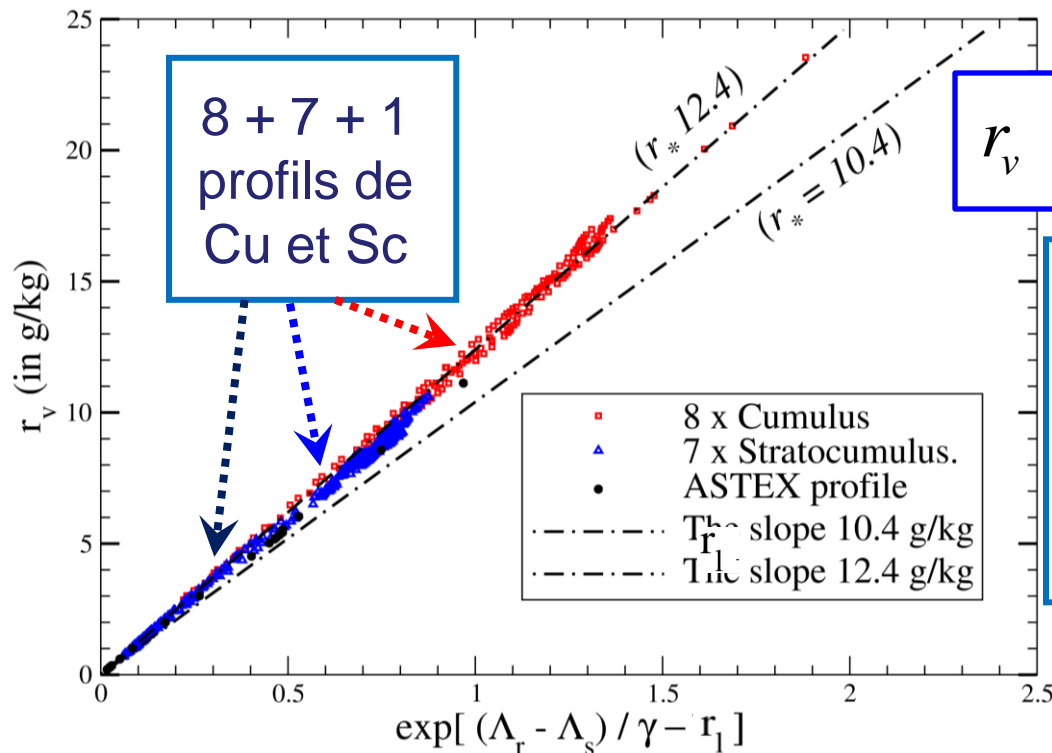
$$\theta_s \approx \theta_l \exp \left(\left[\Lambda_r - \gamma \log \left(\frac{r_v}{r_*} \right) \right] q_t - \gamma (r_l + r_i) \right) + O(q_t^2) \quad \Lambda_r \approx 5.87$$

$$\gamma \approx 0.46$$

$$\theta_s = \theta_l \exp (\Lambda_s q_t - \gamma r_l)$$

Quelle valeur pour r_* ?

8 + 7 + 1
profils de
Cu et Sc



$$r_v \approx r_* \exp \left[(\Lambda_r - \Lambda_s) / \gamma - r_l \right] ?$$

Un bon ajustement linéaire

Une pente $r_* \approx 12.4 \text{ g/kg} \neq 10.4$

\leftrightarrow seconde ligne (T, p) ?

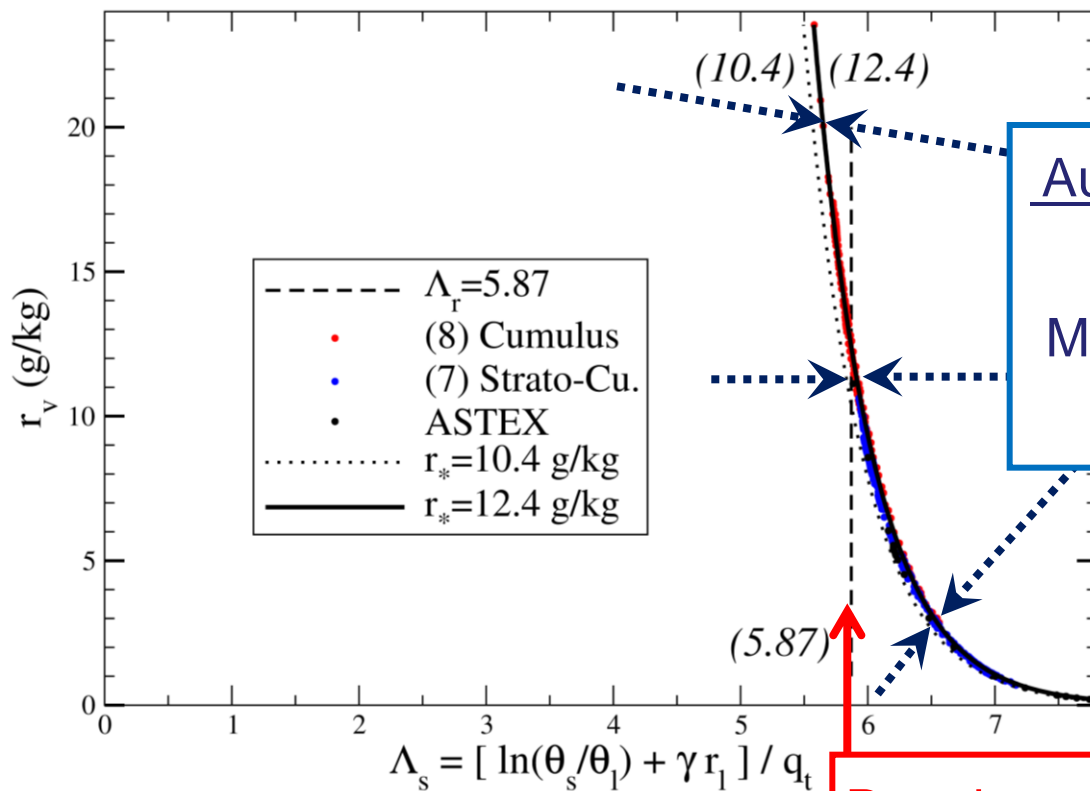
\leftrightarrow ou bien termes $O(q_t^2)$?



Calculs de $s(\theta_s)$: Approximations $O(q_t^2)$!

$$\theta_s \approx \theta_l \exp\left(\left[\Lambda_r - \gamma \log\left(\frac{r_v}{r_*}\right)\right] q_t - \gamma(r_l + r_i)\right) + O(q_t^2)$$

$\Lambda_r \approx 5.87$
 $\gamma \approx 0.46$



Au final : un très bon ajustement
recherché de 2010 à 2013.
Marquet & Geleyn / Conv. Book
+ WGNE Bue Book (2015)

$$\theta_s = \theta_l \exp(\Lambda_s q_t - \gamma r_l)$$

Premier ordre : $\Lambda \approx 5.87$ (Marquet, 2011)



Plan de l'exposé

1) Comment calculer l'entropie « s » ? (3^{ème} principe)

- Les formulations *absolues* : de $s(\theta_s)$ et de θ_s
- Quelques profils verticaux de θ_s

2) Approximations de θ_s : 1^{er} et 2^{ème} ordres

- Applications à la problématique du « C.T.E.I. » ←.....
- Applications à la turbulence de l'air humide ? (si $K_h = K_w$)
- Autre applications si $K_h \neq K_w$?

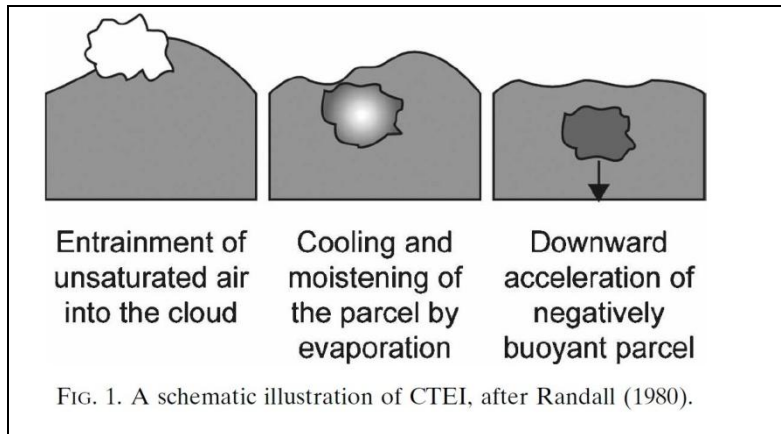
3) Comment calculer l'enthalpie « h » ?

- La formulation « *absolue* » de $h \neq \text{MSE}$
- Redéfinition des flux d'énergie : « LH » $\neq L_v F_v$?

4) Conclusions - Perspectives



- **CTEI** = *Cloud Top Entrainment Instability* ?



← Pb maintien des Stratocumulus marins : impacts de l'inclusion d'air plus chaud et plus sec au dessus de l'inversion ?

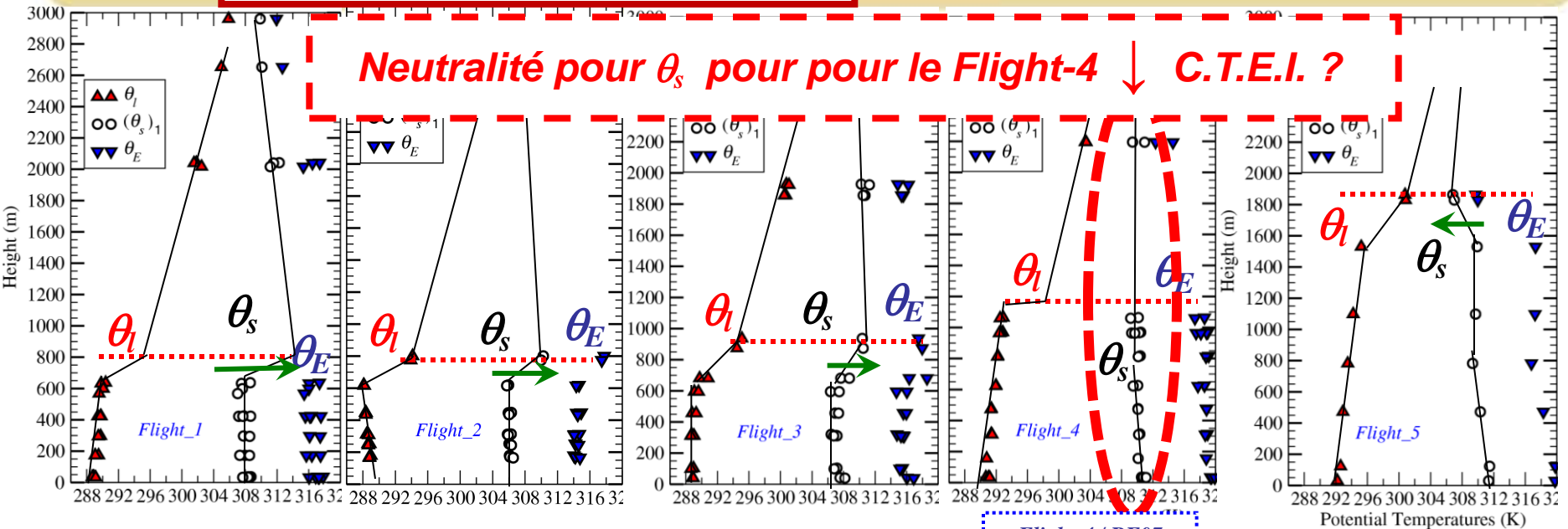
Lilly (68) Randall-Deardorff (80) : critères d'instabilité = valeur(s) critique(s) sur les sauts à l'inversion en $(\theta_v \theta_l \theta_e)$ comparés à ceux en $q_t \rightarrow$ paramètre « κ »

$$\Delta\theta_e < \kappa \left(\frac{L}{c_p} \right) \Delta r$$

Formula	References
$\Delta_{RD} < 0$	Randall (1976, 1980); Deardorff (1980)
$\kappa > 0.23$	Kuo and Schubert (1988)
$D > 1.3$	Siems et al. (1990); Shy and Breidenthal 1990)
$\kappa > 0.7$	MacVean and Mason (1990)

Transition : $Sc \rightarrow Cu$
en termes de θ_l , θ_s et de θ_E ?

ASTEX first Lagrangian



pour $\theta_s \approx \theta_l \exp(5.87 q_t)$ on trouve :

$$\Delta \theta_s \approx \exp(5.87 q_t) \Delta \theta_l + 5.87 \theta_l \Delta q_t$$

$$\Delta \theta_s \approx 0 \rightarrow \Delta \theta_l \approx - \frac{5.87 \theta_l}{\exp(5.87 q_t)} \Delta q_t$$

et pour « κ » définit par : $\Delta \theta_e \approx \kappa \frac{L_v}{c_{pd}} \Delta q_t$

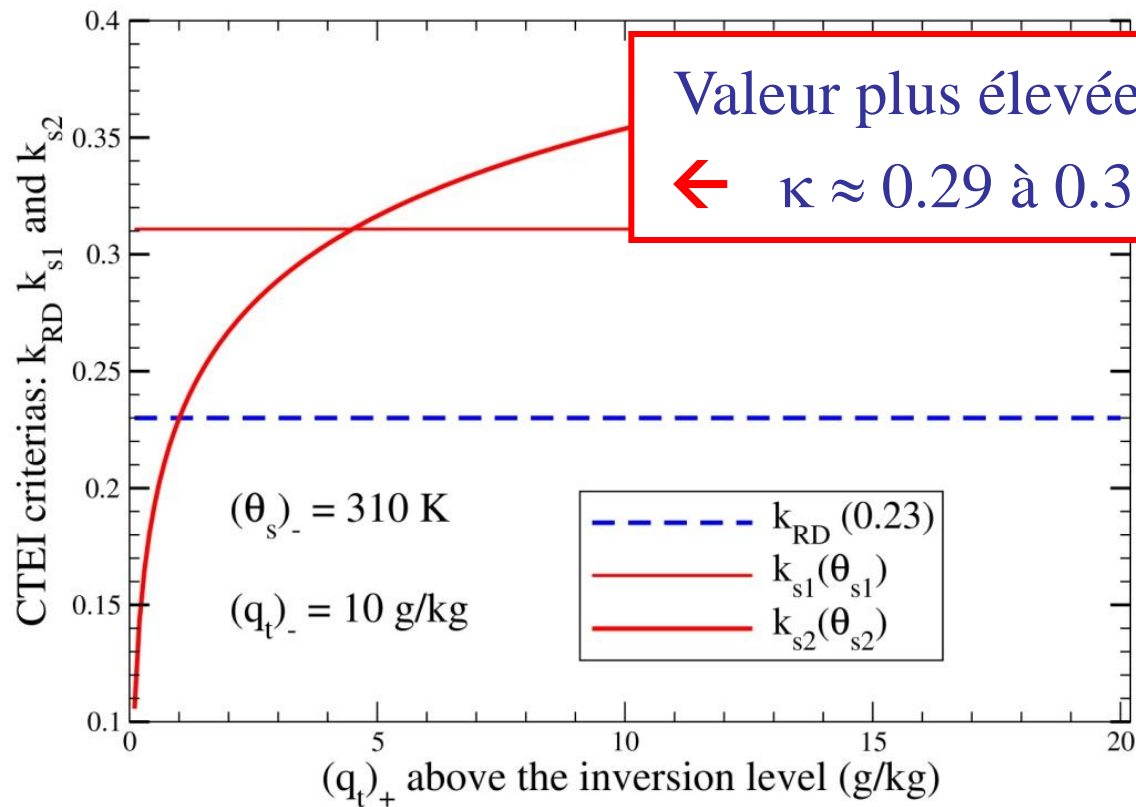
$\rightarrow \kappa \approx 0.29$ / plausible !
(Marquet, 2011)



METEO FRANCE

- **CTEI** / θ_s au deuxième ordre ?

$$\theta_s \approx \theta_l \exp\left(\left[\Lambda_r - \gamma \log\left(\frac{r_v}{r_*}\right)\right] q_t\right) \quad \Lambda_r \approx 5.87 \quad \gamma \approx 0.46$$



- **CTEI / Yamaguchi & Randall (JAS, 2008)**

YAMAGUCHI AND RANDALL

*Une série de LES
(ici 7x9=63)
avec différents sauts
en $\Delta\theta_v$ et Δr_t :*

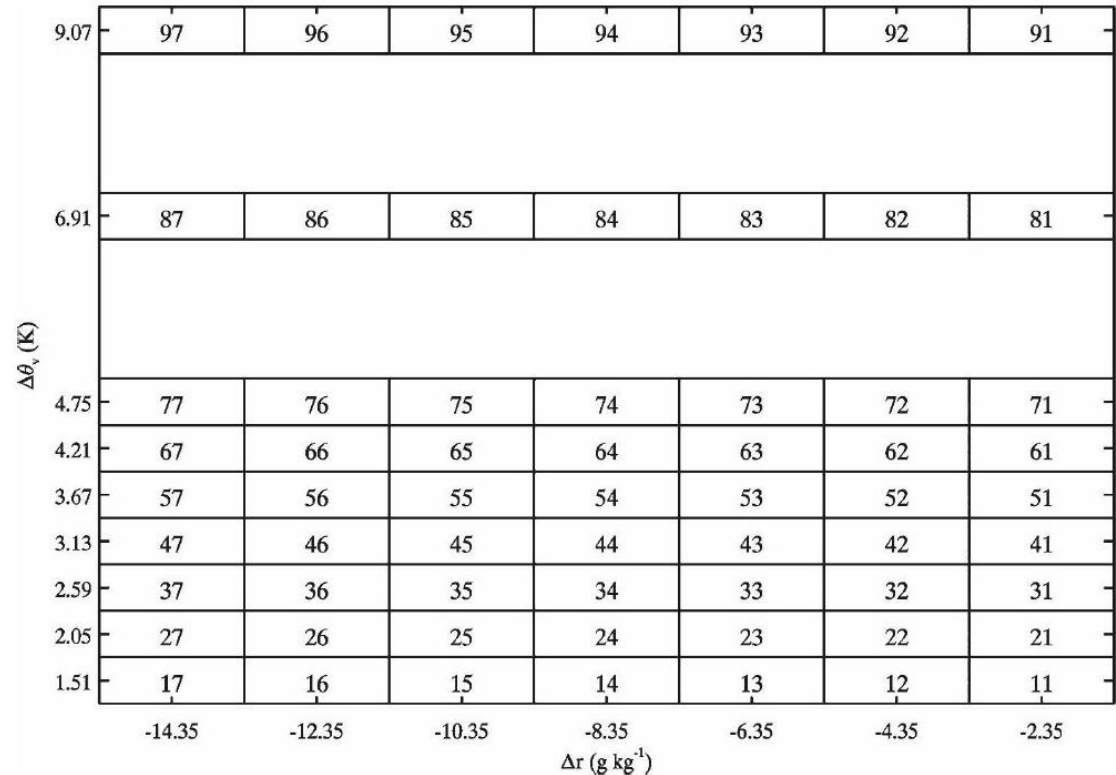


FIG. 3. Case indices of BR-0.5 depending on the jump values of moisture and buoyancy in the $\Delta\theta_v$ - Δr plane. For example, jump values of case 65 are $\Delta\theta_v = 4.21$ K and $\Delta r = -10.35$ g kg⁻¹.

- **CTEI** / Yamaguchi & Randall (JAS, 2008)

*On évalue pour chacun des couples $(\Delta\theta_v ; \Delta r_t)$
le **temps d'évaporation** versus la **stabilité** :*

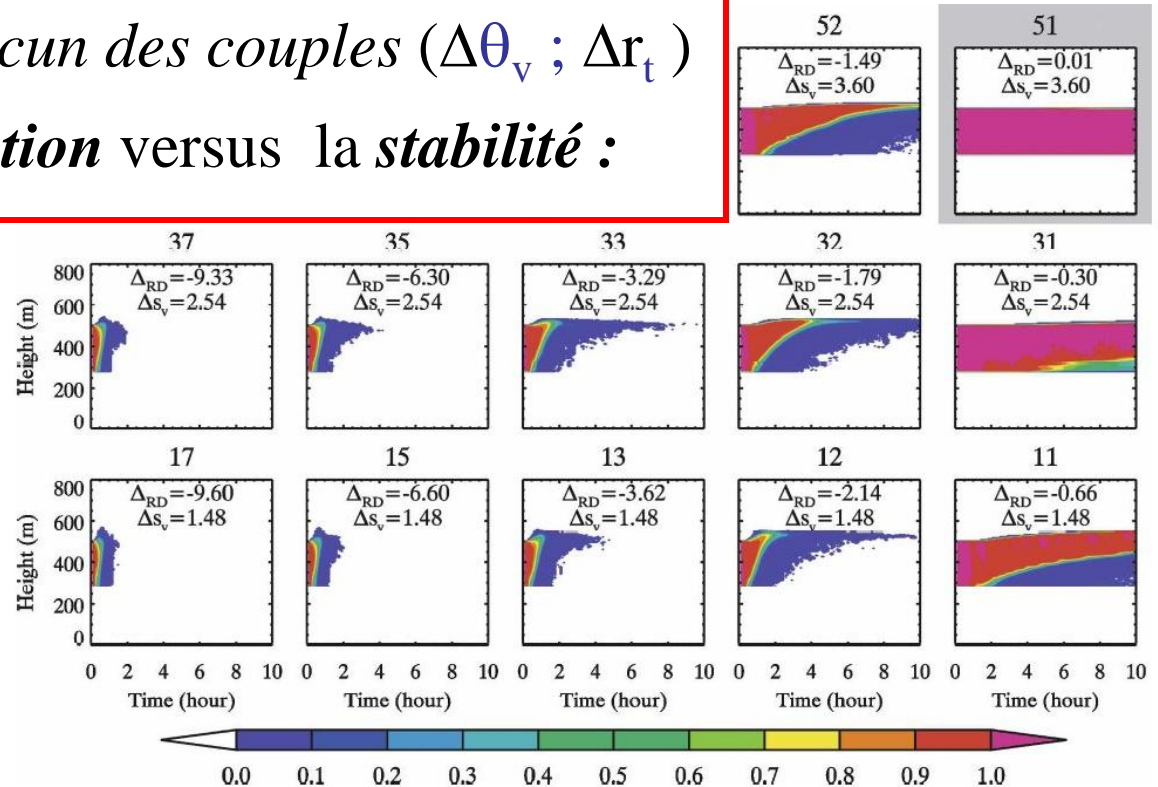


FIG. 9. Time evolution of cloud fraction with the initial Δ_{S_v} and Δ_{RD} of each case for a subset of the BR-0.5 cases. Spatial arrangement of the small plots in this figure roughly corresponds to the arrangement of the dots in Fig. 7. Cases with light gray background are stable with respect to CTEI, according to the RD criterion.

- **CTEI / Yamaguchi & Randall (JAS, 2008)**

pour chaque LES ($\Delta\theta_v$; Δ_{RD}) :
croix colorées en fonction du
temps d'évaporation
(rouge = stable > 10h)

($\Delta\theta_v$; Δ_{RD}) pas bon \rightarrow
 $\tau > 12$ h et $\Delta_{RD} < 0$!

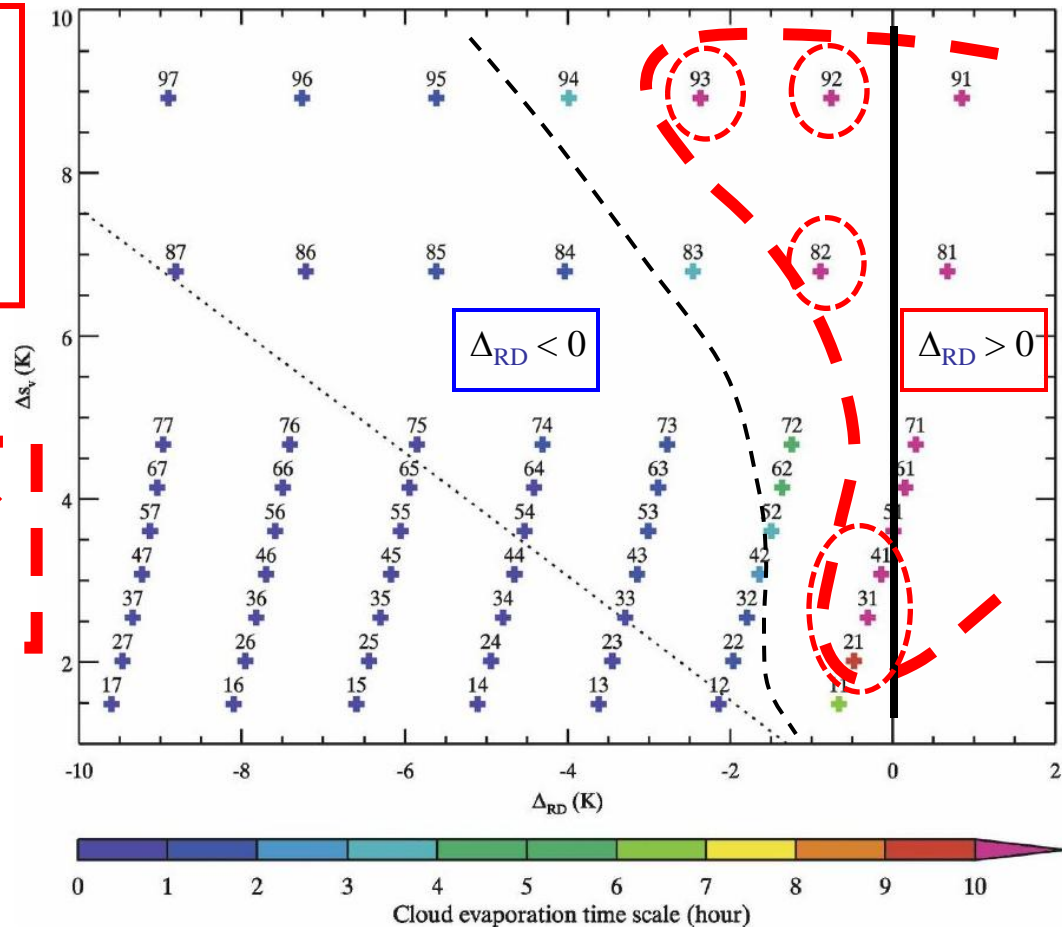
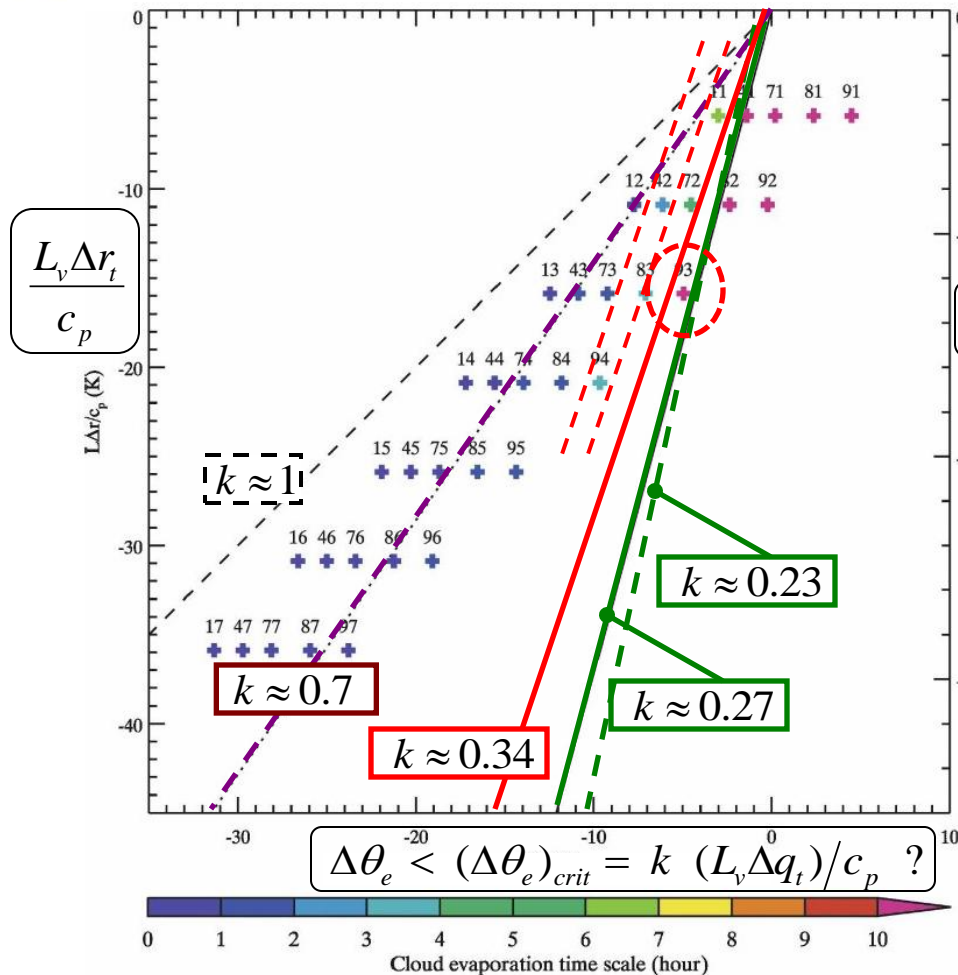


FIG. 7. CTEI diagram of BR-0.5. The solid line is a theoretical boundary corresponding to the RD criterion, such that instability occurs to the left of the line. The dotted line is a theoretical boundary for the SB criterion. Color indicates the cloud evaporation time scale in hours, as defined in the text.

- **CTEI / Yamaguchi & Randall (JAS, 2008)**



pour chaque LES ($\Delta\theta_e$; Δr_t) :
 croix colorées en fonction du
 temps d'évaporation
 (rouge = stable > 10h)

$\kappa \approx 0.23$ (RD) à 0.27 (YR) pas bons
 $\kappa \approx 0.7$ mauvais (McVean & Mason)
 ← $(\tau > 12 \text{ h})$ et $\Delta\theta_e < (\Delta\theta_e)_{crit}$!

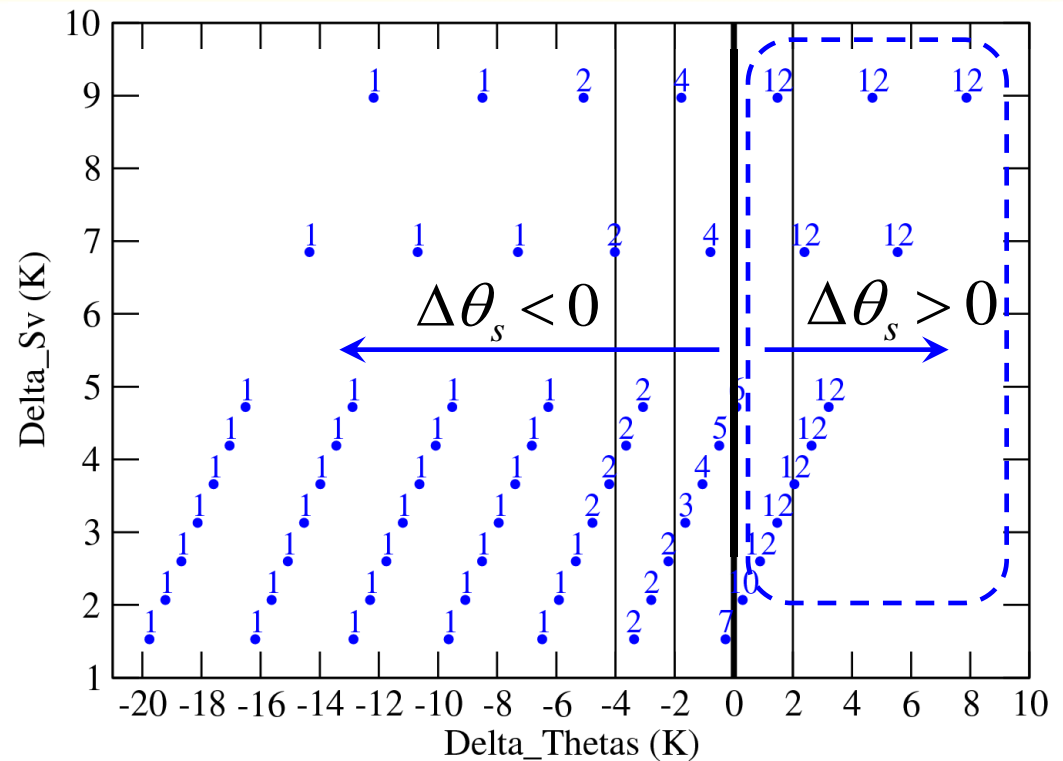
$\kappa \approx 0.29$ à 0.35 meilleurs ...
 $\Delta\theta_s \approx 0$: entropie humide !

FIG. 8. CTEI diagram for BR-0.5, plotted for comparison with the KS criterion. The solid line is the stability boundary, where $\kappa = 0.27$. The dotted line is the stability boundary for the MM criterion ($\kappa = 0.7$), and the dashed line is $\kappa = 1$. Compare with Fig. 1 of Kuo and Schubert (1988).

- **CTEI / Yamaguchi & Randall (JAS, 2008)**

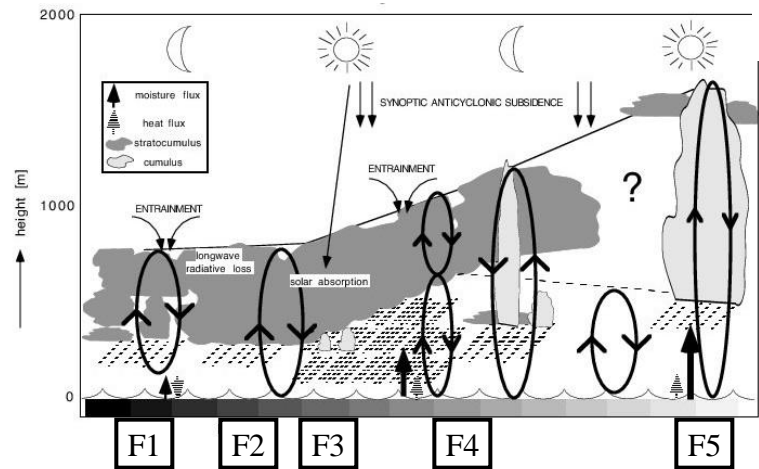
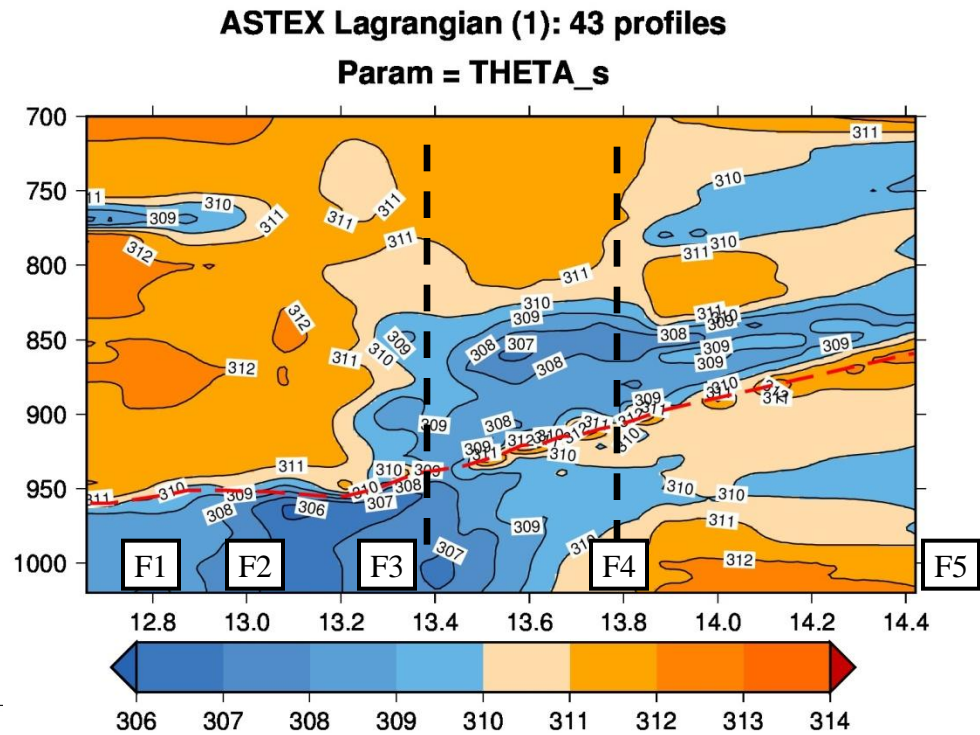
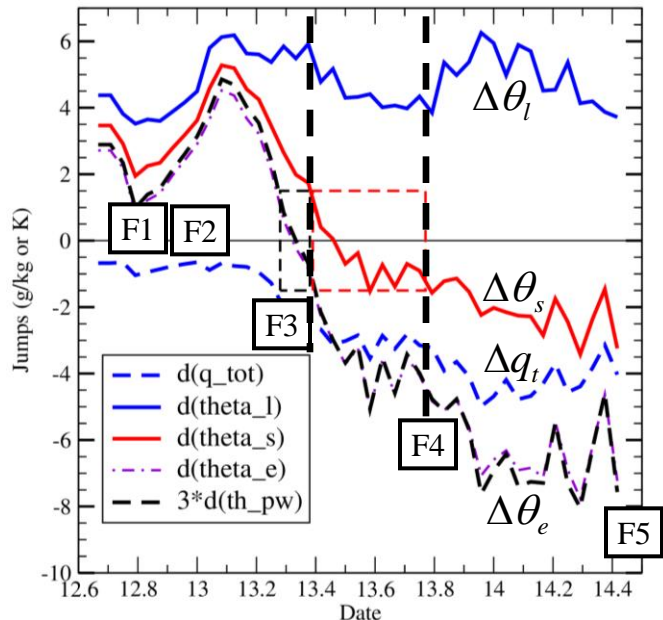
pour chaque LES ($\Delta\theta_s$; $\Delta\theta_v$) :
 valeur (en heure) du
 temps d'évaporation →
 (stable > 12h)

stabilité pour $\Delta\theta_s > 0$
 instabilité pour $\Delta\theta_s < 0$
 → importance du
saut en entropie humide !



... skip ...

• CTEI : ASTEX-Lag1 / Bretherton Pincus (JAS, 1995)



Profils originaux de Bretherton Pincus 1995
→ importance du saut en entropie humide !

... skip ...

- **CTEI** / Sandu Stevens Pincus

On the stratocumulus to shallow cumulus
transitions and their controlling factors

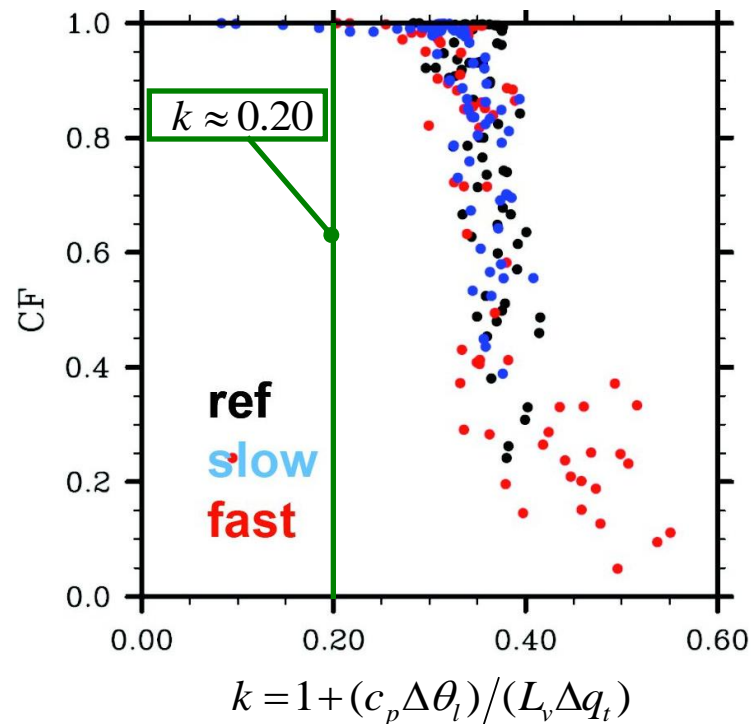
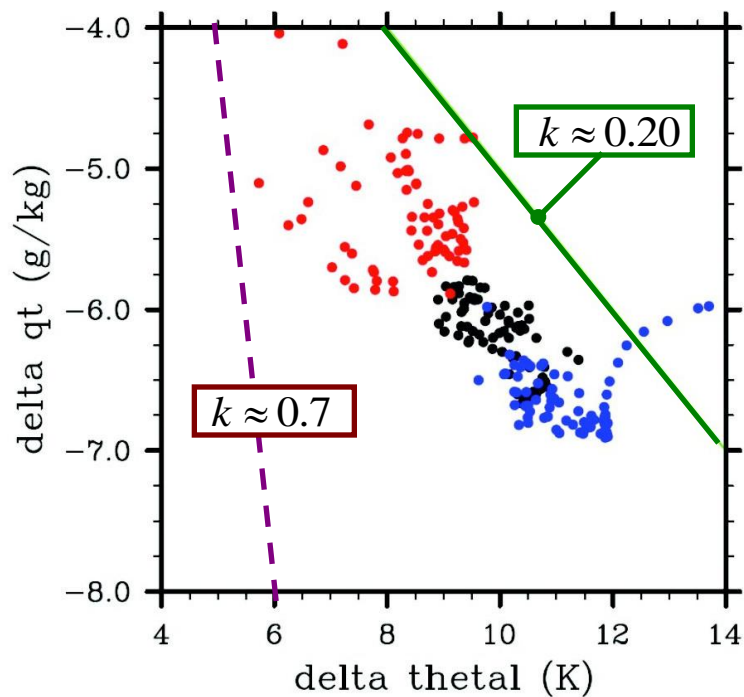
Irina Sandu,
Bjorn Stevens and Robert Pincus



NE Pacific

... skip ...

• CTEI / Sandu Stevens Pincus

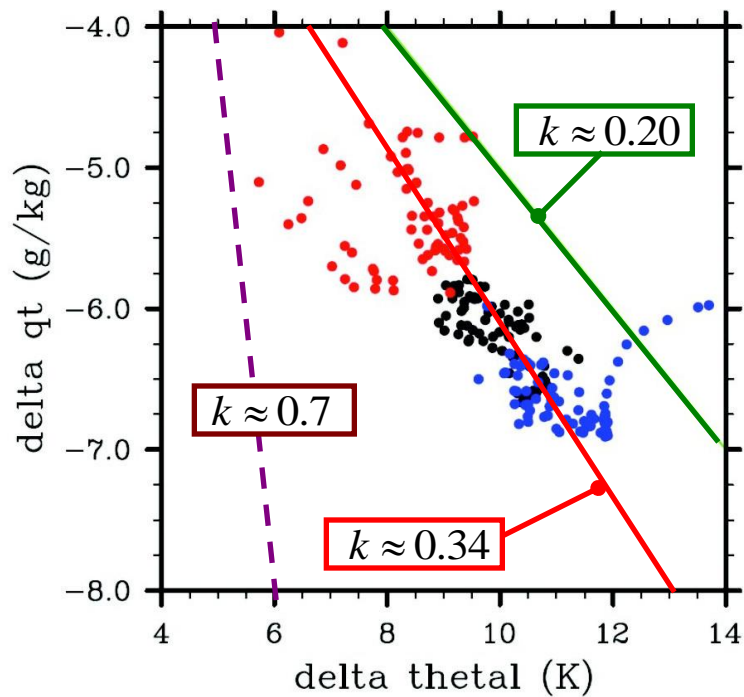


$$(\Delta \theta_l)_{crit} < -(1-k)(L_v \Delta q_t) / c_p$$

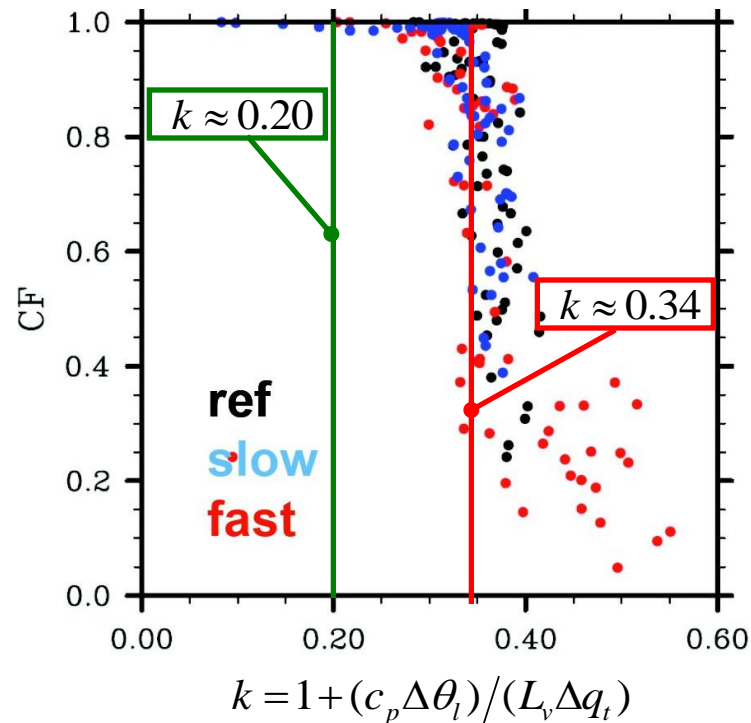


... skip ...

• CTEI / Sandu Stevens Pincus



$$(\Delta \theta_l)_{crit} < -(1-k)(L_v \Delta q_t) / c_p$$



$\kappa \approx 0.34$ meilleur ...
 $\Delta \theta_s \approx 0$: entropie humide !

Plan de l'exposé

1) Comment calculer l'entropie « s » ? (3^{ème} principe)

- Les formulations *absolues* : de $s(\theta_s)$ et de θ_s
- Quelques profils verticaux de θ_s

2) Approximations de θ_s : 1^{er} et 2^{ème} ordres

- Applications à la problématique du « C.T.E.I. »
- **Applications à la turbulence de l'air humide ? (si $K_h = K_w$)** ←.....
- Autre applications si $K_h \neq K_w$?

3) Comment calculer l'enthalpie « h » ?

- La formulation « *absolue* » de $h \neq \text{MSE}$
- Redéfinition des flux d'énergie : « LH » $\neq L_v F_v$?

4) Conclusions - Perspectives



• Taylor (1915) → Richardson (1919)

Atmospheric Stirring Measured by Precipitation.

By LEWIS F. RICHARDSON. Proc. Roy. Soc. London. Vol 96. pp.9-18

The General Equations for Stirring.

In Taylor's theory of atmospheric stirring,* the density of the atmosphere and the stirring coefficient are treated as independent of height.

Under these restrictions he arrives at the equation

$$\frac{\partial \chi'}{\partial t} = K \frac{\partial^2 \chi'}{\partial h^2}, \quad (1)$$

where t is time, h is height, K is the eddy-diffusivity, and χ' may be either the potential temperature, or the vapour pressure, or the horizontal velocity in a fixed azimuth.

The present paper deals with a range of height involving considerable variations of density and very large variations in the stirring, so that it is necessary to find an equation more general than (1). At the same time, it will be convenient to arrange to have a simple expression not only for $\partial \chi' / \partial t$, but also for the vertical flux.

Here we may usefully bear in mind the analogy with the conduction of heat in a solid. The total water in a portion of air, or the total entropy in it, are not altered by gently mixing it; and the same is true of its horizontal momentum in a fixed azimuth.

* 'Phil. Trans.,' A, vol. 215, p. 3 (1915).

Mélanges turbulents de l'air humide pour :

- l'eau totale $\rightarrow q_t$
- l'entropie $\rightarrow s(\theta_s)$
- le vent horizontal $\rightarrow (u, v)$

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial h} \left(c \frac{\partial \chi}{\partial h} \right) = -g \frac{\partial}{\partial p} \left(c \frac{\partial \chi}{\partial h} \right)$$

$$dp = -g \rho dh.$$

let us put $g^2 \rho c = \xi$, then

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial p} \left(\xi \frac{\partial \chi}{\partial p} \right)$$

- **Turbulence humide : utilisation de θ_s ?**

Supposons : $s = s_{ref} + c_{pd} \ln(\theta_s)$

$$\theta_s \approx \theta_l \exp(\Lambda_r q_t) \quad (\Lambda_r \approx 5.87)$$

et :

$$\overline{w'\theta_s'} \approx -K_s \partial \bar{\theta}_s / \partial z$$

$$\overline{w'\theta_l'} \approx -K_h \partial \bar{\theta}_l / \partial z$$

$$\overline{w'q_t'} \approx -K_w \partial \bar{q}_t / \partial z$$

on obtient alors : $\frac{\partial \bar{\theta}_s}{\partial z} \approx \exp(\Lambda_r \bar{q}_t) \frac{\partial \bar{\theta}_l}{\partial z} + \Lambda_r \bar{\theta}_s \frac{\partial \bar{q}_t}{\partial z}$

et : $\overline{w'\theta_s'} \approx \exp(\Lambda_r \bar{q}_t) \overline{w'\theta_l'} + \Lambda_r \bar{\theta}_s \overline{w'q_t'}$

soit : $\overline{w'\theta_l'} \approx \exp(-\Lambda_r \bar{q}_t) \overline{w'\theta_s'} - \Lambda_r \bar{\theta}_l \overline{w'q_t'}$

- **Turbulence humide : utilisation de θ_s ?**

Supposons : $s = s_{ref} + c_{pd} \ln(\theta_s)$

$$\theta_s \approx \theta_l \exp(\Lambda_r q_t) \quad (\Lambda_r \approx 5.87)$$

et :

$$\overline{w'\theta_s'} \approx -K_s \partial \bar{\theta}_s / \partial z$$

$$\overline{w'\theta_l'} \approx -K_h \partial \bar{\theta}_l / \partial z$$

$$\overline{w'q_t'} \approx -K_w \partial \bar{q}_t / \partial z$$

et finalement :

$$\overline{w'\theta_l'} \approx -K_s \frac{\partial \bar{\theta}_l}{\partial z} - (K_s - K_w) \Lambda_r \bar{\theta}_l \frac{\partial \bar{q}_t}{\partial z}$$

à comparer avec :

$$\overline{w'\theta_l'} \approx -K_h \frac{\partial \bar{\theta}_l}{\partial z}$$

↑ contre-gradient ?
si $K_s \neq K_w$

semblables si :

$$K_s = K_h$$

← une définition de K_s ?

$$K_s = K_w$$

← ($K_h = K_w$) dans tous les modèles ...

- **Turbulence humide : utilisation de θ_s ?**

Supposons : $s = s_{ref} + c_{pd} \ln(\theta_s)$

$$\theta_s \approx \theta_l \exp \left(\left[\Lambda_r - \gamma \log(r_v / r_*) \right] q_t - \gamma r_l \right)$$

(2ème ordre) $\Lambda_r \approx 5.87$ $\gamma \approx 0.46$ et :

$$\overline{w' \theta_s'} \approx -K_s \partial \bar{\theta}_s / \partial z$$

$$\overline{w' \theta_l'} \approx -K_h \partial \bar{\theta}_l / \partial z$$

$$\overline{w' q_t'} \approx -K_w \partial \bar{q}_t / \partial z$$

la présence au second ordre des variables

« non-conservatives »

$$r_v = r_t - r_l \text{ et } r_l$$

$$\overline{w' q_l'} \leftrightarrow \overline{w' \theta_l'} \text{ et } \overline{w' q_t'} \text{ (PDF)}$$

oblige de prendre en compte les flux de q_l !

(via les PDF : Smith, Bougeault, ... , pronostiques)

→ le choix de θ_s importe si nuages ! (impacts \neq de θ_l)

→ $\gamma \approx 0.46$ n'est pas « petit » : comparable à celui pour θ_v ! (0.61)

... skip ...

- **Turbulence humide : utilisation de θ_s ?**

Supposons : $s = s_{ref} + c_{pd} \ln(\theta_s)$

$$\theta_s \approx \theta_l \exp(-\gamma r_l) \quad \gamma \approx 0.46$$

↑ un exemple simplifié

$$\overline{w'q_l'} \approx F(PDF) \overline{w's'}$$

$$s' \approx a(q_t' - \alpha \theta_l')$$

Sommeria Deardorff
(ou autres méthodes)

$$\overline{w'\theta_s'} \approx -K_s \partial \bar{\theta}_s / \partial z$$

$$\overline{w'\theta_l'} \approx -K_h \partial \bar{\theta}_l / \partial z$$

$$\overline{w'q_t'} \approx -K_w \partial \bar{q}_t / \partial z$$

et :

finalement :

$$\overline{w'\theta_l'} \approx -K_s \frac{\partial \bar{\theta}_l}{\partial z} - \gamma \bar{\theta}_l \left(K_s \frac{\partial \bar{q}_l}{\partial z} + \overline{w'q_l'} \right)$$

à comparer avec :

$$\overline{w'\theta_l'} \approx -K_h \frac{\partial \bar{\theta}_l}{\partial z}$$

non-nul ...



Plan de l'exposé

1) Comment calculer l'entropie « s » ? (3^{ème} principe)

- Les formulations *absolues* : de $s(\theta_s)$ et de θ_s
- Quelques profils verticaux de θ_s

2) Approximations de θ_s : 1^{er} et 2^{ème} ordres

- Applications à la problématique du « C.T.E.I. »
- Applications à la turbulence de l'air humide ? (si $K_h = K_w$)
- **Autre applications si $K_h \neq K_w$?** ←.....

3) Comment calculer l'enthalpie « h » ?

- La formulation « *absolue* » de $h \neq \text{MSE}$
- Redéfinition des flux d'énergie : « LH » $\neq L_v F_v$?

4) Conclusions - Perspectives



• Turbulence humide : utilisation de θ_s ?

Richardson (1919) : mélanges turbulents de l'air humide pour :

- l'**eau totale** $\rightarrow q_t$
- l'**entropie** $\rightarrow s(\theta_s)$
- le **vent horizontal** $\rightarrow (u, v)$

mais hypothèses $K_s = K_h = K_w$

- **peu probables**
- **car principes physiques différents**
- **et « entropie » \neq traceur passif**

(... rappel ...)

$$\overline{w'\theta_l'} \approx -K_s \frac{\partial \bar{\theta}_l}{\partial z} - (K_s - K_w) \Lambda_r \bar{\theta}_l \frac{\partial \bar{q}_t}{\partial z}$$

$$\overline{w'\theta_l'} \approx -K_h \frac{\partial \bar{\theta}_l}{\partial z}$$

semblables si :

$$\begin{aligned} K_s &= K_h \\ K_s &= K_w \end{aligned}$$



• Schéma “CBR” (ARPEGE / AROME)

Closure: dissipative terms

$$\epsilon_\theta = 2C_{\epsilon_\theta} \frac{\sqrt{e}}{L_\epsilon} \overline{\theta'^2}$$

$$\epsilon_q = 2C_{\epsilon_q} \frac{\sqrt{e}}{L_\epsilon} \overline{q'^2}$$

$$\epsilon_{\theta q} = 2C_{\epsilon_{\theta q}} \frac{\sqrt{e}}{L_\epsilon} \overline{\theta' q'}$$

$$C_{\epsilon_\theta} = C_{\epsilon_q} = C_{\epsilon_{\theta q}}$$

Closure: pressure terms

$$\Pi_{ij} = C_{pv} \frac{\sqrt{e}}{L} (b_{ij}) - \frac{4}{5} e S_{ij} - \Sigma_{ij} - \alpha_2 Z_{ij} + (1 - \alpha_3) B_{ij}$$

$$\Pi_{i\theta} = C_{p\theta} \frac{\sqrt{e}}{L} (\overline{u'_i \theta'}) + \frac{1}{3} \beta_i \overline{\theta' \theta'_v}$$

$$\Pi_{iq} = C_{pq} \frac{\sqrt{e}}{L} (\overline{u'_i q'}) + \frac{1}{3} \beta_i \overline{q' \theta'_v}$$

$$C_{p\theta} = C_{pq}$$

	RS81 CBR00	SS89	KS92*/CD93* WLW96*	KC94	D'A98	N01	CCH02
C_ϵ	0.7	0.845	0.845	0.17	0.17	0.12	$\left(\frac{2}{3K_o}\right)^{\frac{3}{2}} \pi ?$ (0.845)
C_{pv}	4	3.5	5.26/3.5/3.5	0.51	0.68	0.4	$\frac{5}{2} C_\epsilon$ (2.11)
α_0	0.6	0.55	0.55	0.24	0.44	0.41	0.6
α_1	-	-	-	-	-	-	0.984
α_2	-	-	-	-	-	-	0.57
α_3	0	0.45	0	0	1	0.35	0.5
C_{ϵ_θ}	1.2	1.01	1.01	0.2	0.09	0.09	$\frac{1}{\alpha_0} C_\epsilon$ (1.01)
$C_{p\theta}$	4	3.25	4.9/2.6/3.25	0.64	0.91	0.71	$\frac{5}{2} (1 + \frac{1}{\alpha_0}) C_\epsilon$ (4.65)
α_4	-	-	-	0.93	-	0.266	0.285
$\tilde{\alpha}_4$	-	-	-	1	-	1	$\frac{5}{3}$
α_5	$\frac{1}{3}$	0	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	0.3	$\frac{1}{3}$
R_{i_c}	0.139	0.2	0.2/0.27/0.2	0.21	0.76	0.28	0.96
σ_0	0.4	0.42	0.42/0.33/0.42	0.8	1	1.35	0.82



- Schéma “CBR” (ARPEGE / AROME)

des systèmes complexes à résoudre ...

$$\overline{w'\theta'_s} = -\frac{L}{C_{p\theta}\sqrt{e}} \left[\overline{w'^2} \frac{\partial \Theta_s}{\partial z} - \frac{2}{3} \beta E_{s,\theta} \overline{\theta'^2} - \frac{2}{3} \beta E_{s,q} \overline{\theta'_s q'_t} \right]$$

$$\overline{w'q'_t} = -\frac{L}{C_{pq}\sqrt{e}} \left[\overline{w'^2} \frac{\partial Q_t}{\partial z} - \frac{2}{3} \beta E_{s,\theta} \overline{\theta'_s q'_t} - \frac{2}{3} \beta E_{s,q} \overline{q_t'^2} \right]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = -2 \frac{\partial \Theta_s}{\partial z} \overline{w'\theta'_s} - 2 C_{\epsilon\theta} \frac{\sqrt{e}}{L_\epsilon} \overline{\theta'^2} \\ 0 = -2 \frac{\partial Q_t}{\partial z} \overline{w'q'_t} - 2 C_{\epsilon q} \frac{\sqrt{e}}{L_\epsilon} \overline{q_t'^2} \\ 0 = -\frac{\partial Q_t}{\partial z} \overline{w'\theta'_s} - \frac{\partial \Theta_s}{\partial z} \overline{w'q'_t} - 2 C_{\epsilon\theta q} \frac{\sqrt{e}}{L_\epsilon} \overline{\theta'_s q'_t} \end{array} \right.$$

• Schéma “CBR” (ARPEGE / AROME)

si : $C_{\epsilon_\theta} = C_{\epsilon_q} = C_{\epsilon_{\theta q}}$
 $C_{p\theta} = C_{pq}$

alors c'est
 “simple” :

et : $\theta_s \approx \theta_l \exp(\Lambda_r q_t)$

$$\begin{cases} \overline{\mathbf{w}'\theta'_s} = -C_h L \sqrt{e} \phi_{s3} \frac{\partial \Theta_s}{\partial z} \\ \overline{\mathbf{w}'\mathbf{q}'_t} = -C_h L \sqrt{e} \psi_{s3} \frac{\partial Q_t}{\partial z} \end{cases}$$

puisque :

$$\frac{1}{\phi_{s3}} = \frac{1}{\psi_{s3}} = 1 + C (R_{s,\theta} + R_{s,q})$$

$$C_h = \frac{\overline{\mathbf{w}'^2}}{C_{p\theta} e} \approx \frac{2}{3 C_{p\theta}}$$

Ce qui donne :

$$K_s = K_w \dots$$

$$R_{s,\theta} = \Gamma E_{s,\theta} \frac{\partial \Theta_s}{\partial z}$$

$$R_{s,q} = \Gamma E_{s,q} \frac{\partial Q_t}{\partial z} \quad \Gamma = \frac{L L_\epsilon \beta}{e}$$

$$\overline{\mathbf{w}'\theta'_v} = E_{s,\theta} \overline{\mathbf{w}'\theta'_s} + E_{s,q} \overline{\mathbf{w}'\mathbf{q}'_t}$$



... skip ...

- Schéma “CBR” (ARPEGE / AROME)

sauf en cas de nuages
où les PDF impliquent

$$K_s \neq K_h \neq K_w \dots$$

$$\overline{w' \theta'_v} = E_{s,\theta} \overline{w' \theta'_s} + E_{s,q} \overline{w' q'_t}$$

$$\overline{w' \theta'_v} = E_\theta \overline{w' \theta'_l} + E_q \overline{w' q'_t}$$

$$E_\theta (\partial \Theta_l / \partial z) + E_q (\partial Q_t / \partial z)$$

\neq

$$E_{s,\theta} (\partial \Theta_s / \partial z) + E_{s,q} (\partial Q_t / \partial z)$$

• Schéma “CBR” (ARPEGE / AROME)

mais si :

$$C_{pq} = (1 + a) C_{p\theta}$$

$$a = (C_{pq} - C_{p\theta}) / C_{p\theta}$$

$$C_{\epsilon_{\theta}q} = \frac{C_{\epsilon_{\theta}}}{1 + a}$$

$$C_{\epsilon_q} = \frac{C_{\epsilon_{\theta}}}{(1 + a)^2}$$

$$\theta_s \approx \theta_l \exp(\Lambda_r q_t)$$

alors :

$$\begin{cases} \overline{\mathbf{w}'\theta'_s} = - C_h L \sqrt{e} \phi_{s3a} \frac{\partial \Theta_s}{\partial z} = - K_s \frac{\partial \Theta_s}{\partial z} , \\ \overline{\mathbf{w}'q'_t} = - \frac{C_h}{(1 + a)} L \sqrt{e} \psi_{s3a} \frac{\partial Q_t}{\partial z} = - K_w \frac{\partial Q_t}{\partial z} , \end{cases}$$

avec :

$$\frac{1}{\phi_{s3a}} = \left(1 + C [R_{s,\theta} + (1 + a) R_{s,q}] \right) \left\{ \frac{1 + (C/2) [R_{s,\theta} + (1 + a) R_{s,q}]}{1 + (C/2) [R_{s,\theta} + (1 + 2a) R_{s,q}]} \right\}$$

$$\frac{1}{\psi_{s3a}} = \left(1 + C [R_{s,\theta} + (1 + a) R_{s,q}] \right) \left\{ \frac{1 + (C/2) [R_{s,\theta} + (1 + a) R_{s,q}]}{1 + (C/2) [(1 - a) R_{s,\theta} + (1 + a) R_{s,q}]} \right\}$$

→ on trouve des formules analytiques ... et $K_s \neq K_w$
 → et un nombre de “Lewis” : $Le = K_h / K_w \neq 1$?



Plan de l'exposé

1) Comment calculer l'entropie « s » ? (3^{ème} principe)

- Les formulations *absolues* : de $s(\theta_s)$ et de θ_s
- Quelques profils verticaux de θ_s

2) Approximations de θ_s : 1^{er} et 2^{ème} ordres

- Applications à la problématique du « C.T.E.I. »
- Applications à la turbulence de l'air humide ? (si $K_h = K_w$)
- Autre applications si $K_h \neq K_w$? ←..... biblio ?

3) Comment calculer l'enthalpie « h » ?

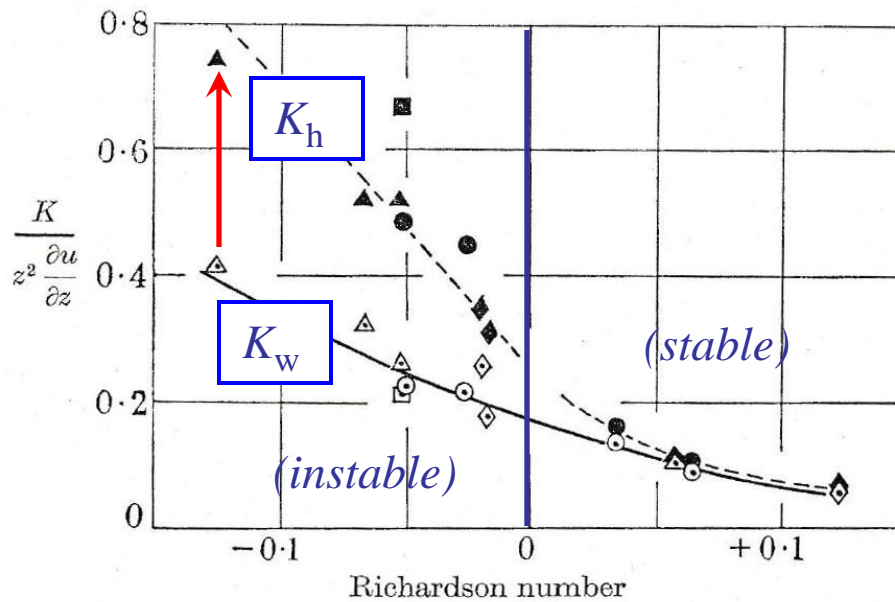
- La formulation « *absolue* » de $h \neq \text{MSE}$
- Redéfinition des flux d'énergie : « LH » $\neq L_v F_v$?

4) Conclusions - Perspectives



... skip ...

- Pasquill (Proc; R. S. London, 1949) : $K_h \neq K_w$?



On obtient :

$$K_h \approx 1 \text{ à } 2 K_w !$$

→ $Le > 1 \text{ à } 2$

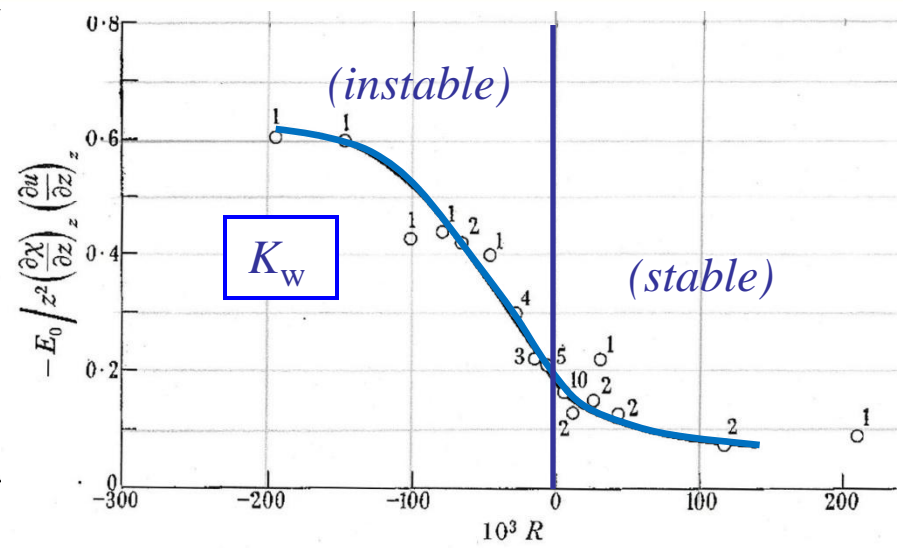
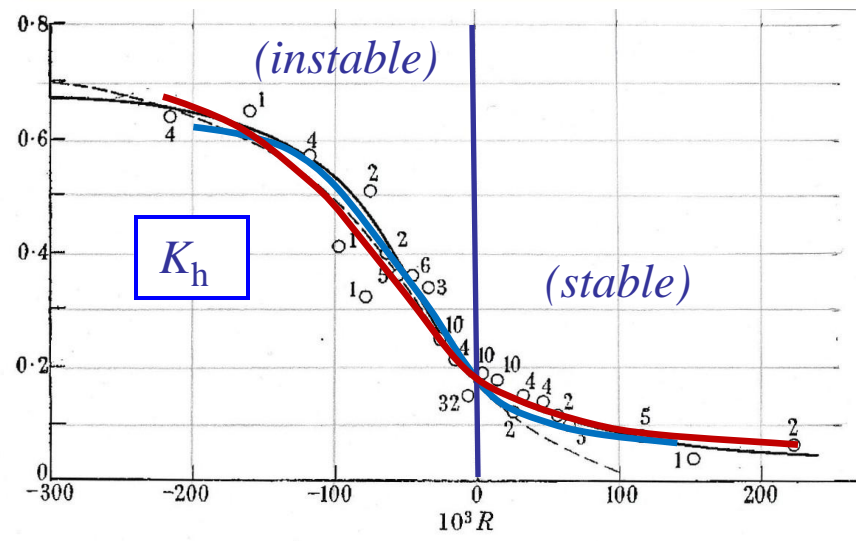
FIGURE 5. Observed values of eddy diffusivities for heat (K_H) and water vapour (K_V) in relation to wind velocity gradient ($\partial u / \partial z$) and Richardson number (Ri) at 75 cm. over a short grass surface.

group	$K = K_V$	$K = K_H$
A	⊙	●
C	△	▲
C'	□	■
D	◇	◆

($z = 75 \text{ cm.}$)

... skip ...

- Rider (Phil. Trans. R. Proc. London, 1954) : $K_h / K_w \approx 1$?



On obtient : $K_h \approx K_w \rightarrow Le \approx 1$
mais à $\pm 10\%$ près ?

... skip ...

- Pruitt & Aston (Davis Report, 1963) : $K_h \neq K_w$?

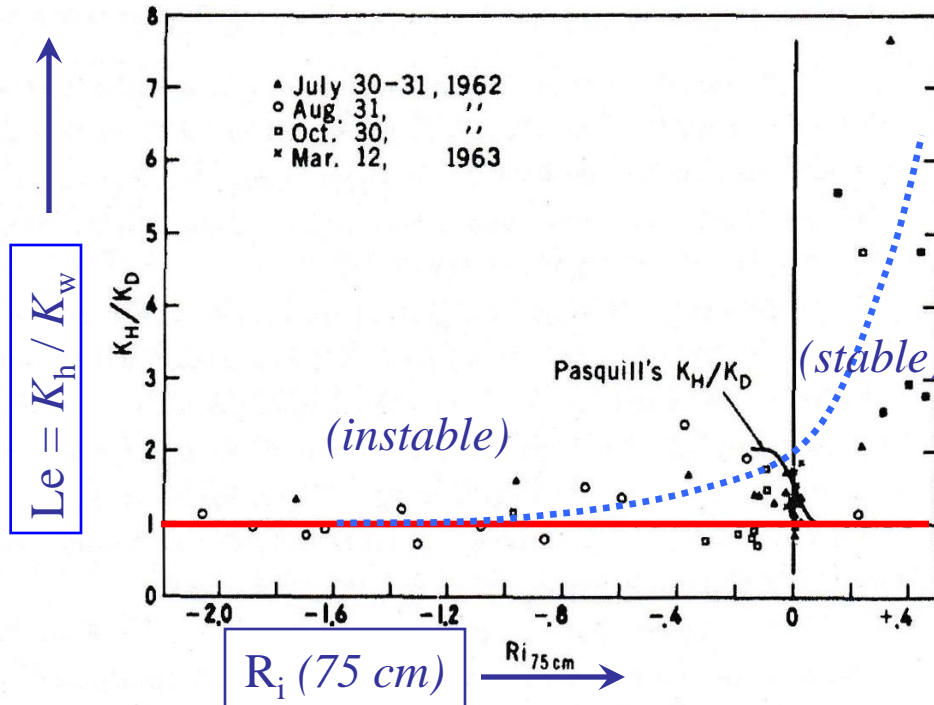


Figure III-11. The variation of the ratio K_H/K_D with Ri_{75} . Pasquill's (1949) relationship was replotted for comparison with 1962-63 Davis data. Solid circles or triangles are for cases of dew.

On obtient :

$$K_h > K_w ?$$

→ $Le > 1$ à 4 ?

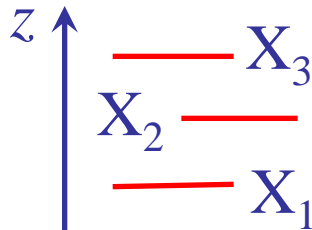
→ mais l'inverse de Pasquill (1949)...

... skip ...

- Swinbank & Dyer (QJRMS, 1967) : $S_h \approx S_w$?

$$S_X = (X_2 - X_1) / (X_3 - X_1)$$

“Shape function”



- $(S_h \text{ et } S_w) \neq S_m$
- comparaisons entre S_h et S_w contradictoires ?
- quels liens entre S_h et S_w et K_h / K_w ?

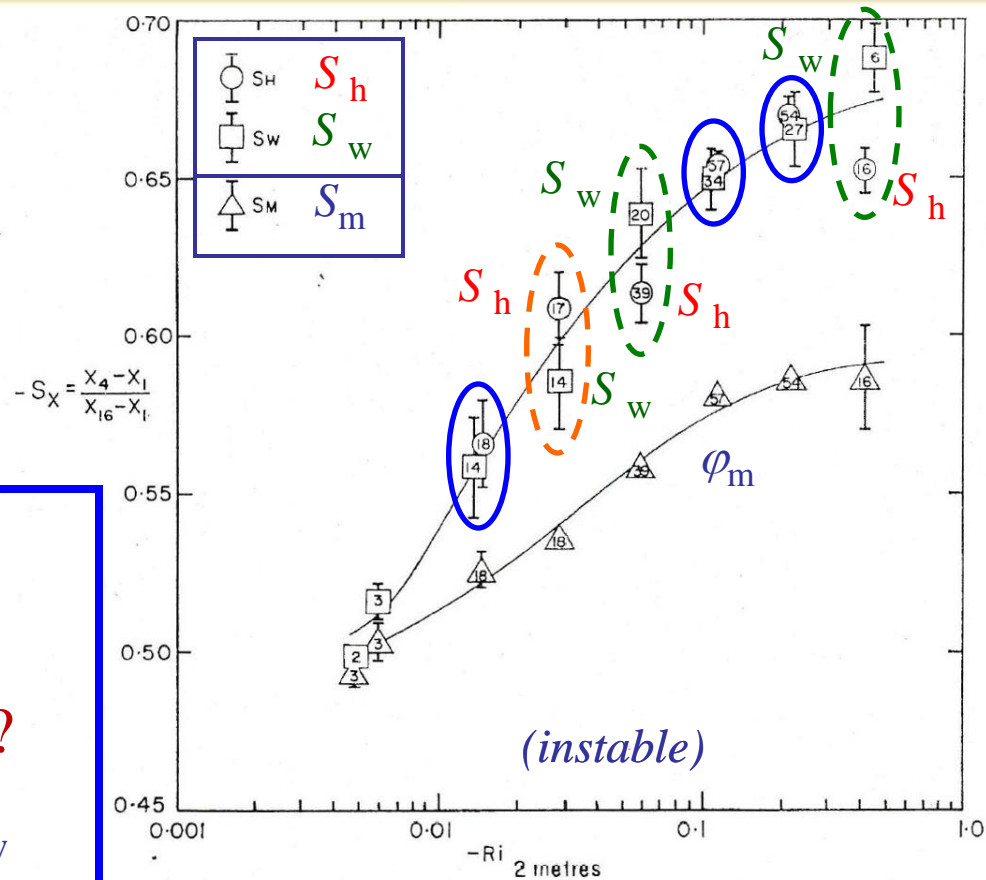


Figure 1. Shape functions for heat, water vapour and momentum in the layer 1-16 m vs. Richardson Number at 2 m, giving the number of runs in each group and the standard error of the mean (except when too small)

- Dyer (QJRMS, 1967) : $\phi_h \approx \phi_w$?

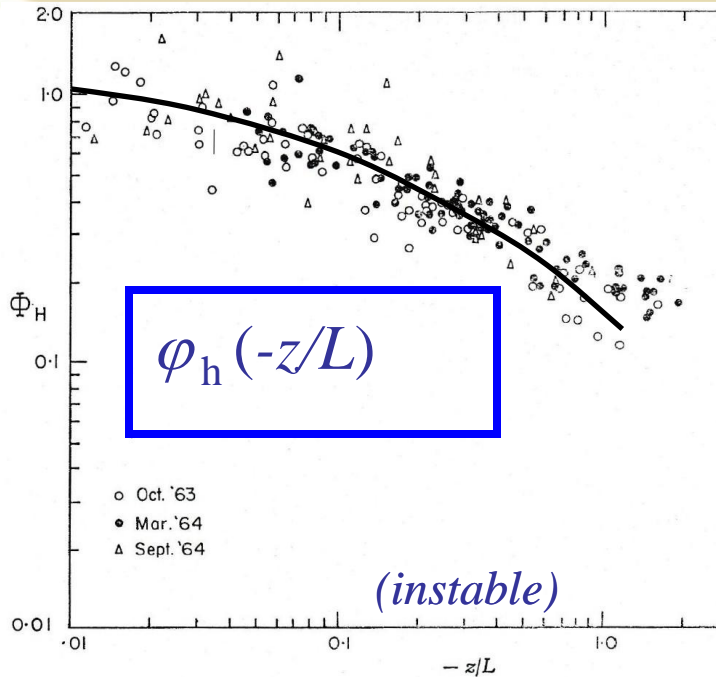


Figure 1. Values of ϕ_H plotted against z/L .

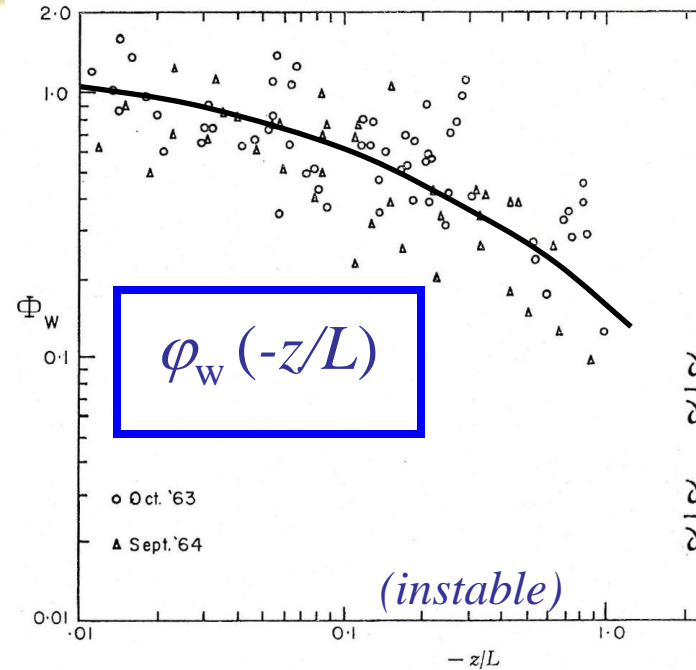


Figure 2. Values of ϕ_W plotted against z/L .

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = - \frac{H}{\rho c_p k u_* z} \phi_H$$

$$\frac{\partial q}{\partial z} = - \frac{E}{\rho L_w k u_* z} \phi_W$$

Même courbes d'ajustement ? (en noir) →
on aurait : $\phi_h \approx \phi_w$? → $K_h \approx K_w$? → $Le \approx 1$?

- Dyer (QJRMS, 1967) : $\phi_h \approx \phi_w$?

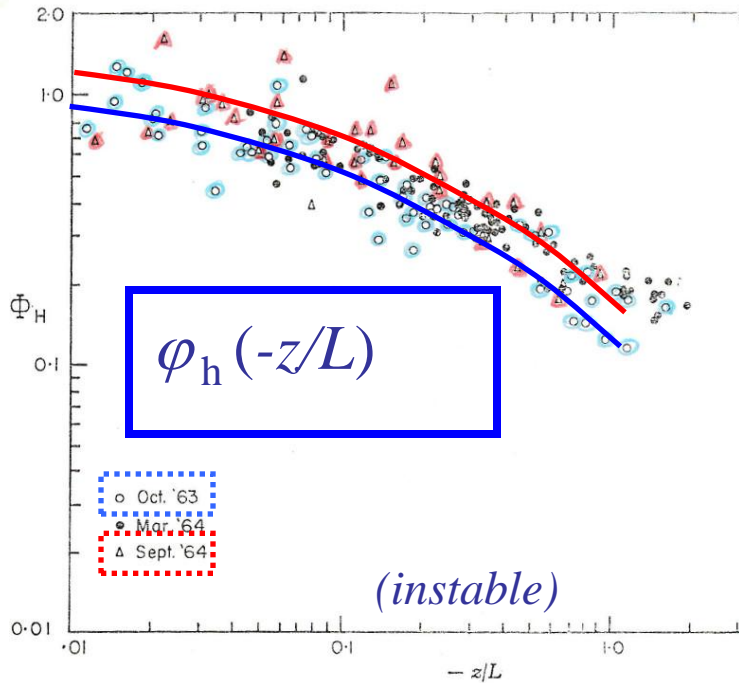


Figure 1. Values of ϕ_H plotted against z/L .

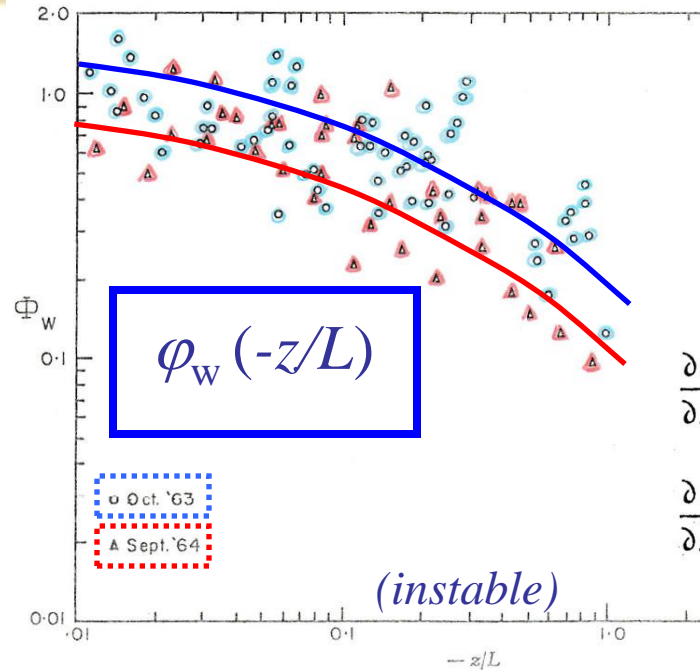


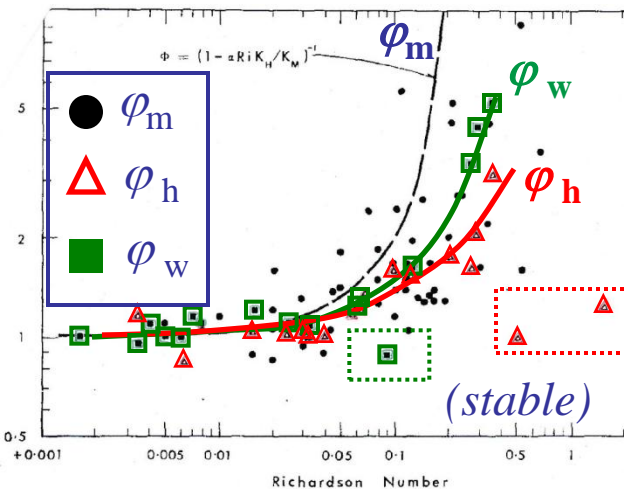
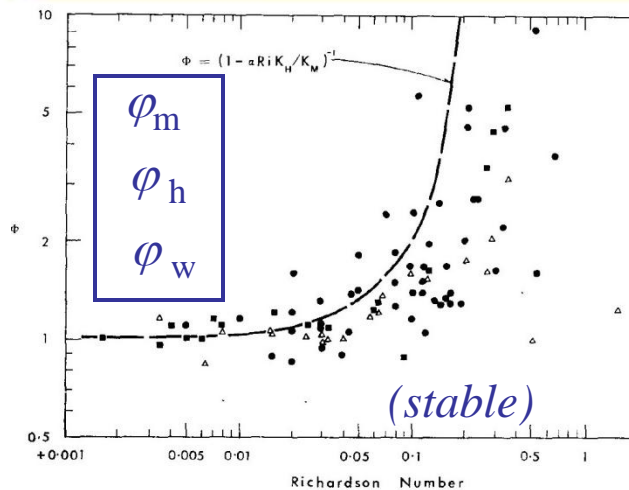
Figure 2. Values of ϕ_W plotted against z/L .

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = - \frac{H}{\rho c_p k u_* z} \phi_H$$

$$\frac{\partial q}{\partial z} = - \frac{E}{\rho L_w k u_* z} \phi_W$$

contradictoire : $\phi_h \neq \phi_w$? $\rightarrow K_h \neq K_w$? $\rightarrow Le \neq 1$??

- Oke (JAM, 1970) : une preuve que : $\varphi_h \approx \varphi_w$? $K_h \approx K_w$?

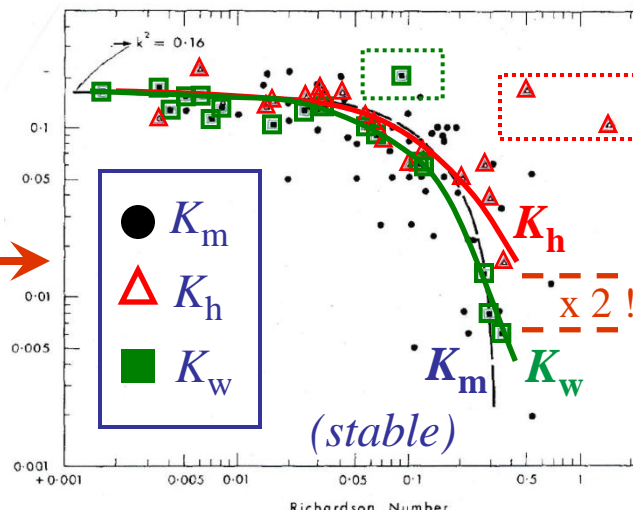
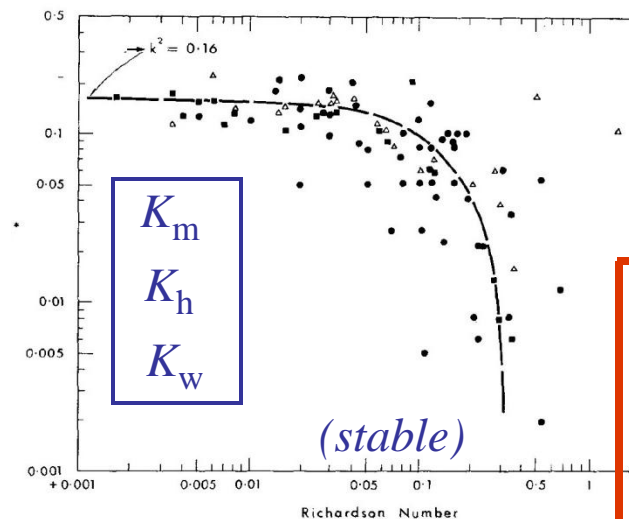


On aurait :

$$\varphi_h \approx \varphi_w \approx \varphi_m ?$$

$$K_h \approx K_w \approx K_m ?$$

$$\rightarrow Pr \approx Le \approx 1 ?$$



En fait:

$$\varphi_h < \varphi_w ?$$

$$K_h > K_w ?$$

$$\rightarrow Le > 1 \text{ à } 2.5 ?$$

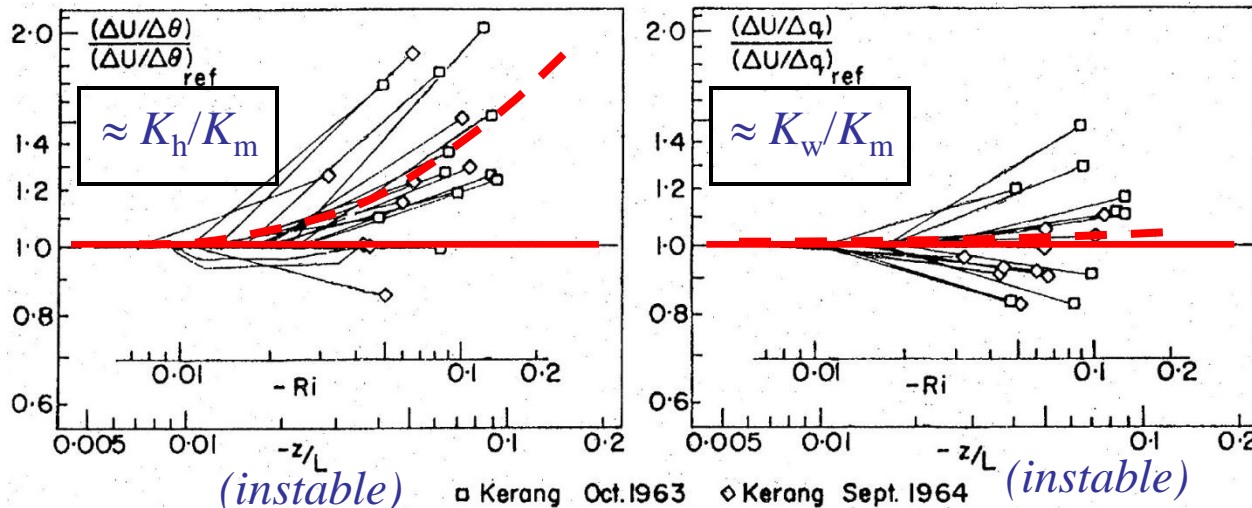
Attention : échelle Log !



METEO FRANCE

... skip ...

- Webb (QJRMS, 1970) : $K_h / K_w \approx 1$?



$$Le = K_h/K_w$$

$$Le = (K_h/K_m) / (K_w/K_m)$$

Figure 10. Australian data, (a) unstable conditions (measurements available for heights, 1, 4, and 16 m only), and (b) stable conditions. $(\Delta U/\Delta\theta)/(\Delta U/\Delta\theta)_{ref}$ as an indicator of K_H/K_M , and, in (a) only, $(\Delta U/\Delta q)/(\Delta U/\Delta q)_{ref}$ as an indicator of K_W/K_M , plotted against z/L and Ri at the geometric mean height (estimated from Ri_2). Δ denotes difference between adjacent observation heights. For each run, the reference value is that from the lowest pair of heights available; lines interconnect points from the same run.

Webb mentionne : S_h croissante et $S_w \approx$ constante ;

→ $K_h > K_w$ et $Le > 1$...

→ mais pour lui des erreurs ... et $K_h \approx K_w$ → $Le \approx 1$!

... skip ... Denmead and McIlroy (Agric. Meteor., 1970) : $K_h / K_w \approx 1$?

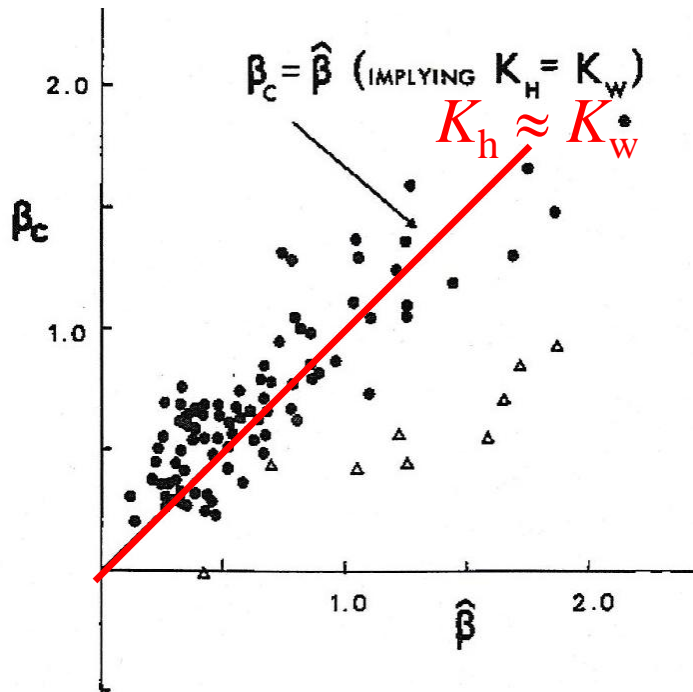


Fig.2. Comparison of β_c and $\hat{\beta}$.

$$R = H + LE + G$$

and the atmospheric diffusion equations:

$$H = - \rho c_p K_H (dT/dz + \Gamma)$$

and:

$$LE = - \rho L K_w dq/dz$$

$$\beta = (c_p/L\Delta q) (\Delta T + \Gamma \Delta z) \int_{z_1}^{z_2} K_w^{-1} dz / \int_{z_1}^{z_2} K_H^{-1} dz$$

β_c $\approx Le = K_h / K_w$

En fait : moyennes des “ $1 / K$ ”

→ trops de poids aux valeurs près du sol (faibles K)

→ $K_h \neq K_w$? → $Le \neq 1$??

Et quid du R_i ? (stable / instable)

... skip ...

- Campbell (Agric. Meteor., 1973) : $K_h / K_w \approx 1$?

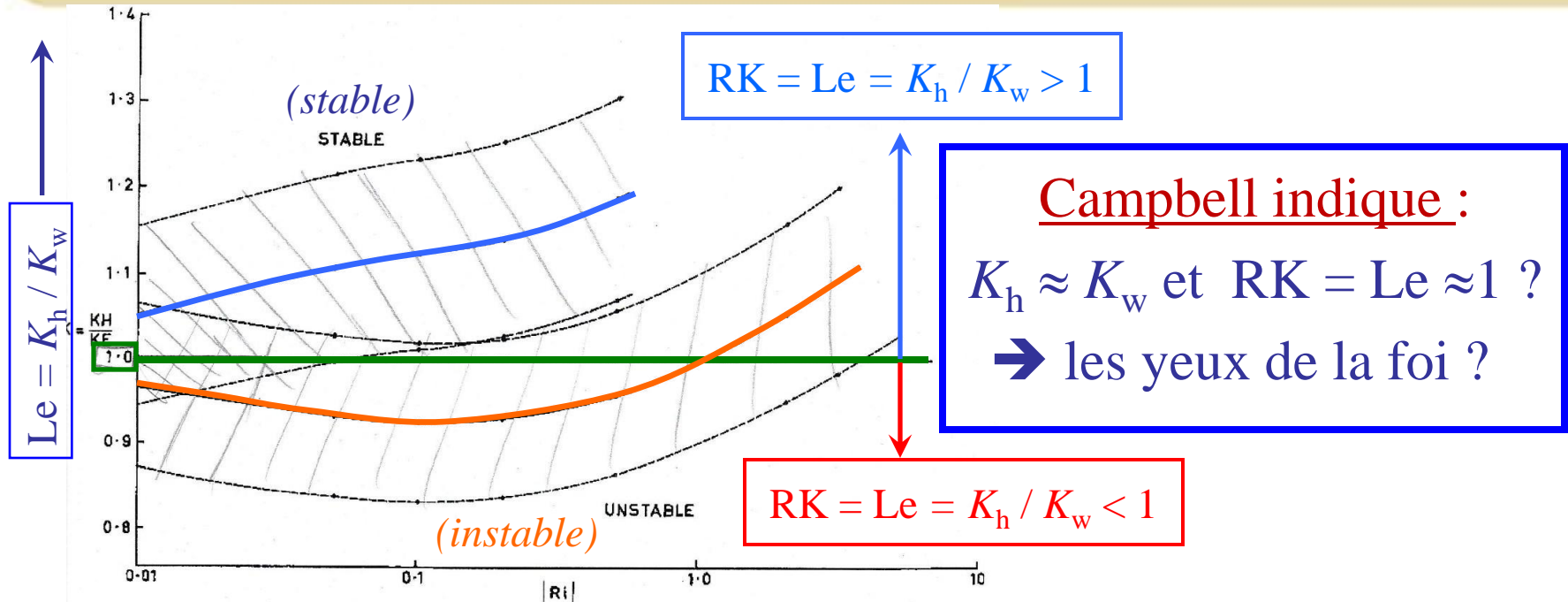
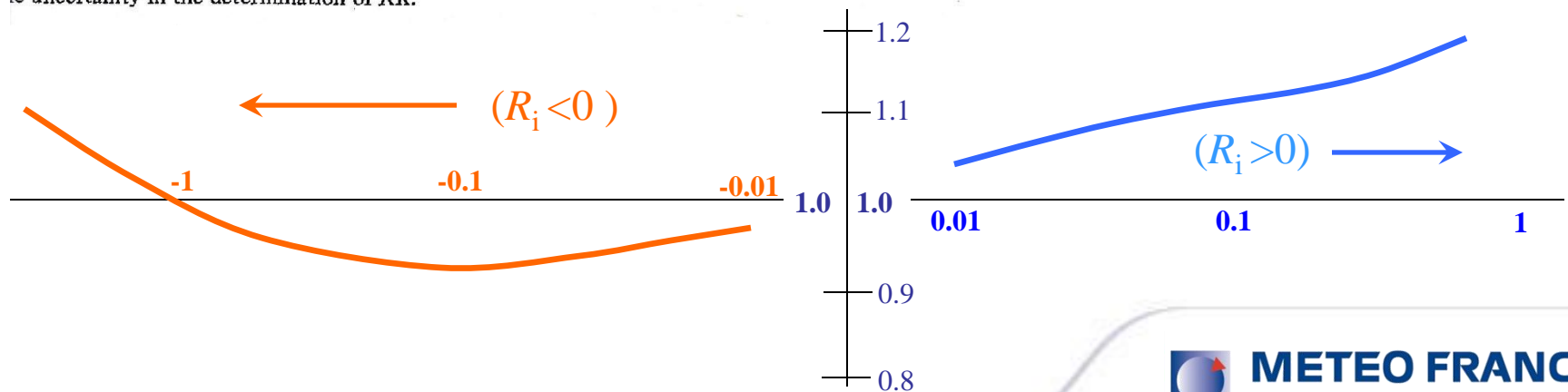
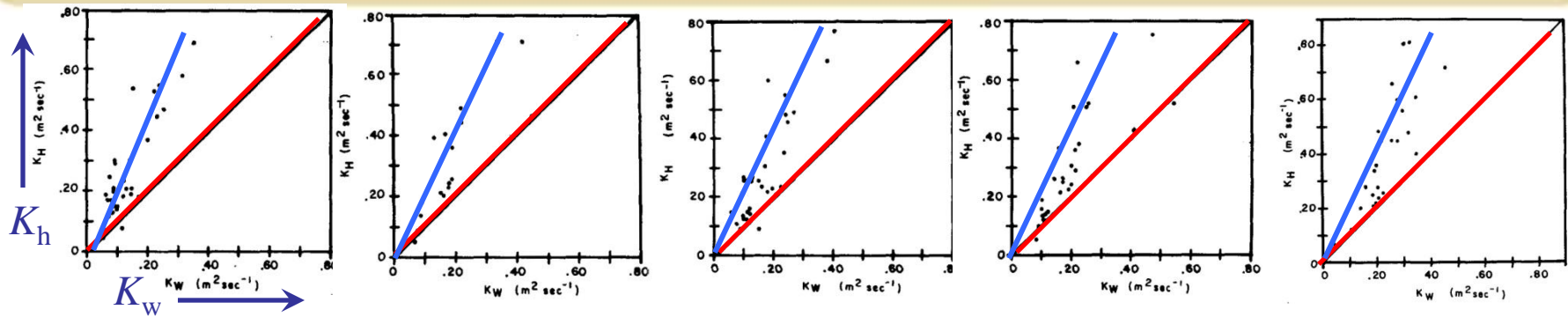


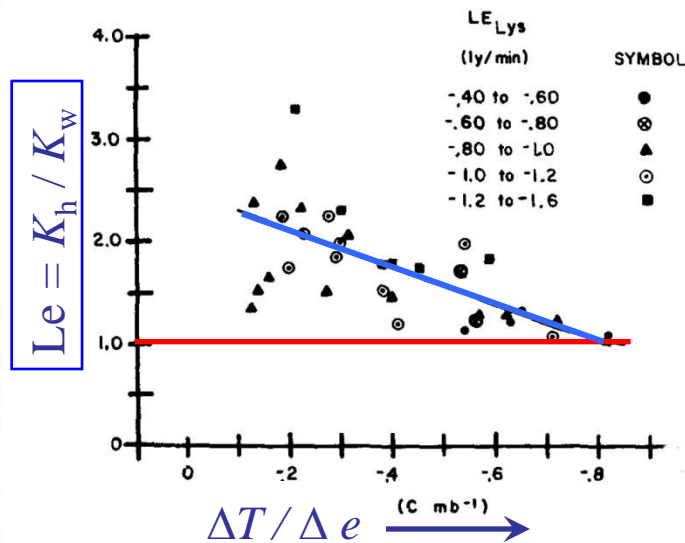
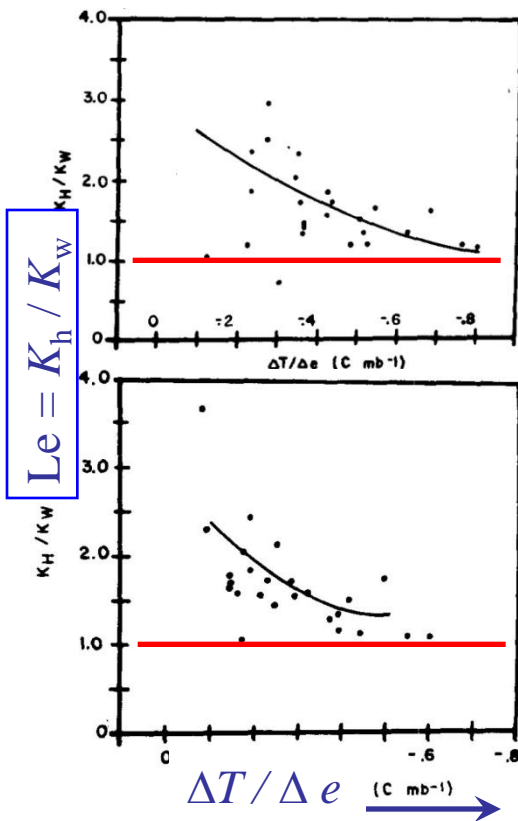
fig.1. The ratio $RK = K_H/K_E$ as a function of the stability parameter Ri . The dotted lines indicate the uncertainty in the determination of RK .



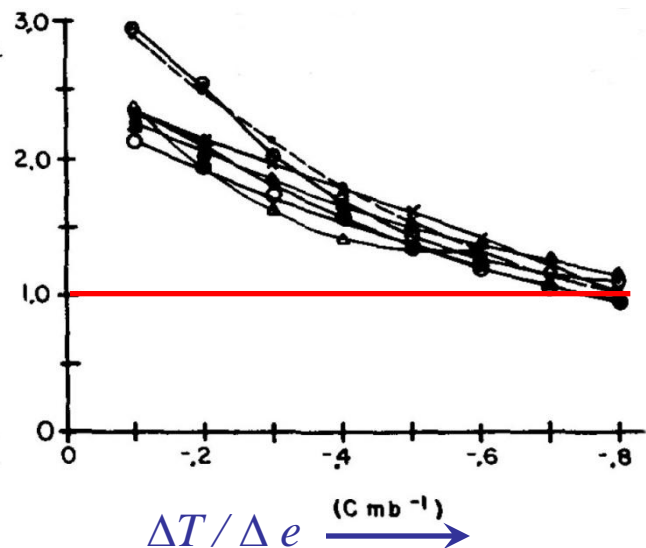
- Verma *et al.* (JAM, 1978) : $K_h \neq K_w$?



Ici : $Le = K_h / K_w > 1$? [entre 1 et 2.5]



(stable $R_i > 0$)



METEO FRANCE

• LES (ATEX / BOMEX) + ECUME

$K_h < K_w$ pour ces **LES** ?

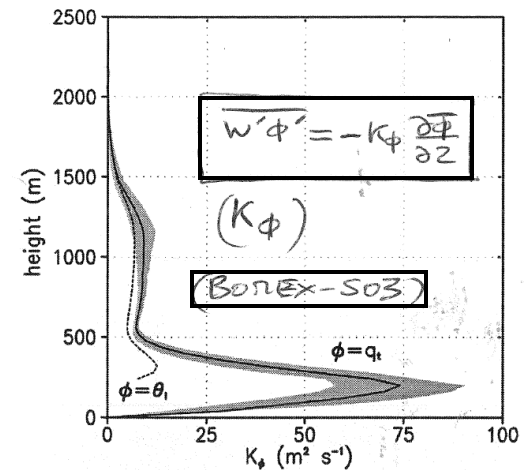
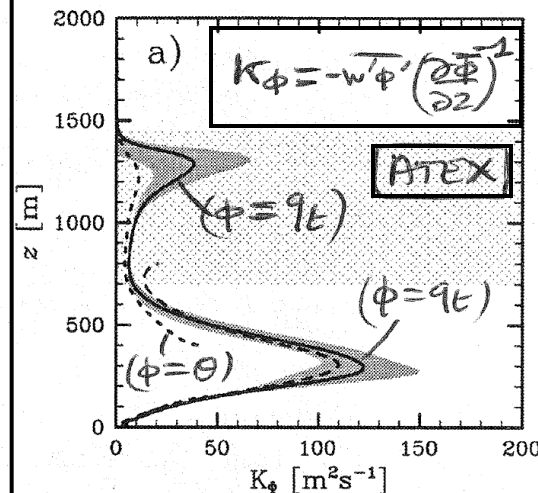
$$\overline{w'q'} = -K_q \frac{\partial Q}{\partial z}$$

$$\overline{w'\theta'} = -K_\theta \frac{\partial \Theta}{\partial z}$$

$C_H > C_E$ dans **ECUME** ?

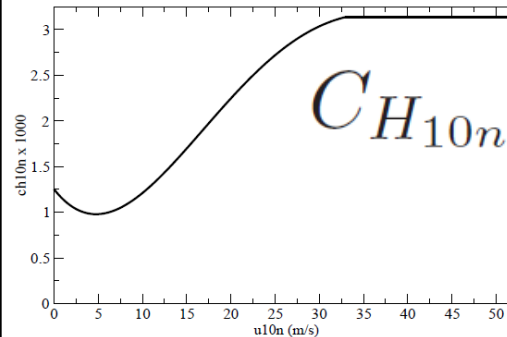
$$C_H = \frac{u_* \theta_*}{U(\theta_a - \theta_s)}$$

$$C_E = \frac{u_* q_*}{U(q_a - q_s)}$$

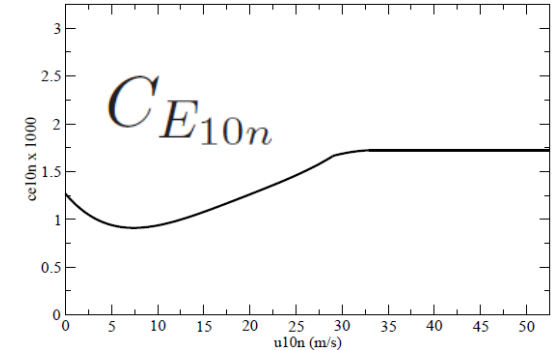


ATEX (Stevens et al, 2001) BOMEX (Siebesma et al, 2003)

SURFEX v7.2 - Issue n°2 - 2012



neutral heat coefficient



neutral evaporation coefficient



METEO FRANCE

- **CONCLUSION :** $K_h \neq K_w$ ou $K_h = K_w$?

- cela semble pour le moins contrasté ...
- mais on ne peut guère exclure +/- 10 % de différence ?
- et si +/- 10 % entre K_h et K_w : l'usage de θ_s s'impose !
- campagnes de mesures ? (mâts instrumentés)
- ou modélisations par LES / DNSE / ...

Plan de l'exposé

1) Comment calculer l'entropie « s » ? (3^{ème} principe)

- Les formulations *absolues* : de $s(\theta_s)$ et de θ_s
- Quelques profils verticaux de θ_s

2) Approximations de θ_s : 1^{er} et 2^{ème} ordres

- Applications à la problématique du « C.T.E.I. »
- Applications à la turbulence de l'air humide ? (si $K_h = K_w$)
- Autre applications si $K_h \neq K_w$?

3) Comment calculer l'enthalpie « h »?

- La formulation « *absolue* » de $h \neq \text{MSE}$ ←.....
- Redéfinition des flux d'énergie : « LH » $\neq L_v F_v$?

4) Conclusions - Perspectives



Calculs de l'enthalpie de l'air humide "*h*"

Enthalpie spécifique = une somme pondérée :

$$h = q_d h_d + q_v h_v + q_l h_l + q_i h_i$$

$$q_d \rightarrow h_d = (h_d)_r + c_{pd} (T - T_r)$$

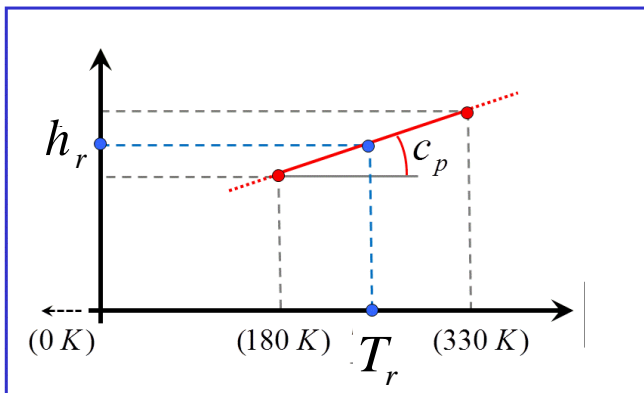
$$q_v \rightarrow h_v = (h_v)_r + c_{pv} (T - T_r)$$

$$q_l \rightarrow h_l = (h_l)_r + c_l (T - T_r)$$

$$q_i \rightarrow h_i = (h_i)_r + c_i (T - T_r)$$

Montgomery (1948) et **Businger** (1982) :
difficultés pour calculer "*h*", du fait des
valeurs de références $(h_d)_r / (h_v)_r / \dots$
à multiplier par $q_d / q_v / \dots$ variables !

Une solution possible = « 3ème principe » : **$h=0$ pour $T=0$ K**
(Marquet : AMA- janvier 2013 / QJRMS 2015)



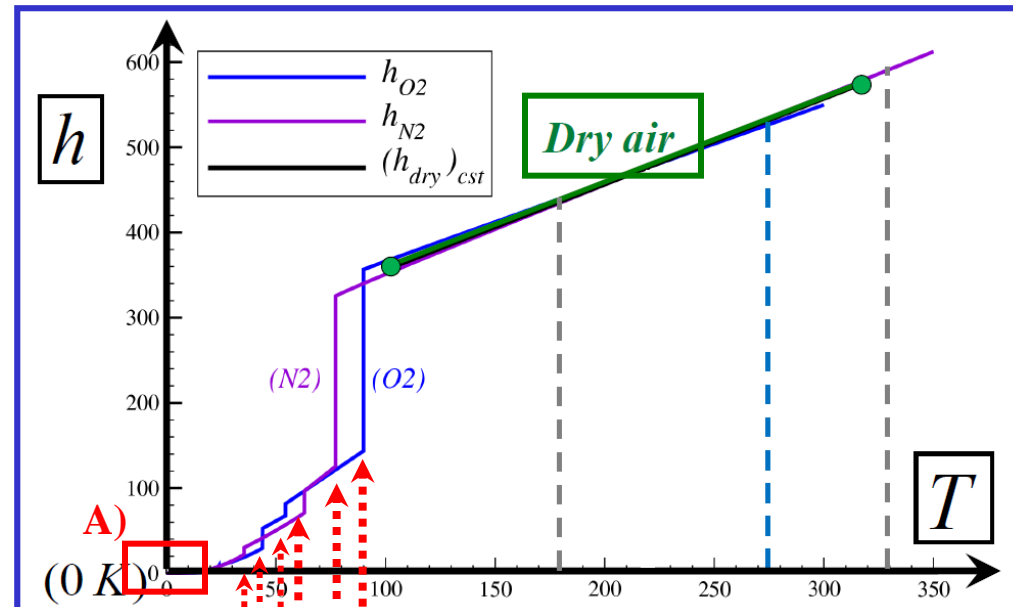
- Enthalpies standard: air-sec = $O_2 + N_2$

Enthalpie at $T=0$ K \rightarrow une sorte de 3ème principe, uniquement pour la partie “thermique” des enthalpies (degrés de translation, rotation, vibration)

$$h^0(T_0) = \overset{\text{A)}}{h(T=0)} + \overset{\text{B)}}{\int_0^{T_0} c_p(T) dT} + \overset{\text{C)}}{\sum_k L_k}$$

*Air sec (à 99 %) : 78 % Azote (N_2)
+ 21 % Oxygène (O_2)*

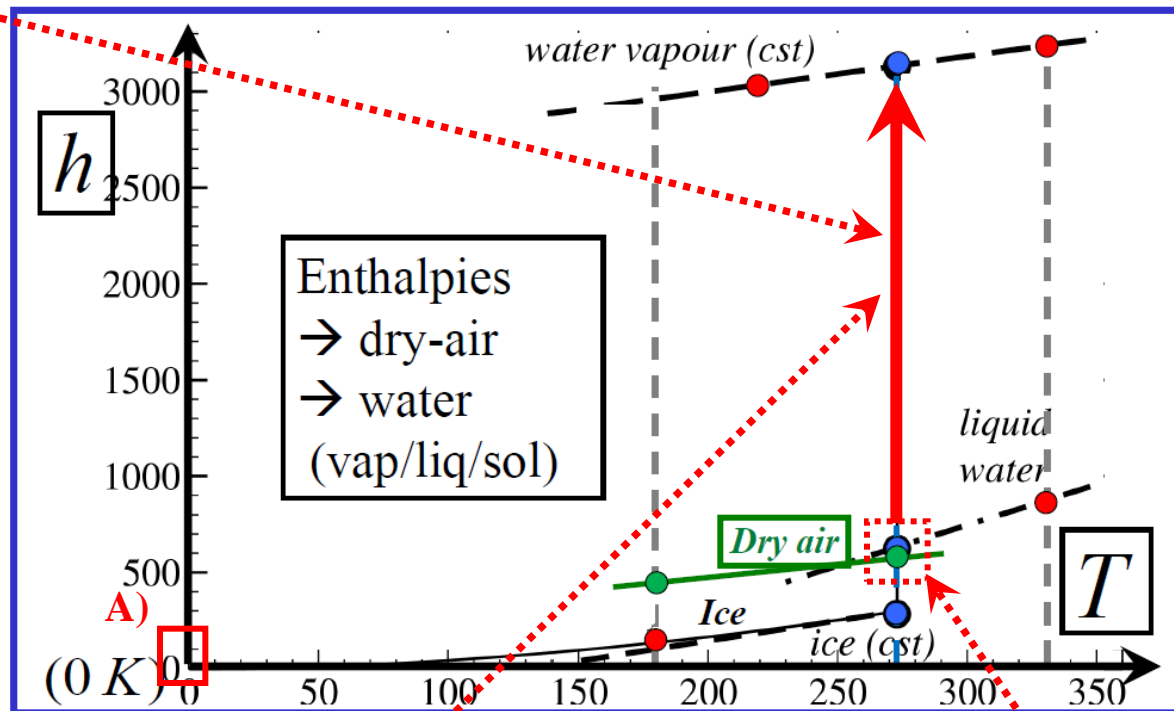
- A)** Valeurs à $T = 0$ K ? $\leftarrow \approx$ Nernst
B) Excitations degrés de trans., rot. et vibr.
 $\leftarrow c_p(T)$ variables
C) Σ chaleurs latentes \leftarrow cryogénique



\rightarrow *Changements de phases*

Enthalpies standards des composants de l'air humide

2) Diagramme dominé par L_{vap} (ici à 0 C) !



$$h^0(T_0) = \boxed{h(T=0)} + \boxed{\int_0^{T_0} c_p(T) dT}$$

$$+ \boxed{\sum_k L_k}$$

$$(h_v)_r - (h_d)_r$$

1) une coïncidence à T_0 (i.e. à 0 C) : $h_d \approx h_l$!



Calculs de l'enthalpie de l'air humide " h "

Au final on trouve :

$$h = h_{ref} + c_{pd} T + L_h q_t - L_{vap} q_l - L_{sub} q_i$$

$$h_{ref} = (h_d)_r - c_{pd} T_r$$

(une vraie constante)

$$L_h(T) = h_v(T) - h_d(T)$$

Une nouvelle « **chaleur latente** »
en fait la « différence d'enthalpie
entre l'air sec et la vapeur d'eau »

$$L_{vap}(T) = h_v(T) - h_l(T)$$

Chaleur latente de vaporisation

(différence entre les enthalpies)

$$L_{sub}(T) = h_v(T) - h_i(T)$$

Chaleur latente de sublimation

(différence entre les enthalpies)

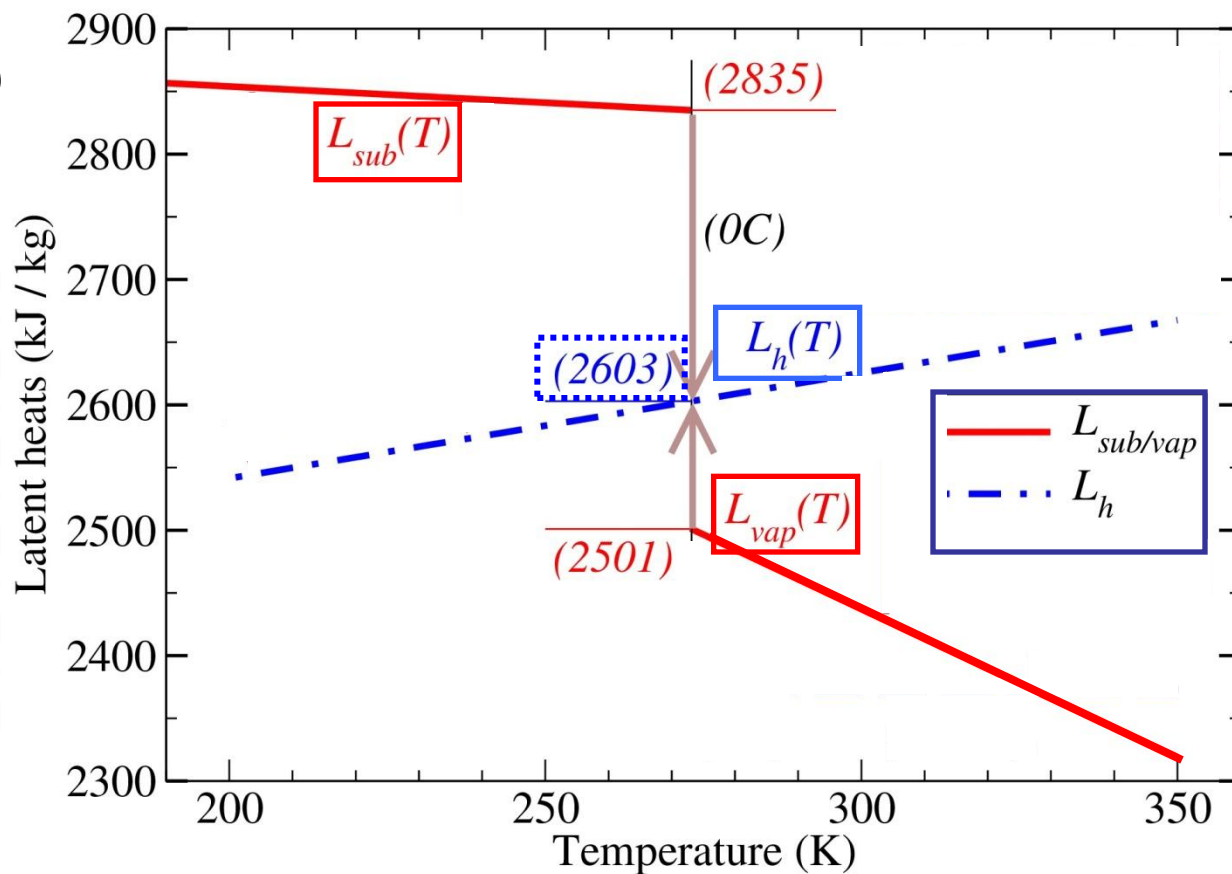
→ L_h : impacts dans l'atmosphère du remplacement de l'air sec
par de la vapeur d'eau ? (si évaporation ou sublimation au sol)

Diagramme des chaleurs latentes L_{vap} , L_{sub} et L_h

$$L_h(T) = h_v(T) - h_d(T)$$

$$L_h(T_0) \approx 2603 \text{ kJ/kg}$$

$L_h(T)$ proche et
intermédiaire entre
 $L_{\text{vap}}(T)$ et $L_{\text{sub}}(T)$!
+
courbe continue à 0 C !



Plan de l'exposé


1) Comment calculer l'entropie « s » ? (3^{ème} principe)

- Les formulations *absolues* : de $s(\theta_s)$ et de θ_s
- Quelques profils verticaux de θ_s

2) Approximations de θ_s : 1^{er} et 2^{ème} ordres

- Applications à la problématique du « C.T.E.I. »
- Applications à la turbulence de l'air humide ? (si $K_h = K_w$)
- Autre applications si $K_h \neq K_w$?

3) Comment calculer l'enthalpie « h »?

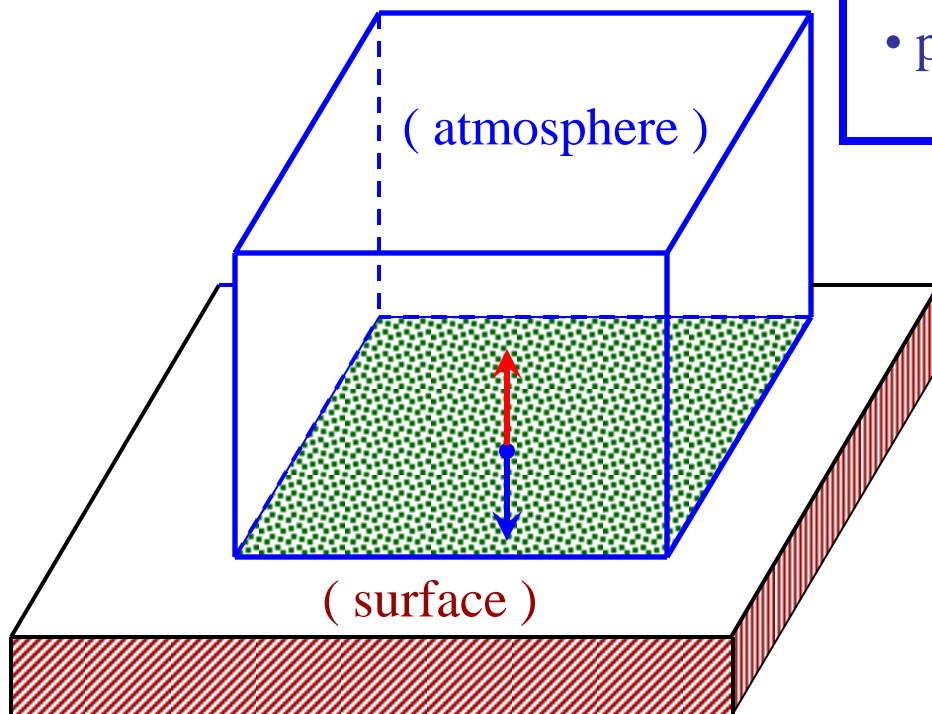
- La formulation « *absolue* » de $h \neq \text{MSE}$
- Redéfinition des flux d'énergie : « LH » $\neq L_v F_v$? 

4) Conclusions - Perspectives



Bilan d'énergie juste au dessus de la surface ?

- Flux turbulents d'énergie = **échanges surface \leftrightarrow atmosphère**
- Energie **reçue** par la surface = celle **perdue** par l'atmosphère ?



- cinétique $e_{cin} = (u^2 + v^2 + w^2) / 2$
- interne $e_{int}(T, q_v, q_l, q_i)$
- potentielle $e_{pot} = \phi = g z$

Principes généraux :

- 3 formes d'énergies
- 3 équations de bilan

Bilan d'énergie juste au dessus de la surface ?

- Flux turbulents d'énergie = **échanges surface ↔ atmosphère**
- Energie **reçue** par la surface = celle **perdue** par l'atmosphère ?

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho (e_{\text{int}} + \phi + e_{\text{cin}})] + \text{div} [\rho (h + \phi + e_{\text{cin}}) \overrightarrow{U}] = \text{div} (-F_{\text{rad}}) + (\dots)$$

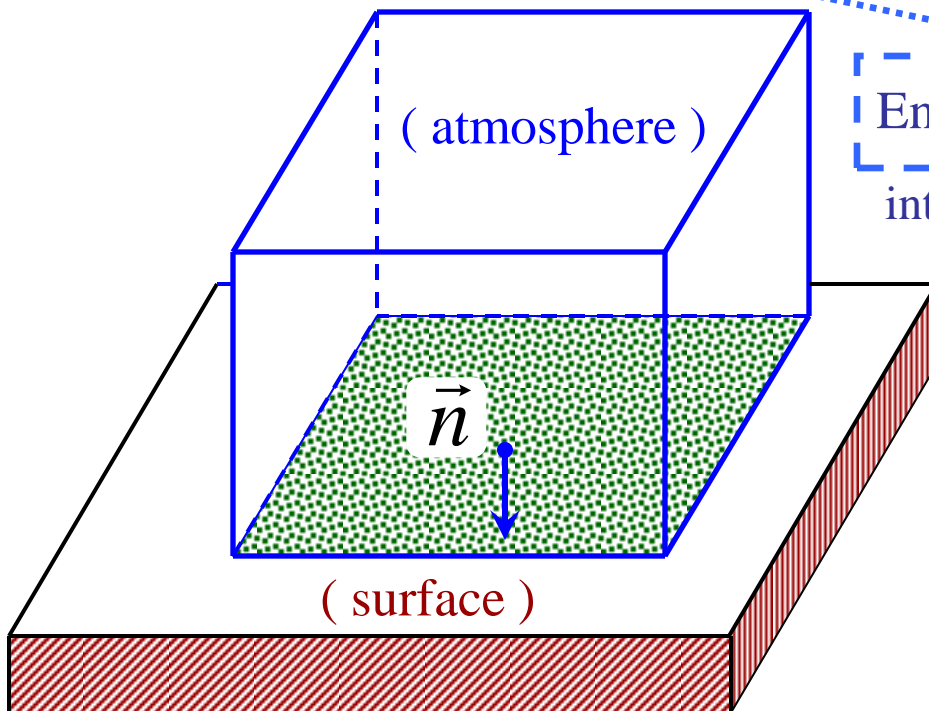
bilan local des 3 énergies

Enthalpie : $h = e_{\text{int}} + p / \rho$

intégration 3D globale + Green-Ostrogradski :

$$\frac{\partial E_{\text{tot}}}{\partial t} = + \overline{\rho w (h + \phi)} + \overline{F_{\text{rad}}} + \overline{\rho w e_{\text{cin}}}$$

$$E_{\text{tot}} = E_{\text{int}} + E_{\text{pot}} + E_{\text{cin}}$$

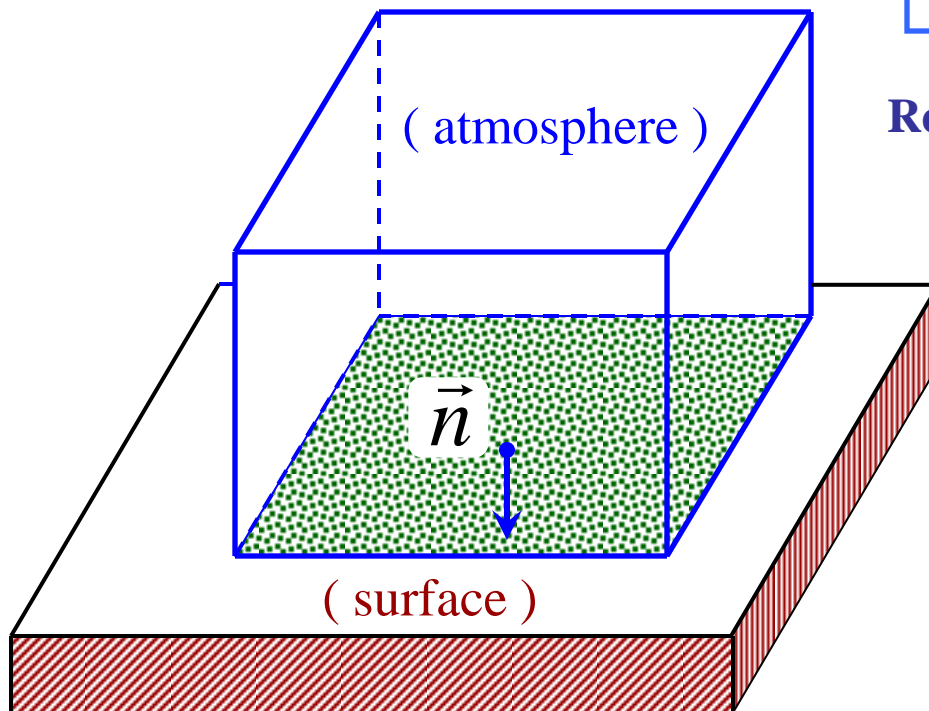


Bilan d'énergie juste au dessus de la surface ?

- Flux turbulents d'énergie = **échanges surface \leftrightarrow atmosphère**
- Energie **reçue** par la surface = celle **perdue** par l'atmosphère ?

$$E_{tot} = E_{int} + E_{pot} + E_{cin}$$

$$\text{Enthalpie : } h = e_{int} + p / \rho$$



$$\frac{\partial E_{tot}}{\partial t} = + \overline{\rho w (h + \phi)} + \overline{F_{rad}} + \overline{\rho w e_{cin}}$$

$$\text{Reynolds : } \overline{\rho w X} = \overline{\rho w} \overline{X} + \overline{(\rho w)' X'}$$

$$+ \overline{(\rho w)' h'} + \overline{(\rho w)' \phi'}$$

Conclusion : **pas de « SH+LH » !**
juste un **flux vertical de $(h + \phi)$!!**

Calculs du flux d'enthalpie de l'air humide

$$h = h_{ref} + c_{pd} T + L_h q_t - L_{vap} q_l - L_{sub} q_i$$

$$h = h_{ref} + c_{pd} T + L_h q_v + (\cancel{L_h - L_{vap}}) q_l - (\cancel{L_{sub} - L_h}) q_i$$

$$F_h = \overline{(\rho w)' h'}$$

$$F_h = c_p F_T + L_h F_v$$

$$F_T = \overline{(\rho w)' T'}$$

$$F_v = \overline{(\rho w)' q_v'}$$

Flux d'enthalpie

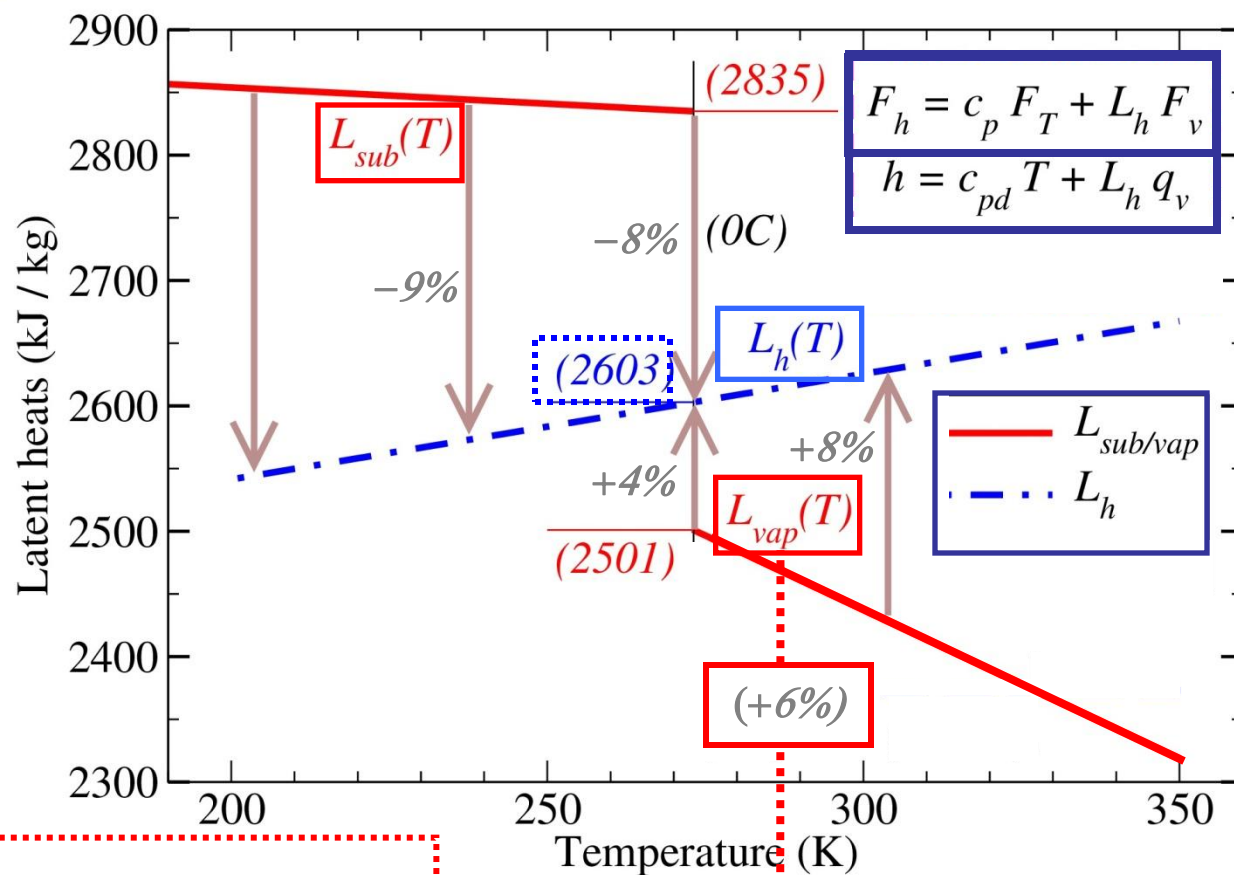
Flux de "chaleur sensible"

Flux de "chaleur latente"

$$L_h(T) = h_v(T) - h_d(T)$$



Diagramme des chaleurs latentes L_{vap} , L_{sub} et L_h



$$L_h(T_0) \approx 2603 \text{ kJ/kg}$$

$$L_h(T) = h_v(T) - h_d(T)$$

$L_h(T)$: proche, intermédiaire,
mais différente de $L_{vap}(T)$ et $L_{sub}(T)$!

en moyenne $\Delta(LE) \approx +6\%$?

Bilan d'énergie pour la surface ?

- Flux turbulents d'énergie = **échanges surface \leftrightarrow atmosphère**
- Energie **reçue** par la surface = celle **perdue** par l'atmosphère ?

Atmosphère : **pas de « SH+LH » !**
juste un **flux vertical de $(h + \phi)$** :

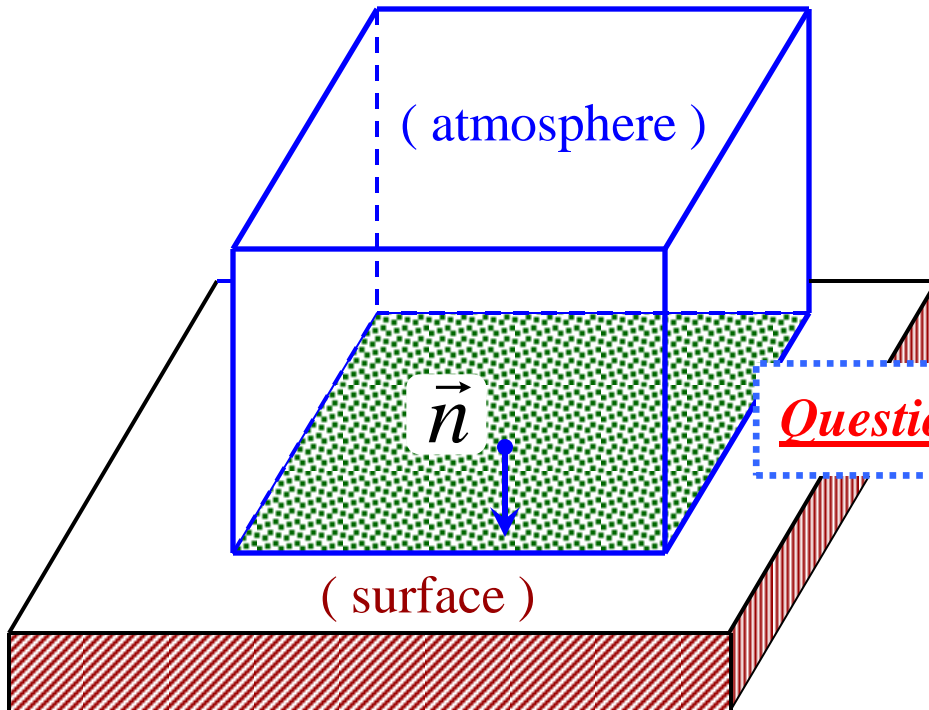
$$+ \overline{(\rho w)' h'} + \overline{(\rho w)' \phi'}$$

Cela implique-t-il qu'en Surface :

$$C_g \frac{dT_{surf}}{dt} = R_{net} + G_{deep} - \overline{(\rho w)' h'} - \overline{(\rho w)' \phi'} - \overline{(\rho w)' (tke)'}$$

Question : (SH+LH) = flux de $(h + \phi)$?

$$F_h = c_p F_T + L_h F_v ?$$



Plan de l'exposé

1) Comment calculer l'entropie « s » ? (3^{ème} principe)

- Les formulations *absolues* : de $s(\theta_s)$ et de θ_s
- Quelques profils verticaux de θ_s

2) Approximations de θ_s : 1^{er} et 2^{ème} ordres

- Applications à la problématique du « C.T.E.I. »
- Applications à la turbulence de l'air humide ? (si $K_h = K_w$)
- Autre applications si $K_h \neq K_w$?

3) Comment calculer l'enthalpie « h » ?

- La formulation « *absolue* » de $h \neq \text{MSE}$
- Redéfinition des flux d'énergie : « LH » $\neq L_v F_v$?

4) Conclusions - Perspectives



Résumé

- Quelques réponses aux questions de Irina (depuis 2009) :
 - 1) pour l'entropie $s(\theta_s)$ (QJ-2011) / le plus facile...
 - 2) pour $N^2(\theta_s)$ (QJ-2013) / Brunt Väisälä / avec Geleyn
 - 3) pour le PV(θ_s) (QJ-2014) / fronts, cyclones, MEP ?
 - 4) pour l'enthalpie (QJ-2015) / le plus difficile / atypique...
 - 5) Autres conséquences : 1er / 2ème ordres pour l'entropie θ_s
/ C.T.E.I. / turbulence humide / bilans d'énergie +
flux d'enthalpie et $L_h(T)$

Perspectives

Entropie (2ème ordre) : $\theta_s \approx \theta_l \exp \left(\left[\Lambda_r - \gamma \log(r_v / r_*) \right] q_t - \gamma r_l \right)$

$$\Lambda_r \approx 5.87$$

$$\gamma \approx 0.46$$

Flux turbulents d'entropie et d'eau totale:

$$\begin{cases} \overline{w'\theta'_s} = -C_h L \sqrt{e} \boxed{\phi_{s3}} \frac{\partial \Theta_s}{\partial z} \\ \overline{w'q'_t} = -C_h L \sqrt{e} \boxed{\psi_{s3}} \frac{\partial Q_t}{\partial z} \end{cases}$$

Question :
comment relier
tout cela ?

Flux d'enthalpie : $F_h = c_p F_T + L_h F_v$

Enthalpie :

$$h = h_{ref} + c_{pd} T + L_h q_t - L_{vap} q_l - L_{sub} q_i$$

Bilan de l'énergie en Surface

$$dT_{surf} / dt = ?$$



Merci de votre attention !



METEO FRANCE