Fermeture convective et déclenchement stochastique

L.M.D./I.P.S.L., Paris and C.N.R.M., Toulouse ; France 10 mai 2016

Cette note a pour but de revenir sur les conséquences du passage au déclenchement stochastique pour la paramétrisation de la convection et plus particulièrement pour la fermeture convective. Le déclenchement stochastique amène un changement du rôle de la paramétrisation convective, passant de la représentation d'un processus continu décrivant un quasi-équilibre à celle d'un processus intermittent.

1 Ancienne formulation

1.1 Dans le plan infini : Fermeture

Le flux de masse à la base des colonnes convectives M_B est relié à la Alp (Available Lifting Power) P_l par :

$$\begin{cases} M_{B\infty} \;=\; \dfrac{P_l}{\overline{\overline{E}}} \\ \overline{E} \;=\; 2w_B^2 \;+\; |Cin| \\ \partial_t M_B \;=\; -\dfrac{1}{\tau}(M_B \;-\; M_{B\infty}) \quad M_B \text{ en kg s}^{-1}\text{ m}^{-2} \end{cases} \tag{1}$$

L'idée ici est que $M_{B\infty}$ est très proche du flux de masse convectif, la relaxation étant simplement considérée comme un lissage numérique : on imagine qu'on n'est jamais très loin d'un régime permanent. Ainsi, pour éviter des comportements absurdes de la convection, une borne est mise sur la valeur de la Alp P_l.

1.2 Pour une maille : Déclenchement statistique

Avec le déclenchement stochastique on entre dans un monde où la paramétrisation détermine non pas seulement la convection moyenne sur un domaine infini mais la convection survenant pendant chaque pas de temps et dans chaque maille séparément. Du coup la convection devient potentiellement intermittente : il suffit de prendre de prendre des pas de temps suffisamment courts ou des mailles suffisamment petites pour qu'il en soit ainsi.

Dans un premier temps nous avons gardé la même façon de voir, nous avons considéré que les formules (1) donnaient le flux de masse moyen dans un domaine infini et que l'intensité convective dans chaque maille était déterminée par une Alp locale p_l, quotient de la Alp moyenne P_l par la probabilité de déclenchement $\mathcal{P}$ dans cette maille :

$$p_l \;=\; \frac{P_l}{\mathcal{P}}$$

Avec cette formulation on obtient bien que la valeur moyenne de la puissance de soulèvement est P_{l} : par exemple, si la probabilité de déclenchement vaut 0.1, alors la puissance locale p_l sera égale à $10P_{\mathrm{l}}$ une fois sur dix et sera nulle neuf fois sur dix, ce qui redonnera bien, en moyenne, P_{l}.

Cependant des difficultés conceptuelles apparaissent rapidement liées au fait que le fonctionnement est maintenant essentiellement intermittent. Que fait-on une fois passé le premier pas de temps après déclenchement ? Comment combiner les colonnes convectives existantes et les nouvelles colonnes ?

2 Proposition pour une nouvelle formulation

Nous abandonnons ici la vision quasi-continue de la convection profonde et passons à une vision essentiellement discontinue dont les objets élémentaires sont les colonnes convectives. Le principal changement réside dans le rôle de la Alp : au lieu d'alimenter un flux de masse plus ou moins constant, elle alimente maintenant la création de nouvelles colonnes convectives. Plus précisément :

Hypothèses

- Chaque colonne convective a une durée de vie τ (le flux de masse décroissant exponentiellement au cours du temps) ; la puissance de soulèvement alimente la création de nouvelles colonnes convectives.
- Le modèle du thermique fournit la puissance de soulèvement **disponible** ; cependant seuls les thermiques suffisamment proches d'une naissance de colonne convective peuvent contribuer à cette naissance. De ce fait seule une partie de la puissance disponible est effectivement utilisable par la convection ; c'est la puissance de soulèvement **effective**. On va dénommer la première P_{la} et la seconde P_{le}.
- La puissance de soulèvement utilisable pour chaque création de colonne convective est la puissance fournie par des thermiques situés près de la colonne et la précédant de peu, c'est-à-dire la puissance fournie pendant une durée τ_0 par les thermiques situés dans un disque d'aire S_0 autour du point de création. Dans ces conditions, le rapport entre la puissance effective P_{le} et la puissance disponible P_{la} est la fraction volumique couverte par les volumes spatio-temporels $[\tau_0,\ S_0]$ balayés par les disques d'aire S_0 centrés sur les naissances de colonnes convectives pendant l'intervalle de temps τ_0 aboutissant à cette naissance (voir la figure 1).

2.1 Dans le plan infini

ou, plus précisément, dans un grand domaine spatio-temporel d'aire S_t et de durée T telles que le nombre de naissances y soit grand devant 1

- Taux de naissance de colonnes par unité de surface : $N(t)$ (N en $\mathrm{m}^{-2}\mathrm{s}^{-1}$)
- Flux de masse à la base d'une colonne convective d'age t :

$$m_{B0}(t) \ = \ \frac{\mu}{\tau} \exp(-t/\tau)$$

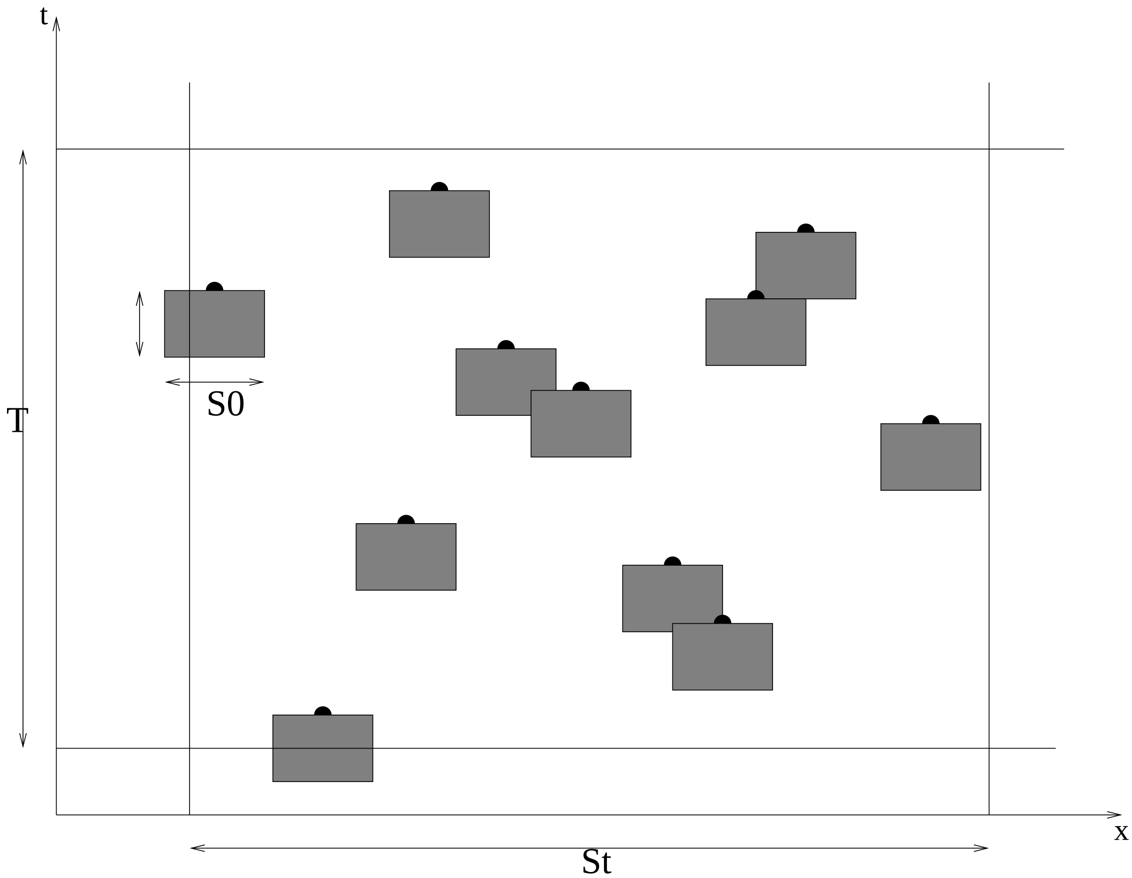

FIG. 1 – Schéma 2D (S,t) de la distribution spatio-temporelle de la puissance de soulèvement effective P_{le}. Dans le grand domaine spatio-temporel $[T,\ S_t]$ la surface effective (en grisé) est la réunion des pavés $[\tau_0,\ S_0]$ alimentant chaque naissance convective se produisant dans le grand domaine

(m_{B0} en kg s^{-1}) (μ = masse transportée par la colonne)
- La puissance effective P_{le} alimente la création de nouvelles colonnes :

$$P_{\text{le}}(t) \; = \; N(t)\overline{E}\mu$$

. Comme nous supposons que le modèle du thermique fournit à la fois la puissance P_{le} et la densité de naissances N, cette relation exprime la masse totale μ transportée par la colonne.

Alors le flux de mass $M_B(t)$ par unité de surface s'écrit :

$$M_B(t) \; = \; \int_{-\infty}^{t} dt' N(t') m_{B0}(t - t') \tag{2}$$

Il vérifie l'équation :

$$\partial_t M_B(t) \; = \; -\frac{1}{\tau}(M_B \; - \; \frac{P_{\text{le}}}{\overline{E}}) \tag{3}$$

On retrouve ainsi la même équation d'évolution pour M_B que dans l'ancienne formulation, à ceci près que ce n'est plus simplement P_{l} qui intervient mais la puissance effective P_{le}.

Il reste à déterminer P_{le}. Cependant, ne sachant trop comment traiter les événements stochastiques dans une équation continue, je passe à une formulation discrète pour l'évolution de M_B pendant un pas de temps δt :

$$M_b(t + \delta t) - M_b(t) \; = \; -\frac{\delta t}{\tau}[M_b(t) \; - \; \frac{P_{\text{le}}}{\overline{E}}] \tag{4}$$

Pour évaluer P_{le}, il faut évaluer la fraction volumique couverte par les pavés associés aux points de déclenchements, lesquels ont une densité spatio-temporelle N. Pour cela, nous allons évaluer la fraction surfacique située hors des pavés $[\tau_0, \; S_0]$. Comme nous supposons qu'il y a homogénéité spatiale, cette fraction surfacique est égale à la probabilité pour un point arbitraire de ne pas être dans un pavé associé à un déclenchement, i.e. à la probabilité qu'il n'y ait aucun déclenchement dans le pavé $[\tau_0, \; S_0]$ partant du point considéré. En supposant les déclenchements indépendants, le nombre de déclenchements dans un pavé de volume $\tau_0 S_0$ est une variable aléatoire obéissant à la loi de Poisson de valeur moyenne $N\tau_0 S_0$. La probabilité qu'il y ait zéro déclenchement dans le pavé est alors $\exp(-N\tau_0 S_0)$ et la fraction surfacique couverte par les pavés associés aux déclenchements s'écrit $1 \; - \; \exp(-N\tau_0 S_0)$. L'expression de la puissance effective en découle immédiatement :

$$P_{\text{le}} \; = \; P_{\text{la}}[1 \; - \; \exp(-N\tau_0 S_0)] \tag{5}$$

2.2 Pour une maille

Maille d'aire S_m ; intervalle de temps δt.

- Le nombre de naissances est une variable aléatoire discrète n obéissant à une loi de Poisson de valeur moyenne $NS_m\delta t$:

$$\mathcal{P}(n) \; = \; e^{-NS_m\delta t}\frac{(NS_m\delta t)^n}{n!} \tag{6}$$

– La puissance de soulèvement surfacique utilisée par ces naissances est alors aussi une variable aléatoire discrète p_{le} donnée par :

$$p_{\mathrm{le}} \;=\; \frac{n\overline{E}\mu}{S_m \delta t}$$

– Cette puissance de soulèvement doit être aussi égale à la puissance de soulèvement effective fournie par la couche limite. Cette puissance effective est, au premier ordre, proportionnelle à n et à P_{la} mais peut aussi dépendre du degré d'aggrégation de la convection et donc de façon non linéaire de n voire des nombres de naissances dans les mailles voisines. Nous l'écrivons sous la forme :

$$p_{\mathrm{le}} \;=\; \frac{n}{\overline{n}} P_{\mathrm{la}} A$$

où nous avons désigné par $\overline{n} \;=\; N S_m \delta t$ le nombre moyen de naissances dans le volume $[\delta t,\; S_m]$ et où le facteur A représente les effets de répartition spatiale de la convection.

Il faut choisir une forme pour le facteur A. Nous allons chercher la forme la plus simple, c'est-à-dire A constant, sachant qu'il faut vérifier la contrainte que, en moyenne, le découpage en mailles d'un grand domaine ne change pas l'intensité convective sur ce grand domaine.

Détermination de A

Nous considérons un domaine spatio-temporel $[T,\; S_t]$ divisé en n_t intervalles de temps $\delta t(j)$ et en n_m mailles $S_m(i)$. Nous désignons par n_{ji} le nombre de naissances dans la maille i pendant l'intervalle de temps j et par $p_{\mathrm{le}}(j,i)$ la puissance effective correspondante. L'invariance de l'intensité convective totale par rapport au découpage s'écrit :

$$\frac{1}{TS_t} \sum_j \delta t(j) \sum_i S_m(i) \frac{p_{\mathrm{le}}(j,i)}{\overline{E}} \;=\; \frac{P_{\mathrm{la}}}{\overline{E}} [1 \;-\; \exp(-N\tau_0 S_0)]$$

En substituant à p_{le} son expression $p_{\mathrm{le}}(j,i) \;=\; \frac{n_{ji}}{N\delta t(j) S_m(i)} P_{\mathrm{la}} A$ l'équation s'écrit :

$$\frac{1}{TS_t} \sum_{ij} \frac{n_{ji}}{N\overline{E}} P_{\mathrm{la}} A \;=\; \frac{P_{\mathrm{la}}}{\overline{E}} [1 \;-\; \exp(-N\tau_0 S_0)]$$

Et comme $\sum_{ij} n_{ji} \longrightarrow NTS_t$ lorsque la taille du domaine tend vers l'infini, il vient :

$$A \;=\; 1. \;-\; \exp(N\tau_0 S_0)$$

Finalement, la puissance de soulèvement effective dans la maille s'ècrit :

$$p_{\mathrm{le}} \;=\; \frac{n}{\overline{n}} P_{\mathrm{le}} \tag{7}$$

Equation d'évolution du flux de masse convectif

La variation du flux de masse convectif dans la maille s'écrit maintenant :

$$m_b(t+\delta t) - m_b(t) \;=\; -\frac{\delta t}{\tau}[m_b(t) \;-\; \frac{n}{\overline{n}}\frac{P_{\mathrm{le}}}{\overline{E}}] \tag{8}$$

Cette équation est très semblable à l'équation (4) à la différence du facteur $n/\overline{n}$ dans le dernier terme. Ce facteur fait que la variation du flux de masse est maintenant une variable aléatoire. En particulier, il apparaît que si le nombre moyen de naissances dans la maille pendant le pas de temps est petit ($\overline{n} << 1$) alors le nombre de naissances n ne va être non-nul qu'en quelques instants isolés. Alors le flux de masse m_b sera non plus rappelé vers une valeur cible donnée par le dernier terme mais soumis à une progression en escalier avec des incréments donnés par le dernier terme.

C'est dans l'estimation du terme en n que va apparaître l'aspect plus ou moins stochastique du traitement numérique de l'équation, selon que l'on moyenne moins ou plus sur le spectre de n.

2.3 Mise en oeuvre

n est une variable aléatoire obéissant à la loi de Poisson $\mathcal{P}(n)$ donnée par l'équation (6). Sa fonction de répartition (Cumulative Distribution Function, CDF) sera désignée par $\hat{\mathcal{F}}$ et son complément (CCDF) par $\mathcal{F}$ (voir figure (2) :

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{F}}(x) \;&=\; e^{-\overline{n}} \sum_{i=0}^{i\leq x} \frac{(\overline{n})^i}{i!} \\ \mathcal{F}(x) \;&=\; e^{-\overline{n}} \sum_{i>x}^{\infty} \frac{(\overline{n})^i}{i!} \end{aligned} \tag{9}$$

$\hat{\mathcal{F}}(n)$ est égale à la probabilité qu'il se produise au plus n naissances de colonnes convectives (en particulier, $\hat{\mathcal{F}}(0) \;=\; \exp(-\overline{n})$ est la probabilité qu'il ne naisse aucune colonne convective : $\hat{\mathcal{F}}(0)$ est la probabilité de non-déclenchement). $\mathcal{F}(n)$ est égale à la probabilité qu'il se produise strictement plus que n naissances de colonnes convectives. On a toujours : $\mathcal{F}(n) + \hat{\mathcal{F}}(n) \;=\; 1$.

Désignons par $\tilde{n}$ l'estimateur de n. Nous allons envisager diverses formes pour $\tilde{n}$ en tirant au hasard les valeurs de $\tilde{n}$ en dessous d'un certain seuil et en remplaçant $\tilde{n}$ par la valeur moyenne de n au-dessus de ce seuil.

A l'ordre 0, on chosit l'estimateur $\tilde{n} \;=\; \overline{n}$. Alors l'équation (8) devient identique à (4).

A l'ordre 1, on fait un tirage au hasard pour décider si n vaut 0 ou plus. Pour cela on tire un nombre R uniformément entre 0 et 1 et on le compare à la probabilité $\hat{\mathcal{F}}(0)$ que le nombre n soit nul. Lorsque $R \leq \hat{\mathcal{F}}(0)$, alors $\tilde{n} = 0$. Lorsque $R > \hat{\mathcal{F}}(0)$ alors $\tilde{n} = \mathcal{E}(n|n > 0)$, où $\mathcal{E}(n|n > 0)$ désigne l'espérance de n conditionnée par $n > 0$.

En désignant par Υ la fonction de Heavyside ($\Upsilon(x) = 1$ si $x > 0$, $\Upsilon(x) = 0$ si $x \leq 0$), $\tilde{n}$ peut s'écrire :

$$\tilde{n} = \Upsilon(\hat{\mathcal{F}}(0) - R) \times 0 \;+\; \Upsilon(R - \hat{\mathcal{F}}(0)) \times \mathcal{E}(n|n > 0)$$

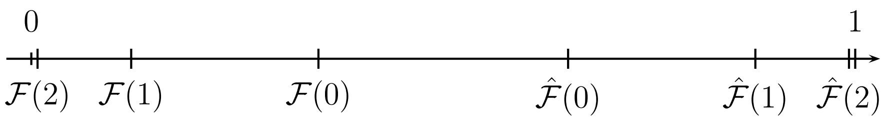

FIG. 2 – Exemple (qualitatif) des dispositions relatives de la fonction de répartition et de sa complémentaire

L'espérance conditionnelle $\mathcal{E}(n|n>0)$ s'écrit :

$$\mathcal{E}(n|n>0) \ = \ \frac{\overline{n}}{\mathcal{F}(0)}$$

D'où la formule finale pour $\tilde{n}$ à l'ordre 1 :

$$\tilde{n} \ = \ \Upsilon(R-\hat{\mathcal{F}}(0))\frac{\overline{n}}{1-\exp(-\overline{n})} \tag{10}$$

Finalement, en substituant à $\overline{n}$ et à $P_{\rm le}$ leurs expressions, on obtient pour la variation du flux de masse à l'ordre 1 :

$$m_b(t+\delta t)-m_b(t) \ = \ -\frac{\delta t}{\tau}[m_b(t) \ - \ \Upsilon(R-\hat{\mathcal{F}}(0))\frac{1 \ - \ \exp(-N\tau_0 S_0)}{1-\exp(-N\delta t S_m)}\ \frac{P_{\rm la}}{\overline{\overline{E}}}] \tag{11}$$

Quelques remarques sur cette formule :

- Si N est grand ($N\tau_0 S_0 >> 1$ et $N\delta t S_m >> 1$), alors $\hat{\mathcal{F}}(0) \simeq 0$ et on retombe sur la formule standard (4).
- Si le pas de temps et la maille sont tels que $\delta t S_m = \tau_0 S_0$ alors la variation du flux de masse est indépendante de N.
- si δt est petit ($N\delta t S_m << 1$), alors la variation du flux de masse s'écrit :

  $$m_b(t+\delta t)-m_b(t) \ = \ -\frac{\delta t}{\tau}m_b(t) \ + \ \Upsilon(R-\hat{\mathcal{F}}(0))\frac{1 \ - \ \exp(-N\tau_0 S_0)}{N\tau S_m}\ \frac{P_{\rm la}}{\overline{\overline{E}}}$$

  Comme alors, $\hat{\mathcal{F}}(0)$ est voisin de 1, l'évolution de m_b va se composer de segments de décroissance exponentielle séparés par des steps d'amplitude indépendante de δt. Si, en outre, N est petit ($N\tau_0 S_0 << 1$ et $N\delta t S_m << 1$), alors la formule se simplifie encore donnant :

  $$m_b(t+\delta t)-m_b(t) \ = \ -\frac{\delta t}{\tau}m_b(t) \ + \ \Upsilon(R-\hat{\mathcal{F}}(0))\frac{\tau_0 S_0}{\tau S_m}\ \frac{P_{\rm la}}{\overline{\overline{E}}}$$

  l'amplitude des steps est alors aussi indépendante de N.

A l'ordre 2, on fait un tirage au hasard pour décider si n vaut 0, 1 ou plus. Un nombre R est tiré uniformément entre 0 et 1 : si $R \leq \hat{\mathcal{F}}(0)$, alors $\tilde{n}=0$; si $\hat{\mathcal{F}}(0) < R \leq \hat{\mathcal{F}}(1)$ alors $\tilde{n}=1$; si $R > \hat{\mathcal{F}}(1)$, alors $\tilde{n} = \mathcal{E}(n|n>1)$. Soit :

$$\tilde{n} = \Upsilon(\hat{\mathcal{F}}(0)-R)\times 0 \ + \ \Upsilon((R-\hat{\mathcal{F}}(0))(\hat{\mathcal{F}}(1)-R))\times 1 \ + \ \Upsilon(R-\hat{\mathcal{F}}(1))\times \mathcal{E}(n|n>1)$$

Ordres 2 et plus à traiter

2.4 Dans le code

Plusieurs corrections arrivent avec ce déclenchement stochastique.

- Dans cv3p1_closure, il faut remplacer le test cbmf1<cbmfmax par un test cbmf<cbmfmax plus tard.
- Dans physiq, le teste sur Alp n'a plus toujours de sens. Il faut en trouver un autre.
- Dans physiq, il faut coder la formule (11).