

# Éléments de mécanique des fluides

## 1 Évolution temporelle dans un écoulement

### 1.1 Points de vue Eulérien et Lagrangien

On distingue 2 grandes façons de suivre l'évolution d'un écoulement fluide, et de repérer la position de parcelles.

#### Eulérien

Le point de vue *Eulérien* considère l'évolution de caractéristiques *en un point fixé*, c'est-à-dire à  $(x, y, z)$  constants. On lui associe également les notions de contour, surface ou volume *géométrique* : la position des points composant le contour (par exemple) est constante dans le temps, et il y a en général un écoulement à travers (sauf dans le cas d'une paroi fixe).

L'évolution temporelle en point de vue Eulérien est une évolution *locale*, qui s'exprime donc à l'aide de la dérivée partielle à  $(x, y, z)$  fixés  $(\partial/\partial t)$ . Les lois de conservation prennent la forme de bilans en entrée-sortie d'un volume géométrique.

#### Lagrangien

Le point de vue *Lagrangien* suit une parcelle de fluide dans son déplacement. La position n'est donc pas fixe dans le temps, mais chaque parcelle parcourt sa *trajectoire*. Un contour, surface ou volume *matériel* regroupe également le même ensemble de molécules de fluide au cours du temps. *Il n'y a pas de flux de masse travers un contour matériel*, puisque le contour se déplace lui-même à la vitesse de l'écoulement. Les lois de conservations s'écriront en considérant un volume matériel.

Les points de vue Eulérien et Lagrangien correspondent aussi à différentes familles d'instruments de mesure : stations météo, capteurs fixes ou satellites dans le premier cas, bouées dérivantes ou particules marquées dans le second.

### 1.2 Dérivée matérielle

La dérivée temporelle en point de vue Lagrangien est différente de la dérivée partielle, puisque la position de la parcelle change  $(x, y, z)$  non constants). De manière générale, une petite variation d'une variable  $\phi$  caractérisant le fluide s'écrit :

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial t} dt + \frac{\partial\phi}{\partial x} dx + \frac{\partial\phi}{\partial y} dy + \frac{\partial\phi}{\partial z} dz$$

Dans le cas particulier où on suit une parcelle fluide, on a en plus

$$\left( \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) = (v_x, v_y, v_z)$$

les composantes de  $\mathbf{v}$  la vitesse de l'écoulement. Il vient alors en divisant la première relations par  $(dt)$  que :

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \phi$$

On parle alors de *dérivée matérielle*, ou prise en suivant la parcelle. Elle est parfois notée  $(D/dt)$  pour la différencier d'une petite variation quelconque. Par rapport à la dérivée locale Eulérienne apparait un terme d'*advection* qui représente l'effet du transport de  $\phi$  par l'écoulement, il est positif quand la vitesse est dirigée des valeurs faibles vers des valeurs plus grandes de  $\phi$ .

### 1.3 Trajectoires et lignes de courant

La *trajectoire* d'une parcelle est l'ensemble des positions occupées par cette parcelle au cours du temps (souvent à partir d'un instant donné, vers le passé on parle de *rétro-trajectoire*). L'équation des trajectoires s'obtient en intégrant  $\mathbf{v}(t)$  sur le temps.

Les *lignes de courant* sont plutôt un concept Eulérien, qui décrit l'écoulement à un instant donné : il s'agit de lignes qui en tout point sont parallèles à la vitesse locale. On obtient leur équation en écrivant que le long de la ligne  $d\mathbf{M} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$ , soit

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}$$

Les lignes de courant et les trajectoires ne sont en général pas confondues, sauf pour les écoulements stationnaires ( $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ ) et certains cas particuliers (écoulements parallèles).

### 1.4 Dérivée de quantités intégrées

La dérivée temporelle de l'intégrale sur un volume *géométrique*  $V_g$  d'une quantité  $\phi$  est juste la somme des évolutions locales, le volume étant fixe :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V_g} \phi d^3V = \iiint_{V_g} \frac{\partial\phi}{\partial t} d^3V \quad (1)$$

Dans le cas de l'intégrale sur un volume *matériel*  $V_m$ , il faut rajouter en plus l'effet des déplacements de la surface  $\partial V$  délimitant le volume (théorème de transport de Reynolds) :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V_m} \phi d^3V = \iiint_{V_m} \frac{\partial\phi}{\partial t} d^3V + \iint_{\partial V} \phi \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} d^2S$$

Le 2<sup>e</sup> terme s'exprime comme un flux à travers  $\partial V$ , du au déplacement de la surface. En utilisant le théorème flux-divergence pour le transformer en intégrale de volume, on obtient :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V_m} \phi d^3V = \iiint_{V_m} \frac{\partial\phi}{\partial t} + \text{div}(\phi \mathbf{v}) d^3V = \iiint_{V_m} \frac{d\phi}{dt} + \phi \text{div}(\mathbf{v}) d^3V \quad (2)$$

Noter que pour un écoulement incompressible,  $\text{div} \mathbf{v} = 0$ .

## 1.5 Équation de continuité

On peut simplement remplacer  $\phi$  par 1 dans l'égalité (2) ; on obtient alors que

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V_m} d^3V = \iiint_{V_m} \operatorname{div} \mathbf{v} d^3V$$

L'intégrale de gauche étant juste le volume matériel. Cette relation doit être vérifiée pour tout petit volume matériel  $\delta V$  sur lequel  $\operatorname{div} \mathbf{v}$  est à peu près constante, on a finalement

$$\frac{1}{\delta V} \frac{d\delta V}{dt} = \operatorname{div} \mathbf{v}$$

La divergence de la vitesse est donc égale au *taux de dilatation volumique*.

Si on utilise maintenant  $\phi \equiv \rho$  la masse volumique du fluide, l'intégrale  $\iiint_V \rho d^3V$  représente la masse contenue dans le volume matériel, qui est invariante. En écrivant que (2) doit être vérifiée pour un volume quelconque, on obtient l'*équation de continuité* ou *conservation de la masse*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \equiv \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (3)$$

La première forme (Eulérienne) indique que l'évolution locale de la densité est gouvernée par la divergence du flux de masse. La deuxième forme (Lagrangienne) dit que l'évolution de la masse d'une parcelle suit celle de son volume.

La conservation de la masse (intégrale de  $\rho$ ) peut être utilisée pour simplifier la dérivée d'une intégrale volumique le cas particulier où  $\phi$  est une grandeur *massique* et la quantité d'intérêt est  $\rho\phi$  : quantité de mouvement  $\rho\mathbf{v}$ , énergie cinétique  $\frac{1}{2}\rho v^2$  etc. En remplaçant  $\phi$  par  $\rho\phi$  dans l'équation (2) et en utilisant l'équation de continuité (3), on arrive à :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V_m} \rho\phi d^3V = \iiint_{V_m} \rho \frac{d\phi}{dt} d^3V \quad (4)$$

Dans le cas d'un volume géométrique, il se rajoute un terme de flux à travers la surface du volume :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V_g} \rho\phi d^3V = \iiint_{V_g} \rho \frac{d\phi}{dt} d^3V - \iint_{\partial V} \rho\phi \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} d^2S \quad (5)$$

La différence entre les relations (1,2) et (5,4) vient du fait que pour un volume géométrique, le volume est conservé mais pas la masse de fluide ; c'est le contraire pour un volume matériel. On a donc présence ou pas d'un terme de flux de surface suivant qu'on utilise une grandeur volumique ou massique pour  $\phi$ .

Ces égalités restent valable pour un vecteur : il suffit de remplacer  $\phi$  par chaque composante pour le voir.

## 2 Cinématique, déformation

On s'intéresse toujours dans cette section à la description de l'écoulement et en particulier du champ de vitesse, en mettant l'accent sur ses variations *spatiales*.

## 2.1 Coordonnées naturelles, repère de Freinet

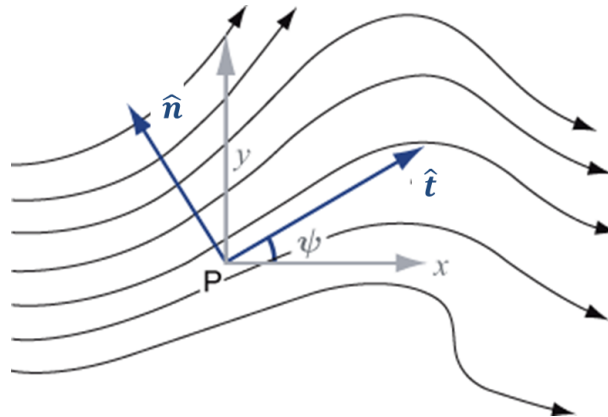


FIGURE 1 – Repère de Freinet au point P : vecteurs tangent ( $\hat{\mathbf{t}}$ ) et normal ( $\hat{\mathbf{n}}$ ) à la ligne de courant passant par P, et angle  $\psi$  avec une direction fixe.

Les *coordonnées naturelles* permettent de décrire l'écoulement et son évolution de façon intuitive. Le vecteur vitesse est décrit par son module  $V$  et sa direction, et non par des composantes dans une base fixe. Le repère local associé est appelé *repère de Freinet* (figure 1). Il est orienté en chaque point suivant la trajectoire d'une parcelle (point de vue Lagrangien) ou les lignes de courant à un certain instant (point de vue Eulérien).

On note  $\hat{\mathbf{t}}$  le vecteur unitaire dans la direction de  $\mathbf{v}$  en un point de la trajectoire, et  $\hat{\mathbf{n}}$  le vecteur unitaire orthogonal à  $\hat{\mathbf{t}}$  tel que  $(\hat{\mathbf{t}}, \hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{k}})$  soit direct (dans un plan horizontal,  $\hat{\mathbf{n}}$  est à gauche de  $\hat{\mathbf{t}}$ ). La direction de la trajectoire est donnée par l'angle  $\psi$  de  $\hat{\mathbf{t}}$  avec une direction fixe arbitraire (figure 1).

La distance le long de la trajectoire est mesurée par l'*abscisse curviligne*  $s$ , la distance normale  $n$ . On a donc  $V = ds/dt$ .

### description de l'écoulement

Un certain nombre de caractéristiques locales de l'écoulement s'expriment simplement dans ce repère :

- Les changements de la direction des trajectoires sont mesurés par le *rayon de courbure*  $R$  tel que  $1/R = \partial\psi/\partial s$ .
- L'*étirement*  $\partial V/\partial s$  mesure la variation du module de la vitesse dans la direction de l'écoulement.
- Le *cisaillement*  $\partial V/\partial n$  mesure lui la variation de  $V$  perpendiculairement à l'écoulement.
- La *diffluence*  $\partial\psi/\partial n$  mesure enfin l'écartement ou le rapprochement vers l'aval des trajectoires ou lignes de courant (à distinguer de la courbure que donne le changement de direction moyen).

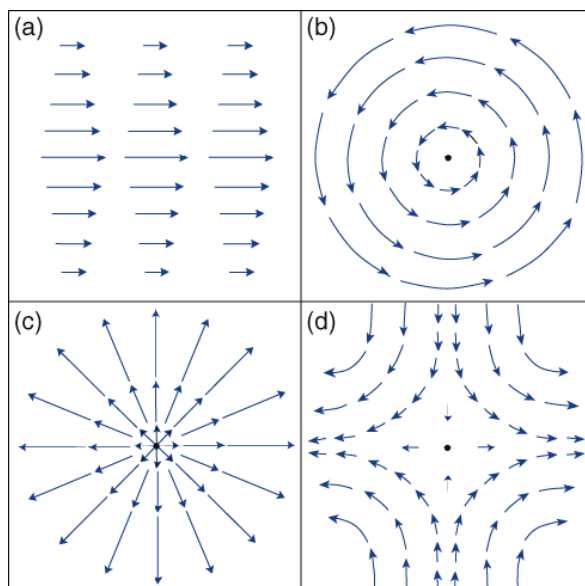


FIGURE 2 – Exemples de champs de vecteurs bidimensionnels : (a,b) champs rotationnels ; cisaillement pur (a) et rotation solide (b). (c) champ central divergent. (d) champ avec déformation, mais à divergence nulle (compression dans une direction, dilatation dans l'autre à surface constante) et rotationnel nul (courbure et cisaillement opposés).

La *divergence*  $\text{div } \mathbf{v}$  s'écrit alors de manière simple comme la somme d'un terme de diffuence et d'un terme d'étirement :

$$\text{div } \mathbf{v} = V \frac{\partial \psi}{\partial n} + \frac{\partial V}{\partial s}$$

Dans le cas d'un écoulement avec déformation sans divergence, les deux termes sont opposés (figure 2d) : le débit entre 2 lignes de courant étant alors conservé, la vitesse doit diminuer ( $\partial V / \partial s < 0$ ) quand elles s'écartent ( $\partial \psi / n > 0$ ).

La *vorticité*  $\text{rot } \mathbf{v}$  s'écrira comme la somme d'un terme de courbure et d'un terme de cisaillement :

$$\hat{\mathbf{k}} \cdot \text{rot } \mathbf{v} = \frac{V}{R} - \frac{\partial V}{\partial n}$$

La figure 2a donne un exemple d'écoulement avec cisaillement seul ; sur la figure 2d les deux termes se compensent et le rotationnel est nul. Dans le cas d'une rotation solide (figure 2b), les 2 termes sont égaux.

### Vitesse et accélération

Le vecteur vitesse s'écrit très simplement dans le repère de Freinet :

$$\mathbf{v} = V \hat{\mathbf{t}}$$

En utilisant que

$$\frac{d\hat{\mathbf{t}}}{dt} = \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{d\psi} \frac{d\psi}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{V}{R} \hat{\mathbf{n}}$$

on obtient pour l'accélération

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \left( \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial s} \right) \hat{\mathbf{t}} + \frac{V^2}{R} \hat{\mathbf{n}}$$

Le terme d'accélération tangentielle est juste  $dV/t$ , le terme d'accélération normale est celui d'un mouvement circulaire uniforme, mais avec le rayon de courbure local.

## 2.2 Fonction de courant

On s'intéresse ici au cas particulier d'un écoulement bidimensionnel et incompressible. On a alors  $\text{div } \mathbf{v} = 0$ , soit en cartésien

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

Il existe donc une fonction  $\Psi(x, y)$  telle que

$$\begin{aligned} v_x &= -\frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad ; \quad v_y = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \\ \mathbf{v} &= \hat{\mathbf{e}}_z \times \mathbf{grad } \Psi \end{aligned} \quad (6)$$

La fonction  $\Psi$  – définie à une constante près – est appelée *fonction de courant*. Elle permet de remplacer le vecteur  $\mathbf{v}$  par un scalaire, en utilisant la non-divergence. Elle possède un certain nombre de propriétés supplémentaires :

**Lignes de courant** On a  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad } \Psi = 0$ ,  $\Psi$  est donc constante le long d'une ligne de courant et les lignes de courant sont confondues avec les iso-lignes de  $\Psi$ .

**Débit constant** On considère le débit  $Q$  entre deux lignes de courant associées aux valeurs  $\Psi_1$  et  $\Psi_2$ , à travers une section de normale locale  $\hat{\mathbf{n}}$  et de vecteur tangent  $\hat{\mathbf{t}}$ .  $Q$  vaut

$$\begin{aligned} Q &= \int_{\Psi_1}^{\Psi_2} \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dl = \int_{\Psi_1}^{\Psi_2} (\hat{\mathbf{e}}_z \times \mathbf{grad } \Psi) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dl \\ &= \int_{\Psi_1}^{\Psi_2} \mathbf{grad } \Psi \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{e}}_z) \, dl = \int_{\Psi_1}^{\Psi_2} \mathbf{grad } \Psi \cdot \hat{\mathbf{t}} \, dl \\ &= \int_{\Psi_1}^{\Psi_2} d\Psi = \Psi_2 - \Psi_1 \end{aligned}$$

La fonction de courant mesure donc le débit volumique entre deux lignes de courant, qui ne dépend pas de la section considérée.

## 2.3 Champ de vitesse et déformations

On s'intéresse maintenant à l'évolution d'un vecteur  $\delta \mathbf{M}$  reliant à un instant donné deux points matériels proches du fluide. On a alors

$$\frac{d\delta \mathbf{M}}{dt} = d\mathbf{v} \simeq [\mathbf{grad } \mathbf{v}] \delta \mathbf{M}$$

où  $d\mathbf{v}$  est le petit écart de vitesse entre les 2 points. Les composantes du gradient de la vitesse  $[\mathbf{G}] \equiv [\mathbf{grad} \mathbf{v}]$  s'écrivent<sup>1</sup>

$$g_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

Pour comprendre l'influence de  $[\mathbf{G}]$ , on peut le décomposer en deux parties symétrique et antisymétrique :

$$[\mathbf{G}] = [\boldsymbol{\epsilon}] + [\boldsymbol{\Omega}] = \frac{1}{2}([\mathbf{G}] + [\mathbf{G}^T]) + \frac{1}{2}([\mathbf{G}] - [\mathbf{G}^T]) \quad (7)$$

### 2.3.1 Taux de rotation

La partie antisymétrique du gradient de vitesse  $[\boldsymbol{\Omega}]$  a pour composantes

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

On peut montrer que pour tout vecteur  $\delta\mathbf{M}$ ,

$$[\boldsymbol{\Omega}] \delta\mathbf{M} = \boldsymbol{\Omega} \times \delta\mathbf{M}$$

où  $\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2} \mathbf{rot} \mathbf{v}$ . On a donc une *rotation* de  $\delta\mathbf{M}$  autour de  $\boldsymbol{\Omega}$ , sans changement de longueur.  $[\boldsymbol{\Omega}]$  ou  $\boldsymbol{\Omega}$  sont appelés tenseur ou vecteur *taux de rotation*. Attention, il s'agit d'une rotation locale de parcelles de fluides, pas d'une rotation globale de l'écoulement.

### 2.3.2 Taux de déformation

La partie symétrique  $[\boldsymbol{\epsilon}]$  de  $[\mathbf{G}]$  a pour composantes

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

La matrice  $[\epsilon_{ij}]$  étant symétrique, il existe une base (repère)  $(x'_i)$  dans laquelle seuls les termes diagonaux  $\partial v'_i / \partial x'_i$  sont non nuls. Le tenseur  $[\boldsymbol{\epsilon}]$  représente donc un étirement ou contraction dans chacune des directions de cette base, appelées *directions principales*, on l'appelle tenseur *taux de déformation*.

La trace de  $[\boldsymbol{\epsilon}]$  est invariante lors d'un changement de base ; on peut vérifier qu'elle vaut

$$\text{Tr} [\boldsymbol{\epsilon}] = \text{div} \mathbf{v}$$

et est donc égale au taux de dilatation volumique. On peut donc finalement décomposer le tenseur  $[\boldsymbol{\epsilon}]$  en :

- une partie sphérique  $1/3 \text{div} \mathbf{v} [I]$ , représentant une dilatation ou contraction volumique ( $[I]$  est la matrice identité).
- une partie de trace nulle, représentant une déformation dans les directions principales sans changement de volume.

---

1. Attention, on note ici les tenseurs d'ordre 2 entre crochets  $[\mathbf{G}]$  pour les distinguer des vecteurs, mais il s'agit d'une notation *intrinsèque* – comme un vecteur  $\mathbf{v}$  – qui ne dépend pas d'une base particulière. La matrice des composantes sera elle notée  $[G_{ij}]$ .

### 3 Dynamique et équation du mouvement

#### 3.1 Contraintes

Un volume matériel  $V$  d'un milieu continu peut être sujet à des forces *en volume*  $\mathbf{f}_v$ , dont la plus classique est le poids  $\rho\mathbf{g}$ . La résultante de ces forces vient alors d'une intégrale sur  $V$  :

$$\mathbf{F} = \iiint_V \mathbf{f}_v d^3V \quad (8)$$

En plus, on distingue des forces *surfiques* ou *contraintes* : un élément de surface  $d^2S$  de normale  $\hat{\mathbf{n}}$  subira une force égale à  $\mathbf{T} d^2S$ . La résultante des forces sur un volume fini sera alors

$$\mathbf{F} = \oiint_{\partial V} \mathbf{T} d^2S \quad (9)$$

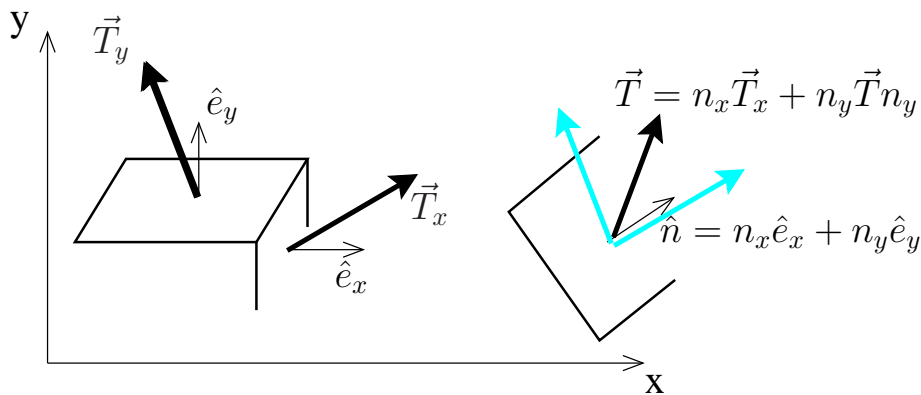


FIGURE 3 – Schéma de la contrainte sur une surface de normale  $\hat{\mathbf{n}}$  en fonction des contraintes sur des surfaces orientées par les vecteurs de la base  $\hat{\mathbf{e}}_i$ . Les flèches en clair à droite sont les contraintes du schéma de gauche.

Le vecteur contrainte  $\mathbf{T}$  dépend de la position mais aussi de l'orientation  $\hat{\mathbf{n}}$ . On peut montrer que pour une surface de normale quelconque  $\hat{\mathbf{n}} = (n_i \hat{\mathbf{e}}_i)$ ,  $\mathbf{T}$  s'exprime en fonction des contraintes  $\mathbf{T}_i$  sur les surfaces orientées<sup>2</sup> par  $\hat{\mathbf{e}}_i$  (figure 3) :  $\mathbf{T} = \sum_i (n_i \mathbf{T}_i)$ . On peut résumer cette relation par :

$$\mathbf{T} = [\boldsymbol{\sigma}] \hat{\mathbf{n}}$$

où  $[\boldsymbol{\sigma}]$  est un tenseur d'ordre 2 appelé *tenseur des contraintes*. Sa composante  $\sigma_{ij}$  représente la contrainte dans la direction  $\hat{\mathbf{e}}_j$  qui s'exerce sur une surface de normale  $\hat{\mathbf{e}}_i$  (ou vice versa, ce tenseur étant nécessairement symétrique). Cette contrainte s'exprime en Pascals (Pa). Pour une surface de normale  $\hat{\mathbf{n}}$ , on a alors les composantes de  $\mathbf{T}$  :

$$T_i = \sum_j (\sigma_{ij} n_j)$$

2. On écrit que la résultante des forces surfiques sur un petit volume ne doit pas tendre vers l'infini quand le volume tend vers 0



### 3.1.1 Forces de pression

La *pression* mécanique d'un fluide est une contrainte qui s'exerce de façon normale à une surface, quelque soit son orientation :

$$\mathbf{T} = -p\hat{\mathbf{n}}$$

où  $p$  ne dépend que de la position (et du temps) mais pas de  $\hat{\mathbf{n}}$ . Le tenseur des contraintes peut alors s'exprimer comme

$$[\boldsymbol{\sigma}] = -p[\mathbf{I}] + [\boldsymbol{\sigma}'] \quad (10)$$

### 3.1.2 Contraintes visqueuses

La partie  $[\boldsymbol{\sigma}']$  du tenseur des contraintes qui ne vient pas de la pression est lié à des *contraintes visqueuses*. Elles sont le pendant des contraintes élastiques dans un solide, et vont s'opposer aux déformations du fluide.

Les relations entre les contraintes visqueuses et le taux de déformation du fluide peuvent être très complexes ; leur étude est appelée *rhéologie* (cas des glaciers par exemple). L'atmosphère et l'océan sont des exemples de *fluides Newtoniens*, pour lesquels cette relation est linéaire. On arrive alors à cette expression pour le tenseur des contraintes visqueuses :

$$[\boldsymbol{\sigma}'] = 2\eta[\boldsymbol{\epsilon}] + \zeta \operatorname{div} \mathbf{v}[\mathbf{I}] \quad (11)$$

La constante  $\eta$  est appelée *viscosité dynamique* du fluide.  $\zeta$  est une viscosité de dilatation, qui joue un rôle dans l'amortissement des ondes sonores par exemple. Ce terme s'annule pour un écoulement incompressible.

## 3.2 Conservation de la quantité de mouvement

Suivant le principe fondamental de la dynamique, l'évolution de la quantité de mouvement d'un volume matériel de fluide est égale à la somme des forces s'exerçant sur ce volume, soit en utilisant les relations précédentes (8) et (9) :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V_m} \rho \mathbf{v} d^3V = \iiint_{V_m} \mathbf{f}_v d^3V + \oint_{\partial V} [\boldsymbol{\sigma}] \hat{\mathbf{n}} d^2S \quad (12)$$

Les 2 termes de droite sont l'intégrale des forces en volume, et des contraintes en surface. Au membre de gauche, on peut passer la dérivée sous l'intégrale en utilisant (4). À droite, l'intégrale de surface peut être transformée en intégrale de volume en utilisant le théorème flux-divergence :

$$\iiint_{V_m} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} d^3V = \iiint_{V_m} (\mathbf{f}_v + \mathbf{div} [\boldsymbol{\sigma}]) d^3V$$

Cette relation devant être vérifiée quelque soit  $V$ , on peut supprimer l'intégrale. En utilisant en plus la définition (10) de  $[\boldsymbol{\sigma}]$ , on obtient l'équation de *conservation de la quantité de mouvement*, aussi appelée *équation de Navier-Stokes* :

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f}_v - \mathbf{grad} p + \mathbf{div} [\boldsymbol{\sigma}'] \quad (13)$$

Dans le cas d'un fluide Newtonien peu compressible comme l'océan ou l'atmosphère, la divergence de  $[\sigma']$  s'écrit avec une très bonne approximation comme

$$\mathbf{div} [\sigma'] = \eta \Delta \mathbf{v}$$

On a utilisé (11). D'autre part, les forces en volume se résument au poids  $\rho \mathbf{g}$ . Enfin, on divise en général (13) par  $\rho$  pour arriver à l'équation de Navier-Stokes pour un fluide Newtonien incompressible :

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{g} - \frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p + \nu \Delta \mathbf{v} \quad (14)$$

On a ici des termes homogènes à des accélérations. On a fait apparaître la *viscosité cinématique*  $\nu = \eta/\rho$ . Pour un fluide incompressible non visqueux, l'équation du mouvement (14) associée à  $\mathbf{div} \mathbf{v} = 0$  forme le système des *équations d'Euler*.

### 3.3 Cas d'un volume géométrique (Eulérien)

Il peut être utile de faire un bilan de quantité de mouvement sur un volume géométrique (fixe). En utilisant la relation (5), on obtient

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V_g} \rho \mathbf{v} d^3V = \iiint_{V_g} \mathbf{f}_v d^3V + \iint_{\partial V} [\sigma] \hat{\mathbf{n}} d^2S - \iint_{\partial V} (\rho \mathbf{v}) \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} d^2S \quad (15)$$

Par rapport à l'équation (12) pour un volume matériel, se rajoute un terme de flux de quantité de mouvement à travers la surface du volume considéré.

### 3.4 Transport par viscosité et nombre de Reynolds

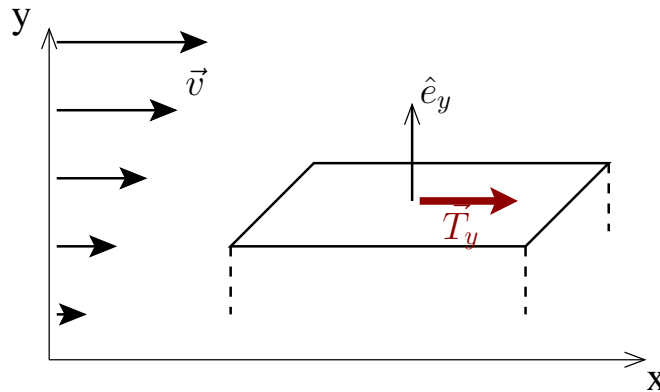


FIGURE 4 – schéma d'un écoulement cisailé simple suivant  $(Ox)$ , et de la contrainte visqueuse associée sur une surface de normale  $\hat{\mathbf{e}}_y$ .

Pour visualiser l'effet de la viscosité, le cas le plus simple est un écoulement parallèle avec cisaillement  $\mathbf{v} = v_x(y) \hat{\mathbf{e}}_x$ . On a alors une contrainte  $\mathbf{T} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y} \hat{\mathbf{e}}_x$  sur une surface de

normale  $\widehat{e}_y$ . Dans le cas où  $dv_x/dy \geq 0$  (figure 4), le fluide situé à des valeurs de  $y > y_0$  exerce une force qui va accélérer suivant ( $Ox$ ) le fluide situé à  $y < y_0$ . On a donc un effet d'entraînement par le fluide plus rapide situé au dessus, qui va lui-même être ralenti (action-réaction).

Les contraintes visqueuses vont donc transporter (échanger) de la quantité de mouvement, ici vers le fluide plus lent. L'efficacité de ce transport peut s'estimer à partir de l'équation du mouvement (14) : si on garde uniquement les termes  $\partial_t \mathbf{v} \sim \nu \Delta \mathbf{v}$ , on obtient que l'effet à une distance  $L$  sera obtenu en un temps

$$T_{\text{visc}} \sim \frac{L^2}{\nu}$$

On peut comparer ce temps à celui lié au simple transport advectif des parcelles à une vitesse typique  $U$  :

$$T_{\text{adv}} \sim \frac{L}{U}$$

On voit que si le transport visqueux peut dominer sur des distances courtes, il deviendra négligeable pour  $L$  suffisamment grand. On mesure l'importance relative de la viscosité dans un écoulement par le *nombre de Reynolds*  $Re$  :

$$Re = \frac{T_{\text{adv}}}{T_{\text{visc}}} = \frac{UL}{\nu} \quad (16)$$

Pour  $Re$  petit, la viscosité domine et on peut négliger les termes d'advection. L'équation du mouvement devient alors linéaire en  $\mathbf{v}$  (pour un fluide newtonien). Pour  $Re$  modéré, on peut négliger la viscosité pour étudier l'écoulement, mais elle reste suffisante pour empêcher le développement de turbulence de petite échelle : l'écoulement est alors *laminaire*. Pour  $Re$  grand, on observe l'apparition de tourbillons et de structures fines en présence de cisaillement moyen.

Un écoulement peut souvent être considéré non visqueux à distance des obstacles ou parois. On a ensuite une zone de transition appelée *couche limite* où  $Re$  devient grand ( $L$  la distance au bord diminue) et la viscosité est importante.

### 3.4.1 Exemple d'adimensionalisation

Le nombre de Reynolds est également obtenu en adimensionalisant l'équation (14). La procédure est la suivante : on définit des variables sans dimension  $\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v}/U$ , et des coordonnées  $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = (x, y, z)/L$  et  $\tilde{t} = tU/L$ . Pour la pression, on utilise  $p/\rho = \phi_0 \tilde{\phi}$ . On remplace ensuite dans l'équation (14) les variables dimensionnées, par exemple  $\mathbf{v}$  par  $(U\tilde{\mathbf{v}})$  et  $x$  par  $(L\tilde{x})$  (les coordonnées apparaissent notamment dans les dérivations type  $\partial/\partial x$ ). On obtient :

$$\frac{U^2}{L} \frac{d\tilde{\mathbf{v}}}{d\tilde{t}} = \mathbf{g} - \frac{\phi_0}{L} \mathbf{grad} \tilde{\phi} + \frac{\nu U}{L^2} \tilde{\Delta} \tilde{\mathbf{v}}$$

En divisant par  $U^2/L$  on arrive à :

$$\frac{d\tilde{\mathbf{v}}}{d\tilde{t}} = -\frac{gL}{U^2}\hat{\mathbf{e}}_z - \frac{\phi_0}{U^2}\mathbf{grad}\tilde{\phi} + \frac{1}{Re}\tilde{\Delta}\tilde{\mathbf{v}} \quad (17)$$

Le nombre de Reynolds apparait comme facteur du terme de viscosité. Si  $U, L$  sont les bonnes échelles de l'écoulement, tout les termes sans dimension sont  $\sim 1$  et la viscosité devient négligeable pour  $Re$  grand. On note également que :

- Pour équilibrer l'accélération, les anomalies de pression doivent être d'ordre  $p \sim \rho_0 U^2$ .
- Le rapport entre accélération et gravité fait apparaitre le *nombre de Froude*  $Fr^2 = U^2/gL$  ( $L$  est ici typiquement une échelle verticale).

L'équation avec variables sans dimensions montre aussi que si 2 écoulements ont des échelles ( $U, L$ ) différentes mais le même nombre de Reynolds – entre autres, ils seront identiques (moyennant le changement d'échelle). Plus généralement, on peut ainsi identifier les paramètres clé qui déterminent le comportement de l'écoulement. On utilise par exemple ce type d'analyse pour construire des maquettes en laboratoire.

## 4 Bilan d'énergie

Pour arriver à une équation d'évolution de l'énergie cinétique, on peut prendre le produit scalaire de l'équation du mouvement (17) avec la vitesse  $\mathbf{v}$ . On utilise une forme particulière du terme d'advection :

$$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{v} = \mathbf{grad} \left( \frac{1}{2} v^2 \right) + \mathbf{rot} \mathbf{v} \times \mathbf{v} \quad (18)$$

Le premier terme fait apparaitre l'énergie cinétique massique  $v^2/2$ , le second est orthogonal à  $\mathbf{v}$  (comme il représente une rotation locale, il n'y a pas de changement de l'énergie cinétique). On néglige la viscosité, et on suppose que les forces en volume sont conservatives :

$$\mathbf{f}_v = -\rho \mathbf{grad} \phi$$

Où  $\phi$  est le potentiel associé à la force ( $gz$  pour la pesanteur). On arrive à :

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} v^2 \right) + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \left( \frac{1}{2} v^2 \right) = -\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} p - \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \phi$$

Comme le potentiel  $\phi$  ne dépend pas du temps, on a  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \phi = d\phi/dt$ . On obtient finalement

$$\rho \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} v^2 + \phi \right) = -\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} p \quad (19)$$

## 4.1 Fluide incompressible

Pour un fluide incompressible,  $\text{div } \mathbf{v} = 0$  et le terme de pression peut s'exprimer comme  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad } p = \text{div } (p\mathbf{v})$ . En intégrant l'équation (19) sur un volume matériel  $V$ , on obtient en utilisant (4) et le théorème flux-divergence :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V_m} \rho \left( \frac{1}{2} v^2 + \phi \right) d^3V = \iint_{\partial V} -\mathbf{v} \cdot p \hat{\mathbf{n}} d^2S \quad (20)$$

Le premier membre représente l'évolution de l'énergie totale (mécanique) contenue dans  $V$  : cinétique  $E_c$  et potentielle  $E_p = \rho\phi$ . Le deuxième membre est la puissance des forces de pression, intégrée sur la surface. On obtient donc une forme du théorème de l'énergie cinétique.

### 4.1.1 Bernouilli

En utilisant que  $\rho = \text{cste}$  pour une parcelle dans un fluide incompressible, l'équation (19) devient dans le cas d'un écoulement *stationnaire* ( $\partial_t = 0$ ) :

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \left[ \rho \left( \frac{1}{2} v^2 + \phi \right) + p \right] = 0$$

La quantité entre crochets est donc constante le long d'une ligne de courant (ou d'une trajectoire, l'écoulement étant stationnaire) :

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho\phi + p = B = \text{cste} \quad (21)$$

La quantité  $B$  est parfois appelée *fonction de Bernouilli*, elle est transportée par l'écoulement même dans le cas non-stationnaire.

## 4.2 Fluide compressible

Dans le cas d'un fluide compressible, le terme de pression se met sous la forme :

$$-\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad } p = -\text{div } (p\mathbf{v}) + p \text{div } \mathbf{v}$$

D'autre part, le premier principe de la thermodynamique donne pour une transformation quelconque

$$(\rho\delta V) dI = \delta W + \delta Q = -p d(\delta V) + \delta Q$$

où  $I$  est l'énergie interne du fluide (par unité de masse),  $\delta W$  le travail des forces de pression et  $\delta Q$  un apport de chaleur. En utilisant que  $\text{div } \mathbf{v}$  est aussi le taux de dilatation volumique, on obtient que

$$-p \text{div } \mathbf{v} = \rho \frac{1}{\rho\delta V} \left( -p \frac{d}{dt} \delta V \right) = \rho \left( \frac{dI}{dt} - \dot{q} \right)$$

où  $\dot{q}$  est le taux de chauffage diabatique par unité de masse (en W/kg). L'équation de bilan de l'énergie devient alors

$$\rho \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} v^2 + \phi \right) = -\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} p = -\text{div}(p\mathbf{v}) - \rho \left( \frac{dI}{dt} - \dot{q} \right)$$

soit en intégrant sur un volume matériel :

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho \left( \frac{1}{2} v^2 + \phi + I \right) d^3V = \iint_{\partial V} -\mathbf{v} \cdot p\hat{\mathbf{n}} d^2S + \iiint_V \dot{q} d^3V \quad (22)$$

En comparant avec l'équation (20) pour un fluide incompressible, on voit qu'on rajoute des échanges entre énergie mécanique et énergie interne, via la compression ou dilatation du fluide (travail des forces de pression, à ne pas confondre avec le travail de ces forces en surface du volume qui est lié à des différences spatiales de pression). L'énergie conservée (dans le cas adiabatique) est alors l'énergie totale  $E_c + E_p + I$ . Dans le cas incompressible, les bilans d'énergie interne et mécanique sont découplés.

### 4.3 Fluide visqueux

En présence de contraintes visqueuses, se rajoute au deuxième membre de (19) un terme de la forme

$$\eta \mathbf{v} \cdot \Delta \mathbf{v}$$

En intégrant par parties, puis en faisant la somme sur un volume matériel  $V$ , on peut décomposer ce terme visqueux en 2 parties :

- Un terme de surface égal à

$$\iint_{\partial V} \mathbf{v} \cdot \mathbf{T}_{\text{visc}} d^2S$$

qui représente la puissance des contraintes visqueuses à la surface du volume.

- Un terme en volume qui peut s'écrire

$$\iiint_V -\eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)^2 d^3V$$

Ce terme est toujours négatif, et représente une dissipation d'énergie sous l'effet de la viscosité, qui tend à homogénéiser les vitesses dans l'écoulement (sans changement de la quantité de mouvement intégrée). Cette énergie dissipée se retrouve sous forme de chaleur (chauffage local).

### 4.4 point de vue Eulérien

On a vu que l'équation d'évolution de l'énergie d'une parcelle se met en général sous la forme :

$$\rho \frac{dE_{\text{tot}}}{dt} + \text{div}(p\mathbf{v}) = 0$$

où peuvent s'ajouter des termes diabatiques ou visqueux.  $E_{\text{tot}}$  est l'énergie totale *massique* pour le type d'écoulement considéré (incluant ou pas l'énergie interne). En prenant la forme Eulérienne, l'équation devient

$$\rho \frac{\partial E_{\text{tot}}}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} E_{\text{tot}} + \text{div}(p\mathbf{v}) = 0$$

D'autre part, l'équation de continuité (19) s'écrit, en multipliant par l'énergie  $E_{\text{tot}}$  :

$$E_{\text{tot}} \frac{\partial \rho}{\partial t} + E_{\text{tot}} \text{div}(\rho\mathbf{v}) = 0$$

En additionnant les 2 dernières équations, on obtient

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho E_{\text{tot}}) + \text{div}(\rho E_{\text{tot}} \mathbf{v} + p\mathbf{v}) = 0 \quad (23)$$

L'évolution locale de l'énergie totale s'écrit donc comme la divergence d'un flux, composé du flux d'énergie auquel s'ajoute un terme de pression. En intégrant sur un volume géométrique, il vient

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V_g} \rho E_{\text{tot}} d^3V = - \iint_{\partial V} \rho E_{\text{tot}} \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} + p\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} d^2S \quad (24)$$

Par rapport à une équation comme (20) pour un volume matériel, s'ajoute un flux d'énergie par entrainement de matière à travers les bords du volume.

Dans le cas d'un volume – matériel ou géométrique – limité par des parois solides, les termes de flux en surface s'annulent, ainsi que la puissance des forces de pression (pas de vitesse orthogonale à la paroi). On a alors en l'absence de termes diabatiques ou visqueux *conservation de l'énergie totale* sur le volume considéré. On parle dans ce cas d'*invariant intégral* par opposition à un invariant local conservé par une parcelle (par exemple  $\rho$ ).