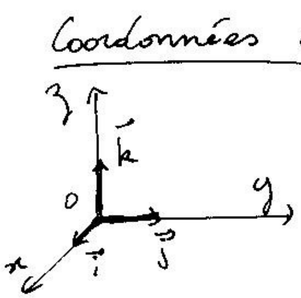
L'opérateur $\vec{\nabla}$ en coordonnées cartésiennes dans un espace réel à 3 dimensions

<u>Coordonnées cartésiennes</u> : dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$



tout vecteur $\vec{V}$ se définit par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z) avec : $\boxed{\vec{V} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}$.

<u>Produit scalaire</u> : soit deux vecteurs $\vec{V}_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{V}_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}$$

→ comme son nom l'indique, c'est un scalaire !

$\Rightarrow \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = 0 \iff \vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ sont orthogonaux

<u>Norme d'un vecteur</u> : $\|\vec{V}\| = \sqrt{\vec{V} \cdot \vec{V}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

<u>Produit vectoriel</u> : noté "$\wedge$" ou "$\times$" dans les livres.

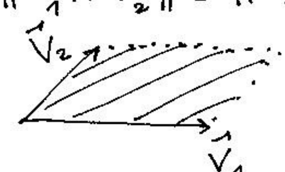
$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ z_1 x_2 - x_1 z_2 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{matrix}$$

← c'est le "produit en croix" des deux lignes suivantes.

C'est un <u>vecteur</u>.

$\|\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2\| = \|\vec{V}_1\| \times \|\vec{V}_2\| \times \sin(\widehat{\vec{V}_1, \vec{V}_2})$ → aire du parallélogramme formé par les vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$.



Donc : $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \vec{0} \iff \vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ sont colinéai

<u>Opérateur $\vec{\nabla}$ ("nabla")</u> : noté aussi "∇" dans les livres.

se manipule comme un vecteur, sauf que ses coordonnées ne sont pas des scalaires mais des opérateurs "dérivée". (très pratique pour les notations) :

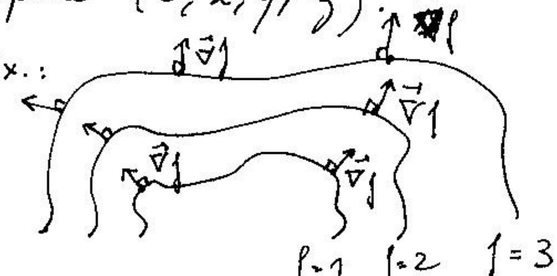
$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

On note aussi les dérivées partielles $\frac{\partial}{\partial x} = \partial_x$, $\frac{\partial}{\partial y} = \partial_y$, $\frac{\partial}{\partial z} = \partial_z$.

__Gradient d'une fonction scalaire :__ $\vec{\nabla} f$ (on note aussi $\vec{\text{grad}}\, f$ dans certains livres) pour f = fonction scalaire (càd à 1 dimension) dans l'espace (O, x, y, z).

$$\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \\ \partial_z f \end{pmatrix}$$

Ex. :



Quand on suit les lignes de $f = c^{te}$ dans l'espace, $\vec{\nabla} f$ est le vecteur orthogonal à ces lignes en tout point dirigé vers les valeurs croissantes. __NB__ : c'est un __vecteur__ !

__Champ de vecteurs :__ se définit par un vecteur différent en chaque point de l'espace. Ex : vitesse dans un écoulement fluide :

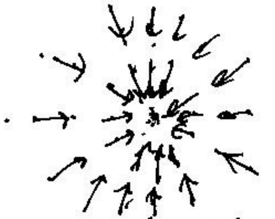
$$\vec{V} \begin{pmatrix} u(x,y,z,t) \\ v(x,y,z,t) \\ w(x,y,z,t) \end{pmatrix} \qquad \vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$$

↳ dépend de l'espace (x,y,z) et du temps $(t$

__Divergence d'un champ de vecteurs :__ $\vec{\nabla} \cdot \vec{V}$ (noté aussi "div

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad \left(= \partial_x u + \partial_y v + \partial_z w \right).$$

NB : C'est une fonction __scalaire__.



Ex. d'un champ purement divergent (en 2D) : on "sent" que dans l'écoulement ci-contre, il y a forcément un "puits" au centre de l'écoulement (= perte de masse).

Dans l'océan, l'écoulement est incompressible et globalement sans puits ni source $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0}$.

Rotationnel d'un champ de vecteurs : $\vec{\nabla} \wedge \vec{V}$ (ou "$\vec{\text{rot}}\,\vec{V}$")

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_z v - \partial_y u \\ \partial_z u - \partial_x w \\ \partial_x v - \partial_y u \end{pmatrix}$$

NB : On obtient un <u>champ de vecteurs.</u>

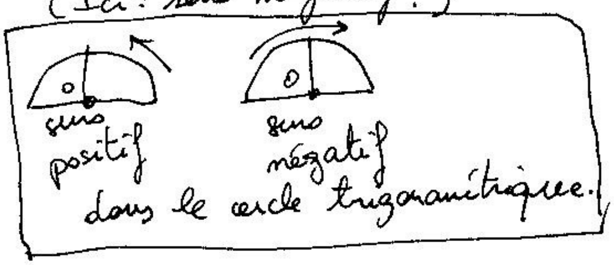
c'est la composante "tournante" d'un champ de vecteurs.

Ex :

un champ en rotation pure :

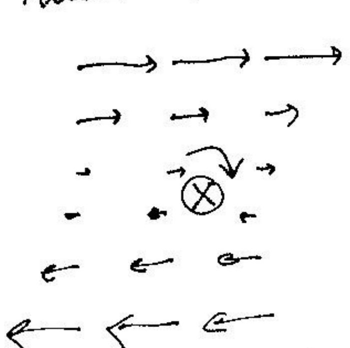
le signe de $\vec{\nabla} \wedge \vec{V}$ au point P est donné par le sens dans lequel tournerait une petite roue fixée en P plongée dans l'écoulement.

(Ici : sens négatif !)



La norme de $\vec{\nabla} \wedge \vec{V}$ est donnée par la vitesse à laquelle tournerait la roue.

Autre ex :



Ici, bien que tous les vecteurs vitesses soient parallèles, il y a quand-même un rotationnel non nul.

Dernière notion mathématique importante : la dérivée.

- En math, $\dfrac{df}{dx} = \lim\limits_{dx \to 0} \dfrac{f(x+dx) - f(x)}{dx}$

- En physique, $\dfrac{df}{dx} = \dfrac{\delta f}{\delta x}$ pour des variations de f et x suffisamment petites....