Pistes pour un programme collaboratif TEF / Gains *

29 décembre 2006

Les notes de relecture seront dans cette couleur ; histoire de voir, en Février 2006, quel chemin a été parcouru et quel chemin il reste.

Approche pragmatique

attention, c'est d'abord rapidement formulé, voir ensuite des détails à chaque fois en suppléments : ¶

- dans l'exploitation de Vizu pour la détermination des pôles ;
- pour préciser / comprendre comment se forment ces éléments de la dynamique au cours de l'élimination emboîtée ;
- pour étendre l'usage du SLT au cadre non-linéaire.

Devant l'enthousiasme (sic) obtenu par les premières diffusion du brouillon, peut-on considérer que ces notes pourraient préparer une partie du Zircon 2003 ? d'où pourraient sortir une liste de problèmes, conjectures, pistes à explorer, exercices à construire sous mini-ker, collègues à interpeller ... bref, renforcer les liens de la secte par un programme de collaboration (possiblement financé par l'INSUe [1] ?

0.1 Vizu-Pb

Sous Zeus©, on tente de déterminer les pôles d'une fonction de couplage (soit $C(\tau)$ la fonction cherchée). si on considère une matrice "déployant" ce pôle, on a une relation qui lie les pôles de C aux éléments de la matrice déployée. soit

$$\mathcal{Z} = \begin{bmatrix} A & B \\ c & d \end{bmatrix} \tag{1}$$

*All, texte de Mai 2003

[1] avec ce doute que « l'insu que sait, de l'une bévue, s'aile à mourre » *c'était bien vu, car ce Grand projet à la Française a évidemment capoté ! un gramd merci à l'État et au projet de Lisbonne.*

cette matrice (τ).

$$C(\tau) = d - cA^{-1}B \tag{2}$$

la fonction n'est autre que le déterminant de la matrice

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} I & A^{-1}B \\ 0 & d - cA^{-1}B \end{bmatrix} \tag{3}$$

on a donc $det(R) = \frac{det(Z)}{det(A)}$, autrement dit, les pôles de C doivent se retrouver parmi : 1) les racines de A ; 2) les pôles de c et B.

On a ainsi moyen de séparer la recherche de pôles multiples trop proches etc.

... quittes à vérifier que la fonction résultant de ces éléments définis est en accord avec $C(\tau)$. Ça fournit également le moyen d'identifier une partie du système responsable d'un pôle (StépH a un exemple).

0.2 Lien avec la recherche des éléments propres du système dynamique sous forme d'équations d'état.

Symboliquement :

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} A & B \\ C^{\dagger} & D \end{bmatrix} \tag{4}$$

Attention, ici, $\mathcal{A}$ n'est pas la matrice du TEF, que l'on notera ici $\mathcal{A}_\lambda = \lambda I - A$, avec $\lambda = 1/\tau$, ou τ est la variable de Borel[1]. On notera :

$$\mathcal{M}_\lambda = \begin{bmatrix} A_\lambda & B \\ C^{\dagger} & D \end{bmatrix} \tag{5}$$

forme état :

$$\mathcal{S} = \begin{bmatrix} A - BD^{-1}C^{\dagger} & 0 \\ D^{-1}C^{\dagger} & I \end{bmatrix} \tag{6}$$

forme correspondante avec les matrices du TEF :

$$\mathcal{S}_\lambda = \begin{bmatrix} A_\lambda - BD^{-1}C^{\dagger} & 0 \\ D^{-1}C^{\dagger} & I \end{bmatrix} \tag{7}$$

après emboîtement :

$$\mathcal{T}_\lambda = \begin{bmatrix} I & A_\lambda^{-1}B \\ 0 & D - C^{\dagger}A_\lambda^{-1}B \end{bmatrix} \tag{8}$$

les V.P. sont racines du polynôme caractéristique de S c'est-à-dire $det(S_\lambda)$:

$$\begin{aligned} det(S_\lambda) &= det(M_\lambda)/det(D) \\ det(T_\lambda) &= det(M)/det(A_\lambda) \\ &= det(S_\lambda)det(D)/det(A_\lambda) \end{aligned} \tag{9}$$

[1]on prend ainsi dans ce début de texte une forme modifiée des matrices du TEF, puisque, en réalité, $1/\lambda = \frac{\delta t}{2}$ multiplie les matrices A et B

Bref, il est possible de suivre la constitution des pôles de T à partir des racines de S.

¶ ce qu'il faut détailler, c'est la forme exacte des matrices A qui interviennent soit dans l'équation d'évolution, soit dans le système aux temps discrets.

On doit pouvoir dire que la version 101e de Mini-ker et le lien établi entre éléments propres et pôles du papier Effluents clos la question.

0.3 On considère une trajectoire de référence, issue d'un système non linéaire.

On étudie le SLT à cette trajectoire (!). Oui, ce qui précède est correct, car le SLT «circulant», cad calculé en chaque point de la trajectoire, est bien linéaire. En effet, les coefficients du SLT Circulant (SLTC) dépendent bien sûr du temps, et seulement du temps (pour les intervalles sans bifurcation). Dire que le système originel est non-linéaire est équivalent à dire que les coefficients de couplage qui nous intéressent sont dépendants du temps (non-autonomes). Ce qu'on étudie à partir du SLTC, c'est la perturbation à une trajectoire - c'est-à-dire en conservant les couplages déterminés par la trajectoire de référence.

Conséquence : on peut définir sur le SLTC la propagation d'une perturbation, avec classiquement la réponse :

$$x(T) = \Phi(T,0)x(0) + \int_0^T \Phi(T,t)B(t)y(t)dt \tag{10}$$

dans laquelle $x(t)$ est l'écart à la trajectoire d'une variable considérée, $y(t)$ la perturbation d'un forçage. Cette formule recèle une sémantique extrêmement riche, en particulier si on considère des réponses très différées à une perturbation initiale (T grand devant les Temps Caractéristiques T.C. les plus courts du SLTC), c'est-à-dire de la distribution des T.C. le long de la trajectoire. On s'attend en effet à ce que la réponse intégrée "efface" les réponses instables instantanées contredites par l'expression subséquente des non-linéarités. La clé est dans Φ ! Et aussi la question : comment déterminer le propagateur de la perturbation x ? On connait une réponse dans le cas du SLT discrétisé : en reprenant les notations du 0.2 (formule 6), le propagateur P du système est donné par une somme de produits matriciels de $(I+S)$:

$$P(N,i) = \prod_{k=N}^{N-i} I + S_k dt \tag{11}$$

(produit bien ordonné (éléments $S_j ... S_l$ tels que $j > l$). cette forme correspondant à une étude de stabilité de la trajectoire perturbée au point i.

Dans le cas d'une sensibilité paramétrique, on a en plus un produit de convolution par une Heaviside :

$$P(N,1) = \sum_{i=1}^{N} \prod_{k=N-i}^{N} I + S_k dt \tag{12}$$

en imposant initialement un saut de paramètre par exemple. Il suffit alors de procéder à une complémentation de Schür de la matrice P pour avoir le propagateur (fonction scalaire) recherché.

¶ c'est à ce point qu'il est nécessaire de préciser les formes explicites des matrices du système d'état en fonction de celles du TEF, car on a besoin des propriétés des formes matricielles de P, pour récupérer le plus simplement possible un propagateur scalaire désiré : quels produits de quelles matrices fournissent le plus directement possible un polynôme caractéristique etc. (Ah ! si on avait commutation entre l'opérateur de Schür et la combinaison des matrices dans le propagateur !)

attention, à expliciter ! - Ayant le propagateur, Il n'y a plus qu'à interpréter la forme discrète en Borel pour obtenir une caractérisation dynamique du système non linéaire (!). On n'a plus qu'à chercher les racines du polynôme caractéristique $c(\lambda)$ extrait du propagateur en balayant $P_\lambda(N,1)$ en λ, ce qui implique un balayage tout le long de la trajectoire de référence. Si cela est sensé, c'est pas complètement inintéressant, l'est-ce[1] ?

Pour finir sur une manière pragmatique d'amorcer la méthode, on propose un exercice plus abordable peut-être, consistant à définir un transfert de moyenne mobile sur un intervalle ΔT pour voir si on efface bien les réponses les plus rapides. C'est pas trivial, car il s'agit quand même de traiter simultanément N pas de temps ... Un premier exercice consisterait à faire la moyenne sur un cycle de $c(t,\tau)$, qui pourrait fournir une borne supérieure aux instabilités (cf 1.3). On retrouve un problème de même nature que ce qui justifierait l'approche pragmatique de JLD & PF.

1 Formes explicites des Matrices

1.1 Système continu

On étudie une équation d'état avec un forçage y(t) :

$$\partial_t x(t) = A(t)x(t) + B(t)y(t) \tag{13}$$

pour ce système linéaire, la solution générale est :

$$x(t) = \Phi(t,0)x(0) + \int_0^t \Phi(t,\tau)B(\tau)y(\tau)d\tau \tag{14}$$

[1] On a depuis Octobre 2006 cet exercice dans le papier Lotka-Volterra.

où le propagateur[1] $\Phi(t,\tau)$ vérifie :

$$\partial_t \Phi(t,\tau) = A(t)\Phi(t,\tau); \qquad \Phi(t,t) = I; \tag{15}$$

Ainsi, pour le TEF, où l'équation d'état est :

$$\partial_t \eta = G(\eta,\varphi) \tag{16}$$

si on considère d'abord que φ est un forçage (source, commande ou paramètre), la matrice A est simplement $\overline{\overline{\partial_1 G}}(\eta)$. C'est elle qui définit donc complètement le propagateur du système.

On peut vérifier que lorsque $A(t)$ commute avec $A(t')$ pour tous t et t' de l'intervalle $\{0,T\}$ [2], le propagateur s'écrit :

$$\Phi(T,0) = \exp(\int_0^T \overline{\overline{\partial_1 G}}(t)dt) \tag{17}$$

On ne connait pas de solution générale au problème (15) ; (Voir cependant la solution générique dans le papier SLTC).

Pour une trajectoire perturbée, on garde les mêmes matrices de couplage, et on considère les perturbations de la trajectoire provoquées par $\Delta\varphi$ (et éventuellement $\Delta\eta(t=0)$) :

$$\partial_t\,(\eta + \Delta\eta) = G(\eta + \Delta\eta, \varphi + \Delta\varphi) \tag{18}$$

qui conduit au système perturbé :

$$\partial_t\,(\eta + \Delta\eta) = G_{ref}(\eta,\varphi) + \overline{\overline{\partial_1 G}}\,\Delta\eta + \overline{\overline{\partial_2 G}}\,\Delta\varphi \tag{19}$$

$G_{ref}(\eta,\varphi)$ garde ses valeurs le long de la trajectoire de référence $(\mathcal{T}_r)$, tout comme les matrices jacobiennes. En soustrayant de (19) la forme non perturbée (16), on obtient l'équation d'évolution des écarts à $\mathcal{T}_r$:

$$\boxed{\partial_t\,\Delta\eta = \overline{\overline{\partial_1 G}}\,\Delta\eta + \overline{\overline{\partial_2 G}}\,\Delta\varphi} \tag{20}$$

qui définit le SLTC. On obtient ainsi une forme semblable au TEF classique (aux variations temporelles), avec des différences :

1. G_{ref}, l'analogue à G_0, n'intervient pas ;
2. $\Delta\eta(t=0)$ n'est éventuellement pas nul.

[1]également appelé «flot» sous forme fonctionnelle en mécanique, ou matrice de transition d'état

[2]sauf erreur, il suffit que $A(t')$ commute avec $\int_0^t A(\tau)d\tau$. Noter aussi que ce $\overline{\overline{\partial_1 G}}(t)$ est moins simple en général que celui de la forme TEF, c'est-à-dire avec φ transfert et non seulement forçage.

$\overline{\overline{\partial_1 G}}(t)$ est donc aussi le propagateur le long du SLTC au voisinage d'un point. Autrement dit, **le SLTC se définit comme un SLT paramétré par le temps**.

Histoire de faire des liens avec d'autres marottes de la secte, on peut remarquer que (20) s'obtient directement en appliquant au système (16) une différenciation de Gâteaux ($\mathcal{D}$) :

$$\mathcal{D} \rightarrow \frac{\partial}{\partial \epsilon} \langle \, \partial_t(\eta + \epsilon \Delta\eta) = G(\eta + \epsilon\Delta\eta, \varphi + \epsilon\Delta\varphi) \tag{21}$$

qui donne (20).

En l'absence de solution générale au problème continu, on n'a plus qu'à passer au discret [1].

1.2 Système aux temps discrets

Cette fois-ci, le système aux états est définit par :

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)y(k) \tag{22}$$

Le propagateur est alors :

$$P(k,0) = \prod_{i=k}^{0} A(i) \tag{23}$$

Si on prend maintenant la forme intégrée du système (16) à la TEF, on a :

$$\left[1 - \frac{\delta t}{2}\overline{\overline{\partial_1 G}}\right] \delta\eta(t_k) \overset{2}{\simeq} \delta t G_0 \; + \; \frac{\delta t}{2}\overline{\overline{\partial_2 G}}\,\delta\varphi(t_k) \tag{24}$$

C'est la résolution de ce système qui fournit $\mathcal{T}_r$ point par point.

De même, l'intégration par pas de temps successifs de (20) fournit la trajectoire perturbée. Le problème est de trouver une solution, connaissant $A(t_k)$ aux points successifs de $\mathcal{T}_r$. Sur chaque incrément temporel, le propagateur est $\exp(\overline{\overline{\partial_1 G}}_k\,\delta t_k)$, d'où la perturbation au temps $t_{k+1} = t_k + \delta t_k$:

$$\Delta\eta_{k+1} = \exp\left(\delta t_k \, \overline{\overline{\partial_1 G}}_k \, \Delta\eta_k\right) + ... \tag{25}$$

on peut consulter /zoom/TexDoc/celproc/celproc2.ps et vérifier qu'une approximation de Padé à l'ordre 2 de l'exponentielle donne en effet les équations en $\frac{\delta t}{2}$ de la formulation discrète (24) du TEF. Pour ce qui nous importe ici, le propagateur de perturbation cherché entre deux points j et k est donc[2] :

$$\boxed{P(k,j) = \prod_{i=k}^{k-j} \exp \delta t_i \overline{\overline{\partial_1 G}}_i} \tag{26}$$

[1] voir quand même le papier SLTC, qui présente une forme abstraite de cette solution générale.

[2] comme précédemment dans le cas continu, le produit ne rentre en somme en exposant que si commutation ; JYG dixit pour les fans, c'est toute l'histoire des graphes de Feynman ...

Le polynôme caractéristique du SLTC analysé entre t_j et t_k est ainsi le déterminant de :

$$\lambda I - \prod_{i=k}^{k-j} \exp \delta t_i \overline{\overline{\partial_1 G}}_i \tag{27}$$

Le problème est de savoir s'il est nécessaire de construire le propagateur à partir des matrices A_i complètes du système, ou si l'on peut avoir accès plus simplement à un propagateur réduit à un sous-ensemble de variables d'état sélectionnées pour l'analyse (voire une seule). On pourra ensuite passer au problème dérivé du cas d'un traitement avec les matrices du **Ker** de TEF-ZOOM. On a donc besoin de propriétés du déterminant de matrices décomposées en produits LU, comme ci-dessus dans (3), mais aussi de quelques autres (malheureusement). Si on bute sur une impossibilité, il faudra trouver des approximations, sachant par exemple que le spectre de $\{\delta t_i \overline{\overline{\partial_1 G}}_i\ \}$ reste de module inférieur à 1. En attendant, on pourrait déjà valider numériquement ces résultats affriolants avec le mini-ker.

• Qui propose un exercice à traiter ? La mise en place d'exercices permettra de vérifier les développements formels au fur et à mesure qu'ils se présenteront (Lorenz 3D, un exo d'économie avec Hopf et SH (6D), Lotka-Voltera 2D, déjà très étudié par JLJ ?).

Le lien entre propagateur, sensibilité aux transferts et ainsi au gain de rétroaction est résolu et validé avec Mini-ker sur Lorenz et Lotka-Volterra.

1.3 Analyse directe du déterminant

• *suite au jeudi 15/05/2003 après discussion JYG SH*

A la suggestion de Jean-Yves, il apparaît que le problème peut se formuler directement en partant des équations d'évolution du wronskien. Ce machin n'est autre que le déterminant du propagateur d'un système linéaire (il faut voir Arnold pp 190ss, dixit JYG). Un théorème dû à Liouville dit que si W est ce déterminant, alors :

$$\partial_t W = Tr(S)\, W \tag{28}$$

Cette fois-ci, on a un propagateur scalaire :

$$\phi(T, 0) = \exp(\int_0^T Tr[A(t)] dt\,) \tag{29}$$

En dehors de la relation à leurs semblables, on a malheureusement peu de transformations des matrices conservant leur trace, ni de méthode pour en déterminer les changements. Pire, une méthode classique pour suivre les traces est de considérer le terme d'ordre $(n-1)$ du polynôme caractéristique (n étant l'ordre de A) ! Mais conceptuellement, ça jette quelque lueur sur la manière dont se combinent les valeurs propres dans les transformations. La somme des v.p. est ainsi $Tr[A - BD^{-1}C^{\dagger}]$, et donc la somme des traces de ces deux matrices. La première A, est pour les cas les plus courants de nos processeurs de cellules, une somme d'inverse de temps caractéristiques élémentaires de cellules. On peut analyser la contribution de la deuxième $BD^{-1}C^\dagger]$ en isolant chaque cellule des autres pour obtenir un temps caractéristique local, comme décrit dans /zoom/TexDoc/celproc/celproc2.ps . Et finalement, le passage au terme complet montre comment se construit une v.p. Idéalement, il faudrait passer à la $Tr[D - C^\dagger A^{-1}B]$. Lorsque l'on emboite à la TEF :

$$\mathcal{M}_\lambda = \begin{bmatrix} A_\lambda & B \\ C^\dagger & D \end{bmatrix} \quad = \quad \begin{bmatrix} I & 0 \\ C^\dagger A_\lambda^{-1} & I \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D - C^\dagger A_\lambda^{-1} B \end{bmatrix} \tag{30}$$

la trace qui importe est en facteur de $-\lambda^{n-1}$ du polynôme caractéristique : $det[\mathcal{S}_\lambda]$, et va donc dépendre de la triangulaire à gauche. Il semble ainsi que l'examen wronskien du problème amène à calculer numériquement cette trace dans ZOOM. C'est une possibilité à explorer[1].

Ce qui interpelle du wronskien, c'est cette relation purement scalaire recelant **toute** la dynamique du système[2]. Mais en réalité, il ne s'agit que du passage d'un système de dimension n à un problème de même ordre, qui est le degré du polynôme. Quand même, on va chercher aussi une fonction scalaire $c(\lambda)$, mais on prétend qu'elle donne la même dynamique du système, mais cette fois, **caractéristique d'un de ses éléments**. Étant donné que l'on a : $det[D]\,det[S_\lambda] = det[M_\lambda] = det[A]\,det[D - C^\dagger A_\lambda^{-1}B]$ et que $det[D]$ ne dépend (en principe) pas de λ, les v.v. doivent annuler $det[A]$ sans rendre $det[D - C^\dagger A_\lambda^{-1}B]$ infini ou réciproquement ! Juste pour faire entendre qu'on a l'impression qu'en tirant un peu sur la matrice, tout cela devrait pouvoir s'éclaircir. (On pourra se contenter d'un premier ordre avec $\Phi = I + dt \sum_i A_i)$[3].

Évoquons pour finir le passage au produit des matrices de base pour avoir ce propagateur P et finalement $det[\lambda I - P]$. Difficile de suivre la combinaison des traces dans chaque produit, alors que l'on part des polynômes caractéristiques élémentaires. On va retrouver la somme des traces en facteur de λ^{2n-1}. Vu en détail, le produit des matrices de transition fait apparaître des produits scalaires de Vecteurs Propres qui peuvent tourner le long de $\mathcal{T}_r$, c'est-à-dire que le produit des traces fournira une borne supérieure à la trace du produit (pour valider la remarque du 0.3).

Un autre aspect troublant du wronskien, c'est qu'il semble effacer les vecteurs propres (ou singuliers) en focalisant sur les valeurs propres par la trace (on rappelle que $Tr[A]$ est la somme des valeurs propres de A). Mais du point de vue numérique, avec les spectres limités que l'on a, rien n'empêche « d'itérer Liouville », c'est-à-dire de développer les produit des déterminants de $\mathcal{S}_\lambda = [\lambda I - \mathcal{S}]$ en s'arrêtant aux termes de trace ? **(à faire donc)**

- lien avec l'exposant de Lyapunov.

[1] *C'est fait systématiquement dans la 101e de Miniker.*

[2] mais qualitativement à compléter par les vecteurs propres locaux ...

[3] voir l'intérêt de lier dt_i à min des v.p. locales

Le wronskien mesure la compression du volume de l'espace des phases séparant les trajectoires (perturbée et non-perturbée = hyper-distance). Comme le ferait remarquer SH, il est bien connu que la trace du propagateur de ce volume caractérise cette compression. Mais ça ne dit pas bien sûr grand chose sur la forme que prend ce volume déformé. Cette remarque répond ainsi à la question de l'évacuation des vecteurs propres.

On peut aussi voir dans (28) la justification de la définition de l'exposant de Lyapunov :

$$\Lambda = \frac{1}{t}\int_{t_0}^{t} \ln \frac{\Delta x(t_0,t)}{\Delta x(t_0)} dt \tag{31}$$

que JLJ écrit ainsi :

$$\Lambda = \frac{1}{t}\int_{0}^{t} \ln(Tr[A(t)]\,)\, dt \tag{32}$$

qui se justifie de (29). Bref, tout cela se tient bien.

1.4 A propos de moyenne mobile

(encore en friche)

Si ça tente quelqu'un, il s'agit de formaliser le fait que l'information que l'on cherche des couplages d'un système possède sa propre échelle temporelle (à mettre en // avec le papier gains sur champs et échelles spatiales), indépendante à la fois des constantes de temps du système et en particulier de l'incrément numérique. En pratique, comment éviter de traiter cette vision par calcul simultané de n pas de temps ?

• pistes :

- cycle limite et théorie de Floquet. La théorie de Floquet est en pleine recrudescence (en RMN par exemple) ; elle permet de récupérer des propagateurs autonomes moyens (au premier ordre ou supérieur, avec un coût fortement croissant) à partir de systèmes périodiques. Mais les techniques ont pour but de construire le système moyenné, pas de moyenner numériquement le système originel. Il y aurait donc une réinterprètation à faire. *Voir encore le papier Effluents, qui traite de Floquet et des gains. Pas encore de traitement dans Mini-ker, A FAIRE*[1].

- traiter un système moyen avec un système additionnel stochastique (hypothèses sur le "bruit" = périodique (→Floquet), ...) filtrage non-linéaire ;

- identification d'un "système linéaire moyen" (filtre de Kalman ou min Q^2 pour détection ?) en analogie avec Lyapunov *Grâce a Pat, on a un premier filtre de Kalamn dans Mini-ker, il manque encore un appropriation par l'unsecte A FAIRE.*

(on se donne quand même le droit d'invoquer le système adjoint ?)

... ne pas hésiter à brainstormer à ce stade ...

[1] cf stage Céline et premiers papiers de fin 2006.

En ce qui concerne la moyenne glissante temporelle, il semble aujourd'hui difficile de traouver une autre solution que de passer par un adjoint va-et-vient Pb OUVERT.

1.5 A propos de SLTC

On peut sans attendre les réponses envisager les applications du traitement du SLTC en mode direct.

• *Signification des éléments du TEF en SLTC*

En partant du système décrivant le SLTC (20), on a sous Zeus©[1] par exemple :

$$(1-g)\Delta\varphi = \Delta\varphi_{ins} \tag{33}$$

en un point de la trajectoire. Ici, $\Delta\varphi_{ins}$ n'hérite pas de sommes de $C^{\dagger}A^{-1}\Gamma$ puisque tous les Γ sont nuls.

Que ce passe-t-il si on perturbe $\Delta\varphi_{ins}$ par un step à t_0 ? Pendant le pas de temps du SLT local, la perturbation se propage à toutes les variables, et l'impact sur la variable φ est $\Delta\varphi$. A la fin du pas de temps, toutes les variables sont perturbées, si bien qu'à l'incrément suivant, φ va récupérer l'effet de toutes les autres perturbations, c'est-à-dire des $C^{\dagger}A^{-1}\Gamma$. Mais du point de vue du SLTC, on aura pris le gain correspondant à ce deuxième pas de temps, qui prend en compte la réaction des autres variables à $\Delta\varphi(t_0+\delta t)$. Il semble ainsi que l'on puisse propager des gains au sens du SLTC.

1.5.1 Dénouement à un fil

Pour dire que l'on va considérer l'analyse classique correspondant à isoler une seule variable scalaire sous Zeus©. Il apparait que dans ce cas on peut dire des choses strictes.

- La fonction de gain se présente comme une fraction polynômiale propre, c'est-à-dire :
  - degré du numérateur au plus égal à celui du dénominateur ;
  - degré de dénominateur au plus égal à n (n étant l'ordre du système)
- Cette fonction est la réponse à une perturbation impulsionnelle unité.

Pour changer, on va travailler "près du terrain", en examinant la trajectoire de référence suivie par le système TEF discrétisé. Le SLT en un point est ainsi déterminé par :

$$\begin{array}{ll} \Delta\eta(k+1) & = A\Delta\eta(k) + b\Delta\varphi(k) \\ \Delta\varphi(k) & = c^{\dagger}\Delta\eta + u(k) \end{array} \tag{34}$$

avec η vecteur, φ scalaire, A matrice carrée, $c^{\dagger}$ ligne et b colonne. Pour simplifier, on a éliminé les transferts autres que φ ; on a aussi "préparé" une loi de commande (une perturbation) $u(k)$ portant sur φ. Sur la trajectoire de référence, toutes les variables de (34) sont nulles.

[1] ceux que ça© énerve on qu'à se battre contre l'OMC

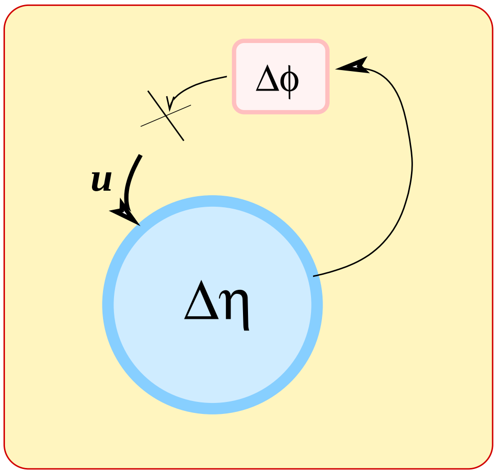

FIG. 1 – rétroaction coupée : $\Delta\varphi$ est remplacé par la commande u.

On garde $\Delta\varphi$ sous Zeus© et on coupe la boucle de rétroaction ; on peut donc appliquer $u(k)$ au système des cellules et récupérer sa réponse en $\Delta\varphi$. De ce point de vue, on se retrouve dans un cadre entrée / sortie, et donc la fonction de gain est liée à une fonction de transfert.

Sur un système discrétisé, on n'utilise pas Borel mais une transformée en z (Z-tr, ça marche pareil) :

$$\begin{array}{ll} z\Delta\eta(z) & = A\Delta\eta(z) + bu(z) \\ \Delta\varphi(z) & = c^\dagger\Delta\eta + u(z) \end{array} \tag{35}$$

l'élimination des cellules donne donc :

$$\Delta\varphi(z) = [1 + c^\dagger(zI - A)^{-1}b]\, u(z) \tag{36}$$

Dans l'inversion de $(zI - A)$, au dénominateur apparaît son déterminant, qui n'est autre que le polynôme caractéristique du système d'ordre n. Chaque élément de l'inverse sera une pondération par un polynôme de degré non supérieur à n de ce dénominateur, le tout ajouté à 1. On obtient bien une fraction polynômiale propre, ce qui démontre le premier point. La Z-tr de $u(k)$ impulsion unité est 1, ce qui démontre le deuxième point. (Ceci n'est pas vrai pour commande / effet non scalaires).

- Examinons trois applications directes.

On considère maintenant les grandeurs circulant le long d'une trajectoire déterminée point par point :

$$[1 - g(z;t)]\, \Delta\varphi(z;t) = \Delta\varphi_{ins}(z;t) \tag{37}$$

$x(z;t)$ est la z-transformée sur le SLT aux temps $t = t_0, t_1, t_2 ...$, et on retient par exemple (37) sous la forme :

$$\Delta\varphi(z;t) = h(z;t)\, \Delta\varphi_{ins}(z;t) \tag{38}$$

la notation explicite bien que le SLTC est un SLT **circulant**, c'est-à-dire paramétré par le temps. La fonction de transfert $h(z;t)$ est une fraction rationnelle de z dont les coefficients sont paramétrés par t.

On applique un step sur $\Delta\varphi_{ins}$ au temps t_0. L'expression $\frac{1}{T}\int_{t_0}^{T} h(z;t)\Delta t$ donne l'effet moyen d'une perturbation échelon appliquée en chaque instant. Au contraire, l'expression :

$$H(T,t_0)=\sum_{i=1}^{N}\prod_{k=N-i}^{N} h_k \tag{39}$$

fournit l'effet à T d'un échelon appliqué à l'instant initial. Ou encore :

$$H'(T,t_0)=\sum_{i=1}^{N}\prod_{k=N-i}^{N} \epsilon_k h_k \tag{40}$$

donne la sensibilité à une perturbation aléatoire $\epsilon(t)$. Autrement dit, on devrait avoir le droit de considérer $h(z;t)$ comme un propagateur au premier ordre (ou une fonction de transfert) et au sens du SLTC, c'est-à-dire en considérant que les réactions du système perturbé sont celles des éléments suivant la trajectoire de référence. Comme cela suggère donc que la complémentation de Schür commute au premier ordre avec la multiplication des matrices, il reste à l'expliciter !

Il y a bien sûr aussi la possibilité que je me plante complètement... Si on considère en un point initial le plan d'application de $u(0)$, pendant le pas de temps du premier SLT, le vecteur d'écart à la trajectoire se projette dans ce plan selon $\Delta\varphi$, à la précision du TEF. Mais ensuite, que dire de cette projection ? Au deuxième pas, on ré-injecte $\Delta\varphi$ dans u. Les écarts additionnels sur les autres variables du début de ce deuxième pas de temps vont aussi se projeter sur $\Delta\varphi$. Est-on en train de dire que ces effets sont d'un ordre plus élevé que les effets de u[1] ?

D'après l'argument des Vecteurs Propres pouvant tourner, a-t-on un sup ? Je suppose qu'il faut avoir en tête l'image du référentiel propre qui circule en se déformant le long de $\mathcal{T}_r$, genre torseur circulant. Bref, on aimerait avoir accès à un développement en temps des opérateurs le long du SLTC, ou une méthode numérique pour expliciter les déformations circulantes du tenseur.

[1][All 19 Nov. 04] *noter que la bonne manière de s'abstraire de la trajectoire perturbée est de passer par l'adjoint.*

• *Borel incomplète ?*

*D'une manière plus osée, on peut avoir le sentiment que l'on est en droit de prendre à la lettre l'intégrale de la transformée de Borel, c'est-à-dire***le long de la trajectoire**. *Dans ce cas, il faudrait considérer une pseudo-Borel incomplète, et voir ce que l'on peut faire comme hypothèse concernant les intégrales de la coupure t^* à l'infini, son impact sur la Borel inverse ($\to \tau^*$) et les lois de transformation*[1]

• *Étude d'une rétroaction hypothétique*

Cacuci montre comment étudier l'impact d'une loi de rétroaction appliquée à une trajectoire d'un modèle n'en ayant pas. Soit $A(\eta)$ cette loi, qui remplace un paramètre π. La $\mathcal{D}$ de Gâteaux s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial\epsilon}\langle\, \partial_t(\eta+\epsilon\Delta\eta) = G(\eta+\epsilon\Delta\eta, \varphi+\epsilon\Delta\pi+\epsilon A(\eta+\epsilon\Delta\eta)) \tag{41}$$

ce qui donne[2] :

$$\partial_t\, \Delta\eta_r = \overline{\overline{\partial_1 G}}\, \Delta\eta_r + \overline{\overline{\partial_2 G}}\, \Delta\pi_r + \overline{\overline{\partial_2 G}}\, A(\eta_{ref}) \tag{42}$$

ainsi, la réponse avec rétroaction de la trajectoire à une perturbation initiale, lorsqu'un paramètre π a été remplacé par une loi A est :

$$\Delta\eta_r(t) = \Phi(t,0)\, \Delta\eta(0) + \int_0^t \Phi(t,\tau)\, \overline{\overline{\partial_2 G}}(\tau)\, A[\eta_{ref}(\tau)] d\tau \tag{43}$$

avec le propagateur sur le SLTC :

$$\partial_t \Phi(t,\tau) = \overline{\overline{\partial_1 G}} + \Phi_r(t,\tau) \tag{44}$$

La variation nécessite seulement l'évaluation de la loi le long de la trajectoire de référence. il va sans dire que cette évaluation n'est précise que pour un faible impact de la loi, mais peut s'avérer qualitativement utile, voire pertinente.

On peut se poser la question des gain de rétroaction correspondant à cette nouvelle loi de rétroaction, ou de l'impact de ce changement du modèle sur ceux-ci. On peut en particulier comparer

---

[1][Al1 19 Nov. 04] *c'est à faire dans Mini-ker en entrant le gain dans une fonction de coût (cf PRL) ; on a aussi la tentative d'identifier le propagateur à celui d'un SLTC autonome pour aller de la coupure à l'infini, mais c'est pas glorieux pour l'instant : essais effectués dans* **predator**. *On a quand même réussi à calculer les exposants de Lyapunov (cf patch* **SLTCIRC***).On sait à présent calculer tous les Lyapunov dans un run de Mini-ker, cf exemple ZSTEER de Lorenz63.* ? C'est bien en tout cas la philosophie derrière l'exposant de Lyapunov, n'est-ce pas les Toulousains[3] ?

Après info sur le web, il semble que ce monsieur n'ait pas foutu les pieds à Toulouse ! Alors comment l'université a-t-elle publié une note en Français, ce serait bien que les Toulousains nous renseignent.

Sur le lien entre Lyapunov, gain non-L et Borel incomplète, voir la prépa a la PRL.

[2]Nov 2004 : partie récrite, en corrigeant une erreur, car il restait un terme en ϵ dans la formule (42)

• *Couplage et sensibilité*

On a le schéma 2 aujourd'hui classique correspondant à deux composantes sous Zeus©[1] ; pour le SLTC, il faut en plus définir les points d'application et de sonde. Et ainsi, blablablablabla.

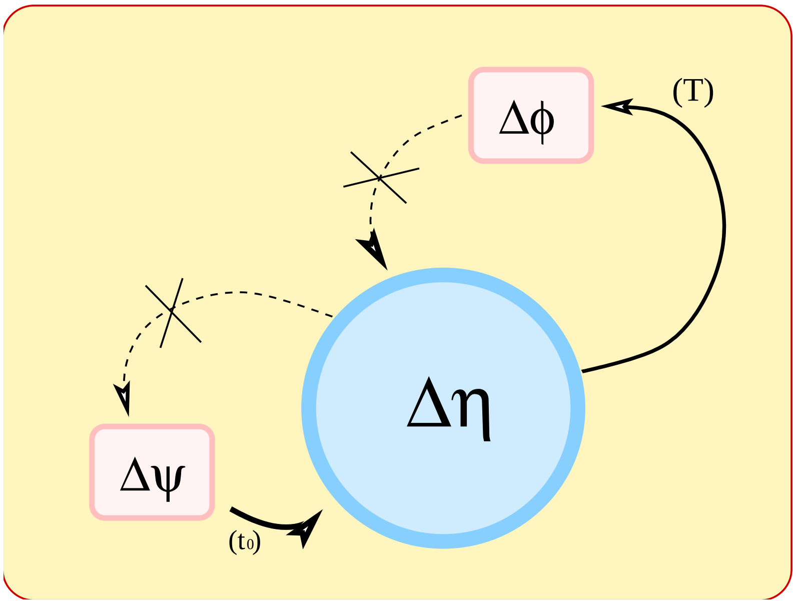

FIG. 2 – Couplage de ψ sur φ : deux coupures.

Menfin, personne ne s'est lancé là-dessus ? Pourtant, on a été si vite avec les gains que les sensibilités, voir les couplages, ne sauraient résister bien longtemps ! En tout cas, voilà encore un bel échec de l'unsecte.

[1]c'est la dernière fois, promis, parce que y en a vraiment marre