Analyse de la rétroaction vapeur d´eau dans un modèle de climat soumis à un forçage périodique

Pablo Garcia Ramos

Juin 2007

Un modèle de circulation générale atmosphérique (AGCM) est un modèle difficile à interpréter du fait de la quantité de variables qui sont définies et la difficulté des couplages complexes se produisant dans une gamme d'échelles spatio-temporelles très large. On se retrouve dans la nécessité de faire des modèles plus simplifiés pour comprendre les phénomènes physiques les plus importants vis à vis d'un processus comme celui du changement climatique. Le but de mon PPL est d´essayer de comprendre l'influence de la vapeur d´eau dans la dynamique de l´atmosphère en la supposant soumise à un forçage périodique saisonnier. Cette étude est réalisée avec un modèle mono-dimensionnel du climat établi par par Stéphane Hallegate pendant sa thèse (2003-2005). Son modèle original ayant été implémenté dans un logiciel différent que celui que j'ai utilisé, une partie de l'exercice a consisté à établir la cohérence entre les deux séries de résultats.

Stéphane a construit un modèle destiné à l'étude de la rétroaction vapeur d'eau en réponse à un doublement de CO2. Le modèle comprend trois couches, cinq variables d´état et 12 variables de transfert en utilisant le formalisme du TEF[1] pour la définition et résolution du problème dynamique. Le TEF est un formalisme qui nous permet de bien voir l'influence des variables de flux qui couplent les éléments du modèle, à savoir ici l'océan, la troposphère et la stratosphère. Cela est rendu possible en supprimant l'influence directe entre les variables d´état grâce à la définition des variables de flux qui rétablissent les couplages entre les différentes variables d´état.

De plus, pour voir l'influence de la vapeur d´eau dans ce modèle d´atmosphère simplifié, on a utilisé le concept de sensibilité, et de gain de rétroaction. Ce dernier concept introduit par Bode (1945) pour analyser les circuits électriques linéaires a été largement utilisé en climatologie depuis les années 70 (Bony et al. (2006); Hansen et al. (1984); Manabe and Wetherald (1967)). Mais ce concept jusqu'à présent a été utilisé uniquement dans le cas d´une atmosphère en équilibre (voir par exemple Hallegatte et al. (2006)) et on sait que l´atmosphère n'est jamais en équilibre. On a donc profité de la nouvelle implémentation du modèle pour analyser les effets dùs aux trajectoires non stationnaires du climat.

S'agissant d'un système périodique, on a ensuite utilisé la théorie de Floquet pour décomposer l'influence de la vapeur d´eau dans une atmosphère soumise au cycle saisonnier. Cette étude exploite ainsi la définition du Système Linéaire Tangent aux trajectoires en profitant de la théorie de Floquet, aujourd'hui abondament utilisée dans l'analyse de stabilité de nombreux systèmes physiques oscillants. On a alors mis œuvre les algorithmes décrits dans les deux rapports de stage de Céline Conrardy[2].

[1] Transfer Evolution Formalism, voire annexe.
[2] cf pages web de ZOOM.

1 Le modèle de Stéphane Hallegate

1.1 Description et hypothèses

On a un modèle à une seule dimension, première hypothèse simplificatrice qui supprime les aspects de circulation (perturbations synoptiques, vents) considérés ici comme phénomènes à temps caractéristiques rapides (typiquement la semaine). On considère ensuite trois couches : Océan, Troposphère, et Stratosphère. Le couplage de ces trois couches est fait par des équations de bilan de énergie en définissant les transferts d'énergie et de masse entre la Troposphère et l'Océan, entre les trois couches et l´espace (flux radiatifs courtes et grandes longueurs d'onde). Ces transferts sont définis de façon très simplifiée sauf pour les échanges radiatifs, car ils présentent des processus cruciaux pour la rétroaction vapeur d'eau. Pour simplifier les équations des transferts, les hypothèses simplificatrices on a été faites en utilisant des résultats de GCM et de faits connus sur le comportement moyen de l'atmosphère.

Surtout ces hypothèses prennent en compte la quasi impossibilité de modéliser la convection profonde et la couche limite océanique de manière simplifiée. Ainsi il y a une grande difficulté pour définir les échanges de chaleur et vapeur d´eau entre la Troposphère et l´Océan. Le modèle a retenu comme principales hypothèses :

- les effets de la convection sont implicitement définis par les gradients verticaux de température moyens ; en effet, il a été constaté dans les GCM que le rôle des phénomènes convectifs revient a tendre vers ces gradients "cibles" ;
- la couche de mélange océanique (CMO) a une épaisseur fixée ; son épaisseur est choisie en rapport avec une épaisseur moyenne sur quelques mois ;
- l'absorption du flux radiatif d´ondes courtes est fixé pour le Stratosphère (présence d'ozone) ; ses échanges avec la troposphère sont négligés (rôle de la tropopause) ;
- il y a trois couches nuageuses constantes dans la troposphère, fixées à 2000, 6000 et 14000 m qui interviennent à la fois dans le bilan de "shortwave" (SW) et de "longwave" (LW). On a la liberté de choisir les paramètres optiques de ces trois couches, mais on les choisit pour établir des flux moyens réalistes. Ces flux sont à l'origine du "moteur thermique" climatique ;
- les équations concernant la précipitation et l'évaporation sont les plus difficiles à construire, car elles doivent prendre en compte à la fois l'apport de vapeur d'eau dans la troposphère et l'effet moyen des précipitations sur le réchauffement troposphérique. Nous donnons à présent plus de détail sur ces deux modèles.

La précipitation est définie comme égale à l'évaporation plus un terme qui prends en compte l'excés d'humidité relative par rapport à une valeur moyenne d'équilibre égale a 0.7, constatée dans les résultats des GCM. En effet, avec les GCM, on peut voir que l'humidité relative reste, dans un délai de l'ordre de la semaine, en équilibre, toujours proche de 0.7 .

L'évaporation est la source de vapeur d'eau de la troposphère. Avec cette définition on ne prend pas en compte les fluctuations sur les temps courts et on garde une tendance globale. Cette évaporation est définie proportionnellement à une différence entre la quantité d´eau dans la couche saturante collée à l'océan et celle de la couche limite atmosphérique, partie basse de la troposphère où s'effectuent ces échanges jour après jour, avec des temps courts.

1.2 Analyse aux sensibilités

Dans notre étude on s´intéresse à la dynamique et surtout à l'évolution de notre système lorsque il est perturbé. De cette façon on peut nous étudier l'évolution du climat lorsque on perturbe la concentration de CO2. On a un système en équilibre et on perturbe soit les conditions initiales, soit via un forçage le long la trajectoire. On suppose que l'amplitude des perturbations est dans un "rayon de linéarité" et que SLTC nous donne alors cette réponse. On a donc un système linéaire de cette façon (hors TEF) :

$$\partial_t x(t) \quad = \quad A(t)\, x(t) + B(t)\, u(t) \tag{1}$$

Pour étudier les sensibilités de ce système on va utiliser le concept de propagateur. Le concept du propagateur nous permet d´introduire avec élégance le système des sensibilités. La définition du propagateur est donnée par :

$$x(T) = \Phi(T,0)x(0) + \int_0^T \Phi(T,t)B(t)u(t)dt \tag{2}$$

dans laquelle $x(t) = \Delta\eta(t)$ est l'écart à la trajectoire d'une variable considérée, $u(t)$ la perturbation d'un forçage ayant été appliqué pour trouver la trajectoire de référence $(\eta(t), t \in [0,T])$.

a. Sensibilité aux états

On considère l'effet d'une perturbation des seules Conditions Initiales (C.I.) $x(\tau)$, et même d'une seule composante $x_j(\tau)$. Alors

$$x(t) = \Phi(t,\tau)x(\tau) \tag{3}$$

où le vecteur $x(\tau)$ ne comporte qu'une composante non nulle. On voit donc que $x(t)$ est l'effet à t de cette perturbation de l'état $x_j(\tau)$, et ainsi que la j-ième colonne de Φ est le vecteur :

$$\frac{\Delta\eta(t)}{\Delta\eta_j(\tau)} = \mid \Phi(t,\tau)_j > \tag{4}$$

dans laquelle il faut interpréter le terme de gauche comme rapport de variations au sens de Gâteaux. On définit ainsi la sensibilité des états aux conditions initiales en $\tau = 0$ du j-ième état.

Si on suppose que Φ doit verifier :

$$\partial_t\Phi(t,\tau) = A(t)\Phi(t,\tau); \qquad \Phi(\tau,\tau) = I; \tag{5}$$

on voit que ce système,en prennant,(2), peut s'écrire colonne par colonne et s'identifie au système (1) lorsqu'on prend comme état initial des perturbations la j-ième colonne de la matrice identité (et B=0). On a donc construit l'équation d'évolution des sensibilités à un état initial, donné par une colonne $s_\eta(t,0)$ de $\Phi(t,0)$.

b. Sensibilité à la commande, considérée comme transfert exogène

La formule (2) suggère que la sensibilité au transfert scalaire $(u(t))$ est dépendante de la fonction, et pour le cas $u(t) = \varpi\Upsilon(t,0^+)$ (step initial), est une colonne s de l'intégrale :

$$s_\varphi(t,0) = \int_0^t \Phi_i(t,\tau)B(\tau)d\tau \tag{6}$$

Le système différentiel correspondant s'obtient par application de ∂t à (6) :

$$\partial t s_\varphi(t,0) = A(t)\int_0^t \Phi_i(t,\tau)B(\tau)d\tau + B(t) = A(t)s_\varphi(t,0) + B(t) \tag{7}$$

On obtient ainsi un système différent de celui des sensibilité aux états (s_η), mais qui s'intègre de manière semblable, à la source (B) près et aux C.I. nulles.

c. Sensibilités dans le TEF

Dans le TEF notre système a en plus des variables de transfert, ou variables de "Flux". On a vu que notre système linéarisé du TEF est :

$$\begin{bmatrix} \partial_t \cdot -A & -B \\ -C^\dagger & 1-D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\eta \\ \Delta\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^u u^\eta \\ D^u u^\varphi \end{bmatrix} \tag{8}$$

Suivant le même schéma que précédemment, reprenons l'équation (8) en remplaçant $\Delta\eta$ et $\Delta\varphi$ par $\Phi(t,\tau)$ et $\Psi(t,\tau)$, une matrice que l'on introduit *a priori* arbitrairement :

$$\begin{bmatrix} \partial_t \Phi \\ \Psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C^\dagger & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi \\ \Psi \end{bmatrix} (t,\tau) \tag{9}$$

On constate que l'élimination de Ψ fournit l'équation d'évolution classique du propagateur :

$$\partial_t \Phi(t,\tau) = [A + B(I-D)^{-1}C^\dagger](t)\,\Phi(t,\tau) \tag{10}$$

Le système (9) est donc, colonne par colonne, celui des sensibilités aux états. La matrice Ψ est donc définie par le système linéaire (9) :

$$\begin{cases} \partial_t \Phi(t,0) = A\Phi(t,0) + B\Psi(t,0) \\ \Psi(t,0) = C^\dagger \Phi(t,0) + D\Psi(t,0) \end{cases} \tag{11}$$

Dans (9,11), une j-ième colonne de Φ représente l'impact sur $\eta(t)$ d'une perturbation unité des C.I. en η_j. Comment interpréter Ψ ? Partant du résultat[1] :

$$\Delta\eta(t) = \Phi(t,\tau)\Delta\eta(\tau) + \int_\tau^t \Phi(t,s)B^u(s)u^\eta(s)ds \tag{12}$$

on veut aboutir au système (8) que l'on réécrit ainsi

$$\begin{bmatrix} \partial_t \Delta\eta \\ \Delta\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C^\dagger & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\eta \\ \Delta\varphi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B^u u^\eta \\ 0 \end{bmatrix} \tag{13}$$

en choisissant de ne garder qu'une perturbation u^η indépendante (on la suppose de même dimension que φ). Dérivons (12) par rapport à t en appliquant (9)

$$\begin{aligned} \partial_t \Delta\eta(t) = A(t)&\left[\Phi(t,0)\Delta\eta(0) + \int_0^t \Phi(t,\tau)B^u(\tau)u^\eta(\tau)d\tau\right] + B^u(t)u^\eta(t) \\ &+B(t)\left[\Psi(t,0)\Delta\eta(0) + \int_0^t \Psi(t,\tau)B^u(\tau)u^\eta(\tau)d\tau\right] \end{aligned} \tag{14}$$

[1]on reviendra sur la forme explicite de B^u.

On reconnaît $\Delta\eta(t)$ dans la première somme, ce qui permet d'identifier avec le système linéaire (13) en posant

$$\boxed{\Delta\varphi(t) = \Psi(t,0)\Delta\eta(0) + \int_0^t \Psi(t,\tau)B^u(\tau)u^\eta(\tau)d\tau} \tag{15}$$

permettant de réécrire :

$$\partial_t\Delta\eta(t) = A(t)\Delta\eta(t) + B^u(t)u^\eta(t) + B(t)\Delta\varphi(t) \tag{16}$$

On a ainsi l'interprétation de $\Psi(t,0)$ donnant la sensibilité de $\varphi(t)$ à la perturbation des C.I. en η. Dans l'égalité précédente, on peut exprimer Ψ grâce à (9)

$$\Delta\varphi(t) = [C^\dagger\Phi + D\Psi]\Delta\eta(0) + \int_0^t [C^\dagger\Phi + D\Psi]B^u(\tau)u(\tau)d\tau \tag{17}$$

et en identifiant les termes en Φ et Ψ :

$$\Delta\varphi(t) = C^\dagger\Delta\eta + D\Delta\varphi \tag{18}$$

1.3 Problèmes avec le point d´équilibre

Au début de cette étude, on a notamment rencontré des problèmes pour trouver un point d´équilibre réaliste. On avait des différences avec les valeurs standards (cf 1), et ayant dans notre modèle beaucoup plus de flux détaillés, il n´était pas évident de trouver une bonne répartition tout en assurant le réalisme en terme global. Après quelques jours on a pensé que notre problème était dans le flux d´ondes courtes. On trouve des valeurs de référence du rapport de GIEC, Fig.1, et ce sont ces valeurs que l'on a essayé de reproduire.

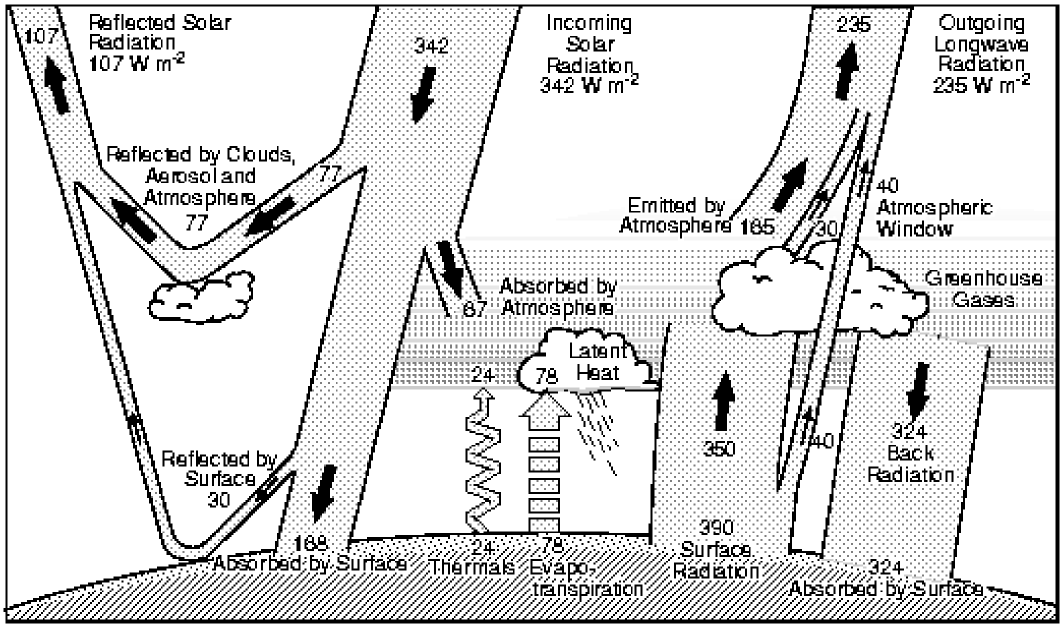

FIG. 1 – bilan des flux de référence avec lesquels on a calibré le modèle.

Mais le modèle de Stéphane était alors très rigide, les trois couches nuageuses étant couplées sous la forme d'un nuage équivalent, on n´avait pas beaucoup de degrés de liberté. Le modèle de Stéphane de flux d´onde courte était :

```
! ...........................................
  F_S = flux_solaire_entrant; "W/m2" "solar flux"
  a_grnd = albedo_ground;
!         [transm]:r=xtransm;             >>>
!         [absorption]:r=xabsorption;>    >>>
;
! nouveauté : nuages hauts transparents
 Tr_NH=0.3;
;
! On fixe comme parametre les Cld Cover
                             "les parametres rn_B,rn_M,rn_H sont egal a
                             les cobertures nuageuses bass,
                                                 moyenne et haut"
 rN_tot=1.-(1.-rN_B)*(1.-rN_M)*(1.-Tr_NH*rN_H);
                            "nuage equivalent qui a une coberture egal a
                             rN_tot"
;
z_pr: rN_TOT ;
! absorption Strato Ozone == 40 W (=> abs_o3=012
! Albedo nuages A_cld = 0.88 (=> 0.12 !)
;
! ----------------------------------------------------------------------
  eqn: flux_SW_tropo  =  rN_tot*0.12*F_S;  "Flux SW -> Tropo"
  eqn: flux_SW_strato =  0.12*F_S;          "Flux SW -> Strato" "0.12
                                              c'est la valeur
                                             de la absortion de
                                             la strato"
  eqn: flux_SW_ocean  = (1.-rN_tot)*(1.-a_grnd)*F_S;    "Flux SW -> Sol"
! ----------------------------------------------------------------------
```

On a alors changé de modèle en détaillant les propriétés des nuages, tout en conservant la simplicité des équations. On a découplé les trois couches nuageuses, ce qui nous donné liberté pour fixer les paramètres optiques de ces trois couches :

```
!-----------------------------------------------
!NUAGE HAUT
albedo_h=rN_H*(1-AL_NH-Tr_NH)*(1.-0.12)*F_S;
                               "AL_NH,Tr_NH sont les ctes de absorption et
                                              transmision des nuages hautes"
abs_h=rN_H*AL_NH*(1.-0.12)*F_S;
                                    "ce terme est egal a le flux shortwave qui
                                            est absorve par les nuages hautes"
trans_h=rN_H*Tr_NH*(1.-0.12)*F_S;
                                    "ce terme est egal a le flux shortwave qui
                                         passe pour la transparence des nuages"
F_SM=trans_h+(1.-rN_H)*(1.-0.12)*F_S;
                                    "ce terme est egal a le flux shortwave total
                                                qui arrive a les nuages moyenes"
!-----------------------------------------------------------
!NUAGE MOYENNE                                      "meme structure"
albedo_m=rN_M*(1.-AL_NM-Tr_NM)*F_SM;
abs_m=rN_M*AL_NM*F_SM;
trans_m=rN_M*Tr_NM*F_SM;
F_SB=trans_m+(1.-rN_M)*F_SM;
!______________________________________________________________
!NUAGE BASSE                                        "meme structure"
albedo_b=rN_B*(1.-AL_NB-Tr_NB)*F_SB;
abs_b=rN_B*AL_NB*F_SB;
```

```
trans_b=rN_B*Tr_NB*F_SB;
F_SOCEAN=trans_b+(1.-rN_B)*F_SB;

 z_pr: albedo_h,albedo_m,albedo_b;

! absorption Strato Ozone == 40 W (=> abs_o3=012
! Albedo nuages A_cld = 0.88 (=> 0.12 !)
! *** revoir ecriture SW (mais les flux doivent etre les memes)
;
! ----------------------------------------------------------------------
  eqn: flux_SW_tropo  =  abs_h+abs_m+abs_b;  "Flux SW -> Tropo"
  eqn: flux_SW_strato =  0.12*F_S;                  "Flux SW -> Strato"
  eqn: flux_SW_ocean  = (1.-a_grnd)*F_SOCEAN;
!  "Flux SW -> Sol"
! ----------------------------------------------------------------------
```

Comme on peut le constater, on a distingué les propriétés LW des nuages, données par les nébulosités, et les propriétés SW, à savoir une transparence et une absorption, ce qui détermine aussi leur albédo.

Avec ces nouvelles équations, il était plus simple de trouver les valeurs de flux appropriées. On a trouvé ces valeurs en prenant finalement les paramètres suivants :

```
! Low, Medium and High Cloud cover fixes en parametres
 rN_B  = 0.35;
 rN_M  = 0.25;
 rN_H  = 0.30;
 Tr_NH=0.53;
 Tr_NM=0.28;
 Tr_NB=0.3;
 AL_NM=0.11;
 AL_NB=0.13;
 AL_NH=0.07;
```

La comparaison avec les données admises par le GIEC sont rassemblées dans le tableau suivant : Les différences résiduelles ne sont pas gènantes ; elles tiennent à la prise en compte des effets LW de CO2 et H2O, sans autres gaz à effet de serre, et à l'absence d'aérosols dans le modèle. Par ailleurs, on verra que ces valeurs moyennes sont sensiblement différentes pour un modèle non stationnaire soumis au cycle saisonnier.

1.4 Analyse et compréhension du modèle.

a. Stratosphère

La dynamique de la stratosphère ne dépend que du flux LW parce que on a fixé l'absorption de flux d´ondes courtes. Ce flux dépend de la quantité d'énergie qui arrive depuis l'océan et la troposphère, et de sa température qui fixe son émission. La planète est à l'équilibre dès que le LW (vers l'espace) égale le SW absorbé.

Pour fixer les idées, nous donnons dès à présent quelques exemples de sensibilité fournie par le modèle ; le flux de LW dépend de la température et de l'absorption par le CO2 et le vapeur d'eau :

Par contre les effets de la stratosphère sur la troposphère et l'océan sont assez faibles. On peut le voir en regardant les sensibilités à la température de la troposphère et de l'océan, a priori les variables les plus influentes, parce que cette sensibilité est régie par le bilan de LW :

Mode d'échanges	Salby	modèle
Flux SW		
Océan	168	150
Troposphère	(87)	20 (61)
Stratosphère	(87)	41 (61)
Flux LW		
Océan vers troposphère	350	360
Océan vers stratosphère	—	0.4
Stratosphère vers océan	—	0.07
Troposphère vers océan	324	326
Troposphère vers espace	—	102
Atmosphère vers espace	195	143
Océan vers espace	40	66
Autres flux		
Chaleur sensible	24	16
Chaleur latente	78	74

TAB. 1 – Comparaiison avec les données moyennes climatiques admises par le GIEC

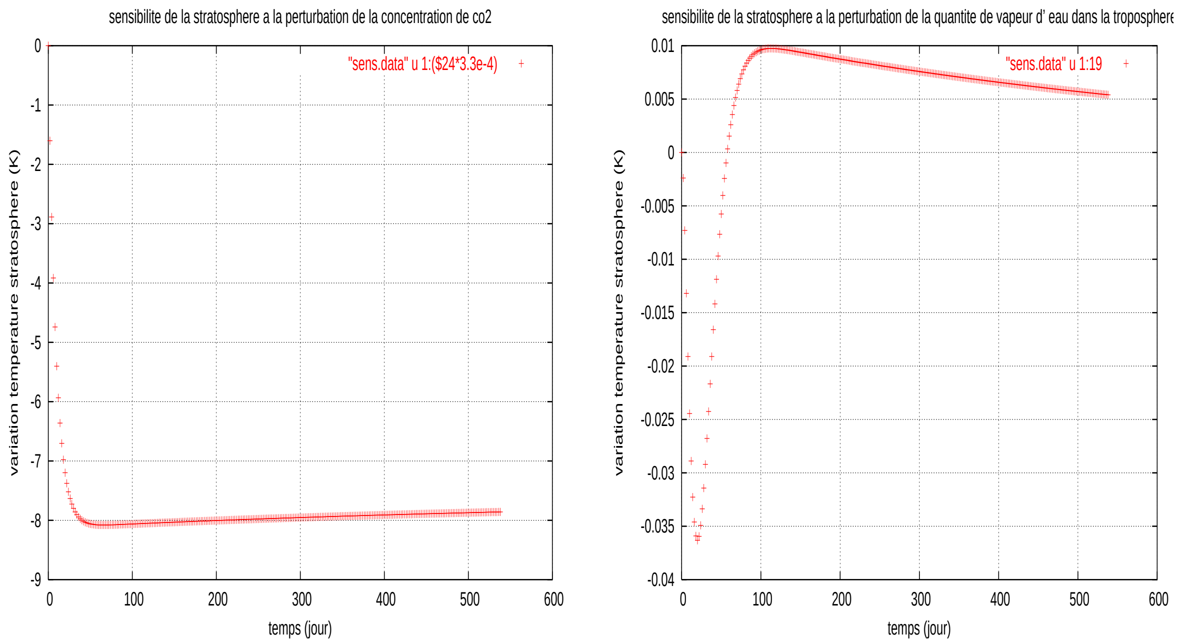

FIG. 2 – On peut voir que la sensibilité a la perturbation de CO2 et H2O est assez forte parce que moins de chaleur qui viens de l' océan arrive à la stratosphère.

En plus le moteur du déséquilibre est dans les autres deux couches ; on peut dire que dans ce modèle la stratosphère n´a pas d'influence sur la dynamique du modèle et qui seulement varie en fonction de ce qui se passe plus bas pour équilibrer le bilan total de flux de grandes longueurs d'onde. Cet équlibre dépend des températures, mais aussi du contenu troposphérique en CO2 et surtout en vapeur d'eau, ces deux gaz formant ce qu'on appelle couramment *l'effet de serre.*

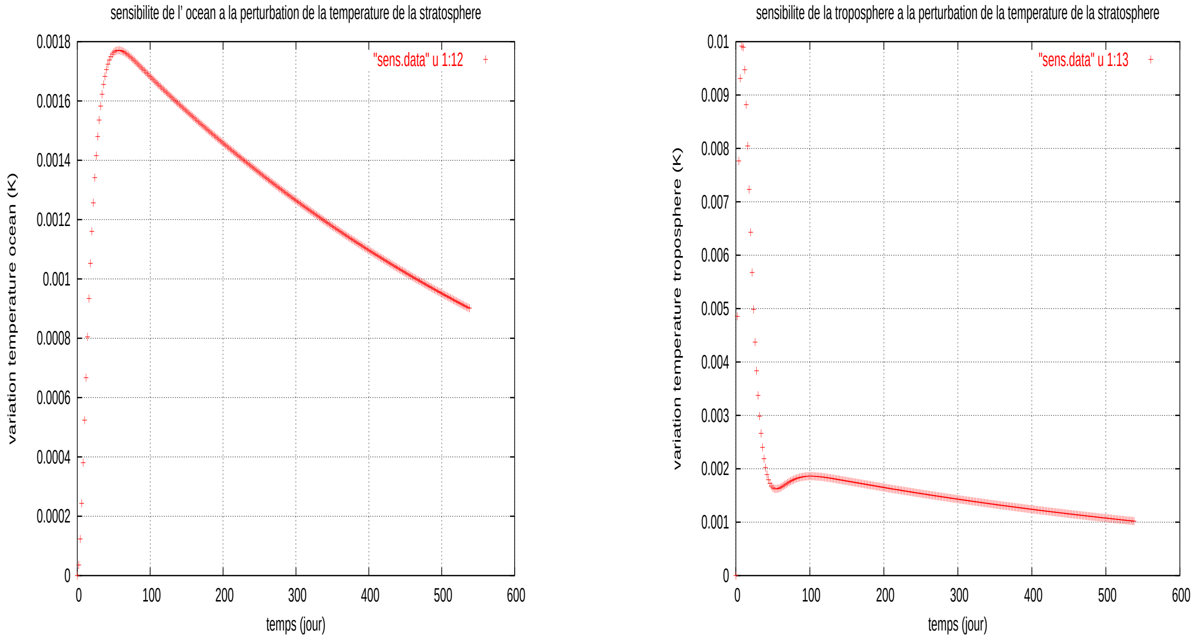

FIG. 3 – On a des perturbations de l'ordre de 0.002 pour un changement de un Kelvin, valeur négligeable, sachant en plus que dans notre problème la variation de la stratosphère est plus petite que le degré.

b. Troposphère

La dynamique de la troposphère est beaucoup plus complexe que celle de la stratosphère. Pour l´analyser il faut voir quelques propriétés des phénomènes comme la vitesse d´actuation, la puissance et son effet (stabilisateur or moteur). Pour expliquer ça je vais prendre comme exemple la perturbation de la concentration du CO2 parce que le transitoire est assez complexe.

Premièrement on fait l´analyse avec la température de l´océan constante pour voir les effets moins forts et leur influence[1].

Le doublement initial de la concentration est une perturbation qui va être seulement vue au début par le flux LW, donc le première chose qu´on va voir c´est une croissance de la température, les effets dans le flux LW étant très rapides parce que ces échanges sont fait à la vitesse de la lumière. Par contre une augmentation de la température a une sensibilité négative parce que cette perturbation produit une diminution de la précipitation, par le fait que l'humidité relative a baissé. En effet la relation de Clausius-Clapeyron montre que la pression saturante croit rapidement avec la température ; alors, une croissance de la température fait diminuer l'humidité relative, et ainsi les précipitations. La Fig.4 nous montre que P_{sat} croit avec la température.

La précipitation a un effet puissant parce qu'elle libère dans l'atmosphère la chaleur latente élevée de l'eau, de l´ordre de $10^6 Jkg^{-1}K-1$. Dans le modèle, son effet est appliqué avec une constante de temps, le but de ce coefficient est de prendre en compte le temps de formation des phénomèmes précipitants comme orages, tempêtes, cumulo-nimbus etc, qui bine sùr ne sont pas explicitement représentés dans un modèle simplifié. On pense que ce décalage peut être mieux realisé en multipliant par une fonction aléatoire — comme par un tirage par Monte-Carlo — mais ce n´est pas évident a régler.

Ainsi, revenant au transitoire lié à la perturbation de CO2, on peut voir que la

[1] par fixation d'une très grande épaisseur de la couche de mélange océanique.

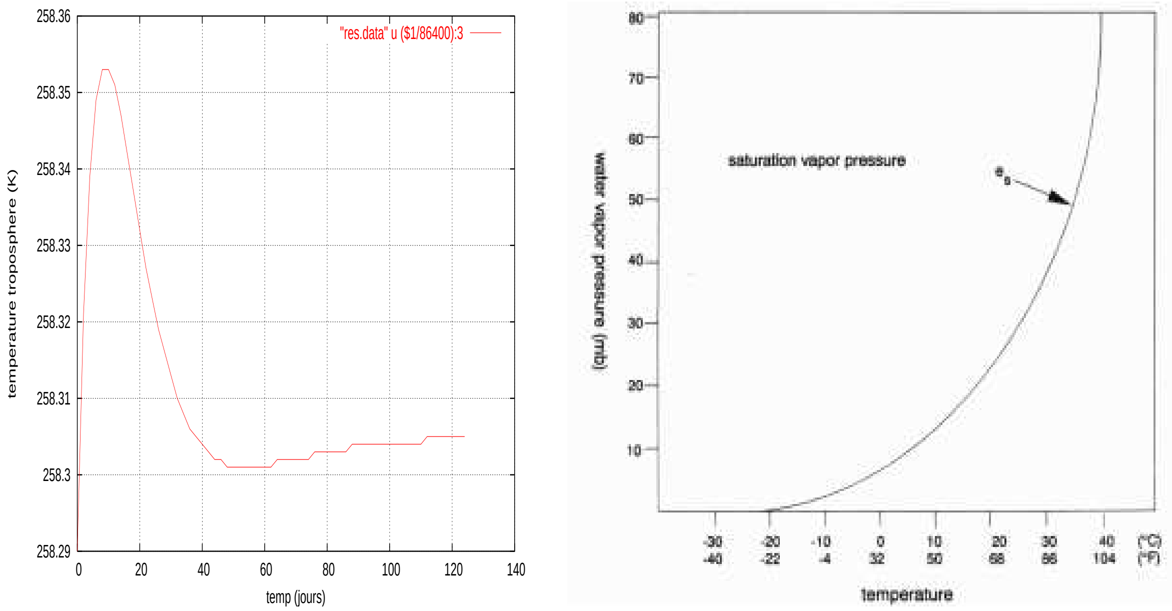

FIG. 4 – L'évolution de la température de la troposphère et la courbe de Clausius-Clapeyron.

croissance de la température provoque une diminution des précipitations et donc à une augmentation de la quantité de vapeur d´eau dans l'atmosphère, l'évaporation restant initialement inchangée. Maintenant on a l´effet de la précipitation qui tend à baisser la température, l´effet d'accumulation de vapeur d´eau qui accroît l'écran de grandes longueurs d´ondes (effet de serre) et ainsi la dynamique de croissance qu´on avait auparavant :

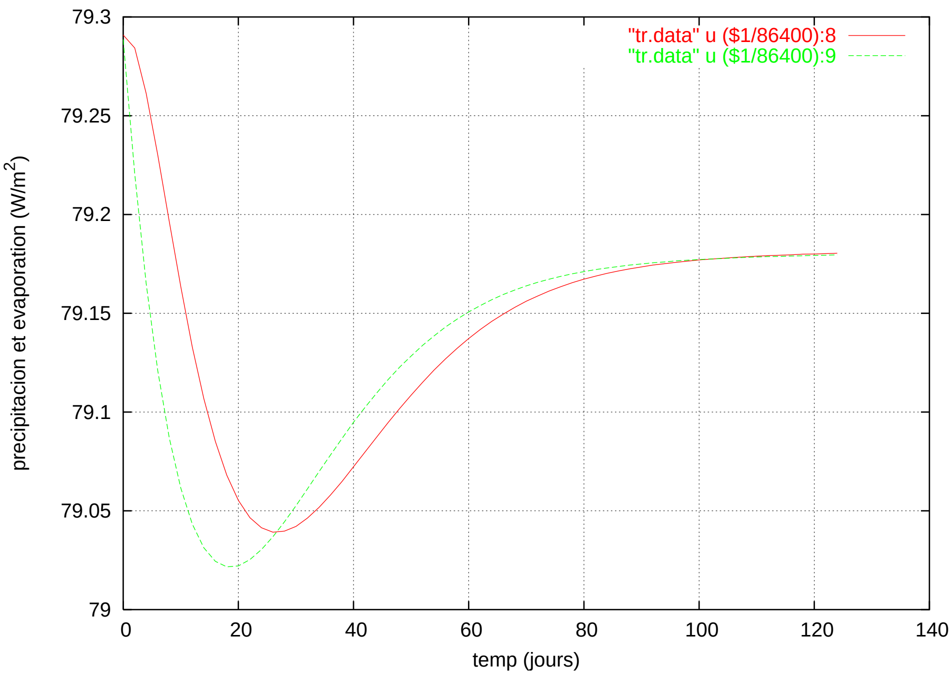

FIG. 5 – Evaporation en rouge et précips en vert. La Fig. 4 montre les effets de la précipitation sur la température de la troposphère.

Il y aura un moment où les trois phénomènes s´équilibrent et à ce moment le terme d'évaporation s'impose et la température commence à baisser. Donc le maximum local qu´on voit sur la figure est produit par la précipitation. La température baisse par diminution de la précipitation, un effet qui va perdre force parce que la température décroît et parce que le quantité d´eau a monté beaucoup. Au moment où la précipitation recommencera à monter et a s'équilibrer avec l'évaporation. Pendant la durée de décroissance de la température de la troposphère, celle-ci gagne néanmoins de l'énergie sous forme de chaleur latente. Avec la croissance de la précipitation la troposphère tends a s´équilibrer. On a vu que la précipitation à un gros effet sur la dynamique de temps courts parce que sa valeur c´est liée à la chaleur latente relâchée sur quelques jours dans le modèle.

c. Océan

L´effet de l´océan est l'effet le plus important sur le long terme parce que l´océan a une grande inertie : au début il varie peu mais dès que sa température prend un profil de croissance, il est difficile à arrêter comme on va l'expliquer (rétroaction positive). L'océan a trois modes d'interaction avec la troposphère, deux directs et un indirect dans le modèle comme dans la réalité.

Les deux modes directs sont le flux de chaleur sensible et le flux LW. La façon indirecte est l'évaporation parce que la précipitation dépend dans le modèle de l'évaporation, ce qui est une manière de prendre en compte le fait qu'aux temps de réponse supérieurs à quelques jours, l'eau est recyclée entre la troposphère et l'océan. Les flux LW et l'évaporation ont une valeur plus puissante que celle de le chaleur sensible, celle-ci tendant a égaliser continûment les températures de la troposphère et de l´océan par les échanges turbulents au sein de la couche limite atmosphérique ; sans transport de vapeur d'eau et intervention de la chaleur latente, ces flux 'secs" sont nettement moins efficaces.

En regardant les sensibilités à une perturbation de la température océanique de ces flux (Fig. 6), on peut dire que le flux LW augmente avec la perturbation, donc c´est un flux qui tends a faire croître la perturbation initiale — on dit alors que la rétroaction est positive.

Par contre l'évaporation augmente également avec la température, mais comme elle a un signe négatif dans le bilan d´énergie de l'océan, elle a un effet stabilisateur — on dit alors qu'il s'agit d'une rétroaction négative. Donc on peut voir que lorsque la température de l´océan commence a croître, le rapport entre les deux flux tend à augmenter la température jusqu´a ce que l'évaporation, aidée par la chaleur sensible, réussit à équilibrer la température océanique.

On peut à présent examiner l'interaction complète océan-troposphère. On va reprendre la perturbation de CO2 mais cette fois on va libérer la température de l´océan. La perturbation est produite dans la troposphère au tout début, donc la température de l'océan va varier par réaction aux effets produits dans la troposphère, et en premier par les flux LW reçus par océan de la troposphère.

Une fois que la température de l´océan est perturbée, il est très difficile à arrêter parce que la sensibilité du flux LW presque tout de suite commence à renforcer cet effet. La précipitation a encore un effet aux temps courts mais cette fois se superpose la tendance croissante de la température induite par l´océan. A partir de quelques quarante jours dans notre modèle et notre choix de la constante de temps des précipitations, toute la dynamique est contrôlée par la croissance de température de l´océan difficile à arrêter de par son inertie. La précipitation augmente parce que l'évaporation augmente et cette

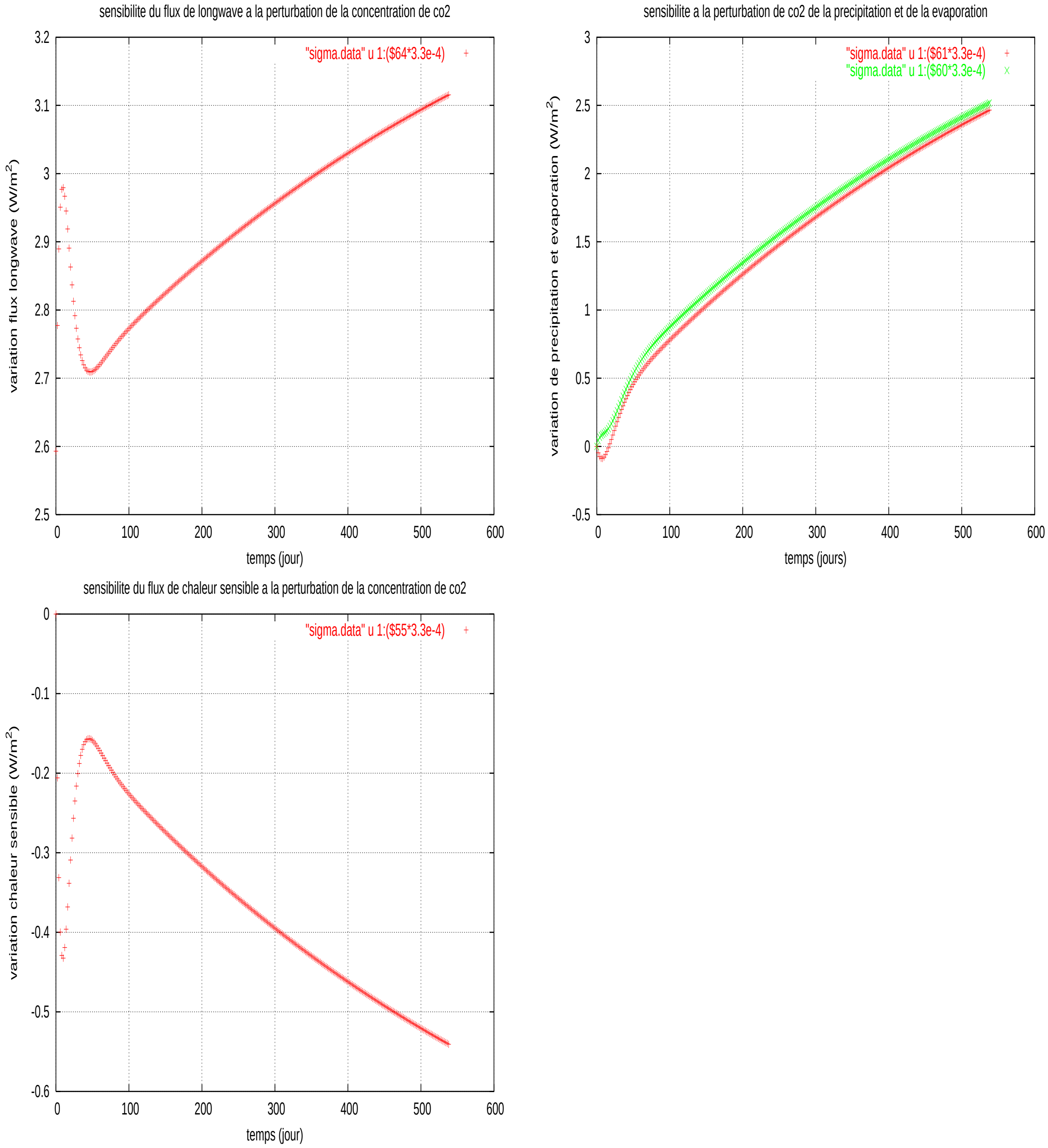

Fig. 6 – On peut voir les différences de valeurs entre les sensibilités aux perturbations de CO2 et du longwave et l'effet de la précipitation plus grande que celle de la chaleur sensible.

augmentation fait un apport positif au le bilan de la troposphère, donc la température de la troposphère augmente aussi.

On arrivera à l´équilibre de la température de l´océan (moteur du changement climatique de long terme), mais il faut toujours dire que très lentement, grâce a l'augmentation de l'évaporation qui équilibre le flux de grandes longueurs d´ondes. Mais cet effet a aussi la conséquence de donner de l'énergie à la troposphère sous forme de chaleur latente (augmentation de Q) et par augmentation de sa température. Cette augmentation du volume de précipitation et d'évaporation et l'augmentation de la température de la troposphère dans le modèle correspond à la production des orages et cyclones avec plus de fréquence et de force dans le climat réel.

d. résumé

Le véritable agent du changement climatique est l´océan, qui induit les augmentations irréversibles de température et de la vapeur d´eau. L´océan est un moteur qui tarde un peu en démarrer mais lorsque il a commencé il est vraiment difficile d´arrêter. La précipitation est le terme principal qui régit la dynamique de la troposphère parce que liée à la forte valeur de la chaleur latente de l'eau. Il réagit on peut dire avec indépendance de la température de l´océan à court terme, mais lorsque la température de l´océan monte, la précipitation est contrôlée par l'évaporation croissante. L'évaporation est ainsi le terme qui tend à équilibrer la température de l´océan. Il est un terme puissant qui a trois conséquences : i) il peut équilibrer plus vite, mais par contre, ii) il donne plus d'énergie à la troposphère, et cette énergie peut produire des phénomènes météorologiques adverses, et enfin : iii) il renforce l'effet de serre.

2 Analyse du système périodique

On le sait, le système climatique n'est pas à l'équilibre. On a donc soumis le modèle à un forçage saisonnier comme on va le décrire plus loin. On voit alors que la sensibilité du système au doublement de CO2 est amplifiée par le cyclage : Après une dizaine d'années,

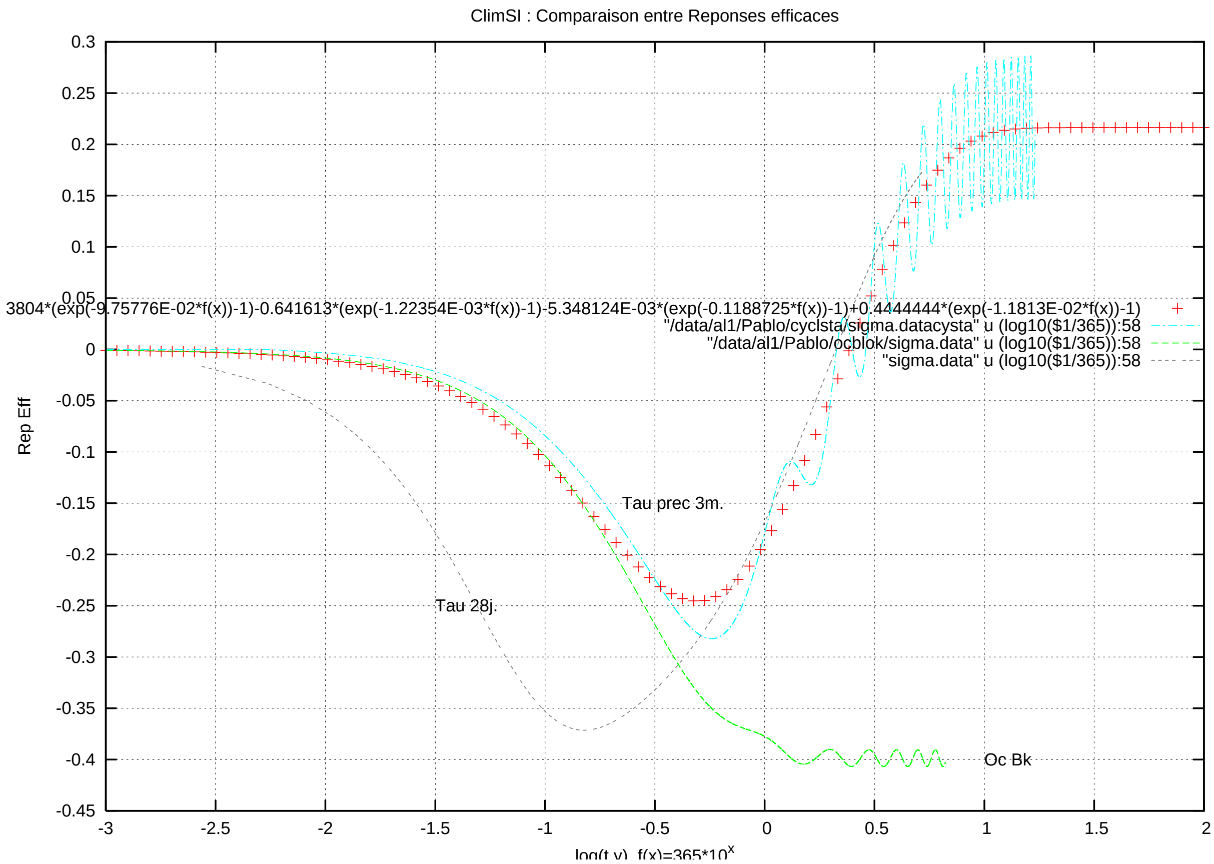

FIG. 7 – On peut voir que la sensibilité a la perturbation de CO2 est amplifiée par le cycle (température de la tropo).

la troposphère se stabilise à environ 0.3 K de plus qu'en perturbation statique, et reste alors une oscillation résiduelle autour de T_0+1.5 K. La théorie de Floquet a pour but d'analyser la stabilité des systèmes périodiques ; c'est ce que nous abordons à présent.

2.1 Théorie de Floquet

Dans cette partie notre objectif est d´analyser notre système avec la théorie de Floquet. L'analyse de Floquet s'applique aux systèmes dynamiques $\partial_t x = A(t)\, x$ lorsque la matrice d'avance de phase est périodique : $A(t+T) = A(t) \quad \forall t$. Les propriétés du propagateur associé sont classiquement obtenues en considérant la matrice $X(t)$ des solutions fondamentales du système — qui forme une base de toute les solutions au système. On pose d'abord que $X(0) = I$ pour simplifier l'écriture. Alors, on a

$$\partial_t X(t+T) \;=\; A(t)\, X(t+T) \tag{19}$$

qui prouve que $X(t+T)$ est également solution, et peut donc s'exprimer dans la base $X(t)$:

$$X(t+T) \;=\; X(t)\, M \tag{20}$$

où M est une matrice constante (et régulière, puisque les X le sont par définition). La théorie a été établie pour les systèmes linéaires. Dans notre problème ce qu'on apelle $X(t)$ est ici $\delta\eta(t)$ parce que c'est la perturbation qui est régie par un ssytème linéaire. Cette perturbation n'est pas périodique alors que $\eta(t)$ l'est, et ainsi $A(t)$. Cela nous dit qu' en connaissant une perturbation initiale $\delta\eta(0)$ et son évolution jusqu'à $\delta\eta(T)$, on peut connaitre toute l'évolution du système par rapport a cette matrice M cte.

a. Factorisation de Floquet

La théorie de Floquet nous dit que lorsque on a un système de flot periodique, on peux décomposer la matrice $X(t)$ en une matrice périodique et une autre exponentielle. On va le voir en définissant la matrice constante C (sur le corps des complexes) telle que $X(T) = e^{CT}$, et on a en reprenant l'équation (20) pour $t = 0$

$$X(T) \;=\; M = e^{CT} \tag{21}$$

De cette facon on peux maintenant définir la nouvelle matrice B qui est périodique :

$$\begin{aligned} X(t) &= B(t)\, e^{Ct} \\ &\Rightarrow \; B(t+T) = B(t) \end{aligned} \tag{22}$$

On a en effet

$$\begin{aligned} X(t+T) &= B(t+T) e^{Ct} e^{CT} \\ &= X(t)\, e^{CT} \\ &= B(t) e^{Ct} e^{CT} \end{aligned}$$

b. Vecteurs de Floquet

Lorsque on a maintenant la propriété (22) et comme on sait que le propagateur est lié à X on va voir ce qu'on peut sortir du propagateur. Par analogie avec la partie de X, il est logique de démarrer l'étude à l'instant $t = T$. On diagonalise $\Phi(T, 0)$ et on change la forme des valeurs propres en cherchant quelque chose de similaire au M.

Donc on a des valeurs propres $\sigma_i = e^{\lambda_i T}$ du propagateur en $t = T$ et on définit Y :

$$\begin{array}{rcl} \Phi(T,0)Z & = & Z\, e^{\Lambda T} \\ Y(t) & \stackrel{def}{=} & \Phi(t,0)\, Z \\ Y(0) & = & Z \end{array} \tag{23}$$

Avec cette définition on a la relation de $Y(t)$ avec sa réplique à $t + T$ est alors

$$\begin{array}{rcl} Y(t+T) & = & \Phi(t+T,0)\, Z = \Phi(t+T,T)\, \Phi(T,0)\, Z \\ & = & \Phi(t,0)\, Z\, e^{\Lambda T} \\ Y(t+T) & = & Y(t)\, e^{\Lambda T} \end{array} \tag{24}$$

Par ailleurs, Y s'intègre comme le propagateur, car

$$\partial_t Y \;=\; A(t)\, \Phi(t,0)\, Z = A(t)\, Y(t) \tag{25}$$

Ainsi (24), $Y(t)$ n'est pas périodique mais est "amorti" à chaque période par $e^{\Lambda T}$. On a simplement amélioré la décomposition donnée par (22) en découplant les modes d'amortissement.

Maintenant on peut construire à partir des Y un autre vecteur non amorti pour capter la structure du champ associée aux phénomènes fluctuants ; ce sont les **vecteurs de Floquet** Ψ^F que l'on définit en "dés-amortissant" Y :

$$\Psi^F(t) \;\stackrel{def}{=}\; Y(t) e^{-\Lambda t} \tag{26}$$

on obtient bien un vecteur périodique, car :

$$\begin{array}{rcl} \Psi^F(t+T) & = & Y(t+T)\, e^{-\Lambda T} e^{-\Lambda t} \\ & = & Y(t) e^{-\Lambda t} = \Psi^F(t) \end{array}$$

Et on a arrive a décomposer, plus au moins, le propagateur en des orbites périodiques amplifiées ou amorties ; donc on a gagné pas mal d'information :

$$\Phi(t) = \Psi^F(t) e^{\Lambda t} Z \tag{27}$$

C'est l'un au moins de ces vecteurs que l'on tente de déterminer en avant, mais notre développement considère l'ensemble de ces vecteurs par souci de généralité :

$$\begin{array}{rcl} \partial_t \Psi^F & = & AY\, e^{-\Lambda t} - Y(t) \Lambda e^{-\Lambda t} \\ & = & A\Psi^F(t) - \Psi^F e^{\Lambda t} \Lambda e^{-\Lambda t} \end{array} \tag{28}$$

et du fait de la diagonalité des trois matrices de droite, le résultat final est

$$\boxed{\partial_t \Psi^F = A\Psi^F(t) - \Psi^F \Lambda \quad avec\, \Psi^F(0) = Z} \tag{29}$$

Ainsi, connaissant la période T de la matrice d'avance de phase d'un système dynamique linéaire (ou du SLTC en perturbation), et ayant calculé un ou plusieurs vecteurs propres du propagateur à $t = T$, on est capable d'intégrer en avant un ou plusieurs vecteurs de Floquet.

passage au TEF On peut remarquer que l'on a un autre "vecteur de Floquet" lié au TEF, à savoir $\zeta^F(t) = \Psi(t,0)Zexp(-\Lambda t)$. Ces transferts de Floquet correspondent aux transferts perturbés des vecteurs de Floquet, et sont donc très intéressants à analyser pour interprèter physiquement les Floquets.

c. résumé

1. La théorie de Floquet est applicable au systèmes ou la matrice d'avance de phase est périodique : $A(t+T) = A(t) \quad \forall t$. C´est l'unique condition qu´on a pour l´appliquer ;
2. Lorsque on a un le flot périodique la théorie nous dit qu´on peut décomposer le propagateur en vecteurs périodiques qui sont exponentiellement amplifiés ou réduits ;
3. A vecteurs périodiques, trajectoires périodiques en lesquelles on peut décomposer le propagateur, on les appelle Vecteurs de Floquet ;
4. les coefficients qui déterminent si une trajectoire périodique est amplifiée ou réduite sont liés aux valeurs propres du propagateur pour la période du système.
5. Le propagateur nous donne les sensibilités du système aux perturbations des variables d´état. Maintenant ces sensibilités sont décomposées en trajectoires qui vont monter ou décroître. Donc comme premier résultat de l´analyse on peut voir l´évolution de la dimension du système avec le temps, et connaitre ainsi sa stabilité ;
6. Par contre donner un sens physique aux vecteurs de Floquet n´est pas un problème facile. Et on ne sait pas (a priori) quelle information on peut sortir de notre analyse.

2.2 Problèmes du démarrage

Dans ce moment on est en train de commencer à étudier l'information que l´analyse de Floquet nous donne. Les résultats plus complets de notre étude, je les commenterai dans l´exposition du 9 Juillet.

Avant de procéder à l'analyse, on est obligé de faire que le système devienne périodique. On est arrivé a le faire en mettant un flux solaire périodique. De cette façon on essayé de reproduire le caractère saisonnier du climat. Donc au lieu d´avoir :

$$\begin{aligned} FS &= 343 \quad (Wm^{-2}) \\ FS &= 343\,(1 + \frac{1}{3}\sin(\frac{2\pi t}{365})) \quad (Wm^{-2}) \end{aligned}$$

On a pensé que cette modification suffirait parce que le flux longwave, très important dans l´évolution du système, est lié au shortwave. Pour tester si le système est périodique on exige que toutes les variables d´état soient périodiques. De cette façon on est sùr que la matrice A est périodique, condition du Floquet. On a vu que les variables étaient décalées en phase avec le forçage, ce qui provoque des transitoires assez longs à stabiliser parce que la constante de temps de notre système est trés grande. La façon d'évoluer nous a donné l'impression que le système avait un comportement pas très linéaire. Pour tester ça on a fait un fit avec la fonction$(a\sin(\frac{2\pi}{365}x + c) + d)$ de notre signal pour avoir la valeur moyenne. On a alors constaté une variation de valeur moyenne par rapport a celle du problème non périodique et en plus que le signal n´était pas purement sinusoïdal. Donc notre système n´a pas un comportement linéaire pour l'amplitude du forçage choisi.

En effet lorsque on a un système linéaire on peut découpler les équations de la perturbation et la valeur moyenne :

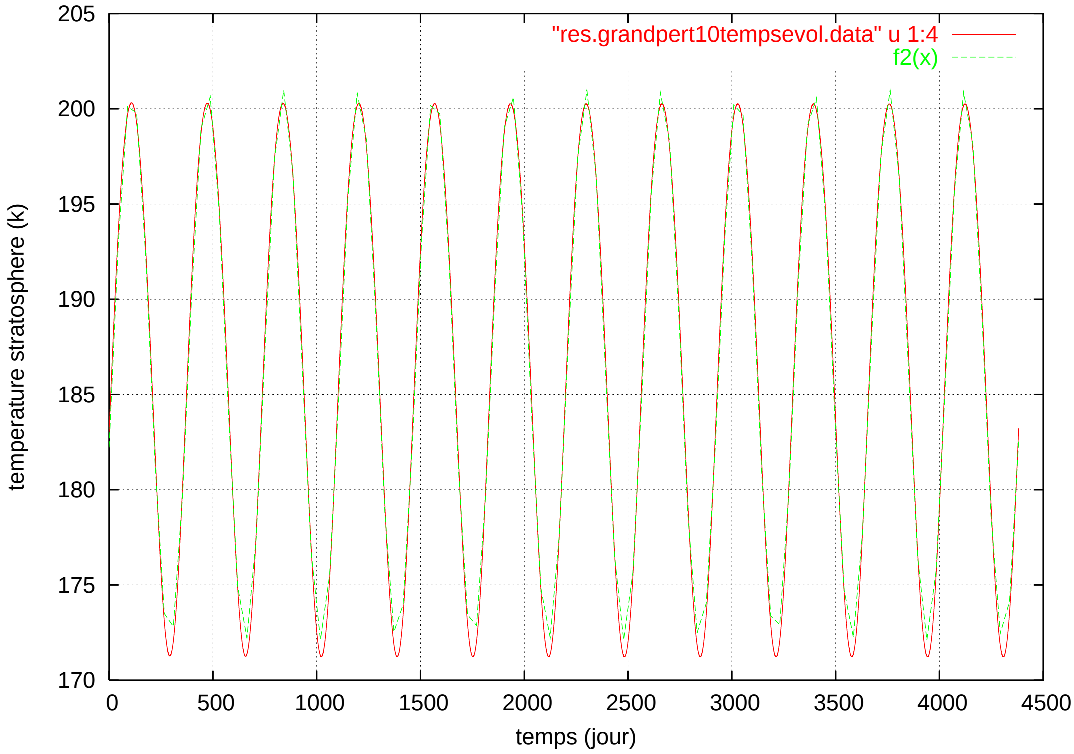

FIG. 8 – Le fit nous montre que l'évolution n'est pas vraiment sinusoïdale et aussi des différences en valeurs moyennes.

$$
\begin{aligned}
x &= \overline{x} + x\prime \\
\partial_t(\overline{x + x\prime}) &= F(\overline{x} + x\prime) \\
\partial_t\overline{x} + \partial x\prime &= F(\overline{x}) + F(x\prime)
\end{aligned}
$$

On peut faire ça si F est un application linéaire. Et on a aussi si F est linéaire :

$$
\begin{aligned}
\overline{\partial_t x} &= \overline{F(x)} \\
\partial_t\overline{x} &= F(\overline{x}) \\
\partial_t x\prime &= F(x\prime)
\end{aligned}
$$

On a vu que l´effet de la constante de temps est très forte ; de plus notre système changeait de tendance lorsque on le redémarrait avec le dernier point du calcul. Ça nous a fait réfléchir sur notre choix de pas de temps. En plus quand on a démarré l´analyse de Floquet avec le système finalement équilibré on a vu que les valeurs propres du propagateur avaient une sortie avec beaucoup de bruit qui nous a fait penser à un pas de temps trop fort (un jour). L'évolution des valeurs propres était très mauvaise pour notre étude parce que toutes les valeurs propres sauf une décroissaient très rapidement et dans la première période il nous en restait seulement une. Donc de cette façon notre analyse de Floquet n´est pas trop intéressante parce que il nous reste qu'une dimension quand on commence l´étude. Ainsi on a fait des modifications pour gagner une deuxième valeur propre pour notre étude. Le deuxième valeur propre perdait son influence à bout de 60 jours. En regardant la sortie des sensibilités on a vu que le effet precip-evap étaient aussi valable dans cette période. Par conséquent peut être possible que ce deuxième vecteur de Floquet garde l'information sur l´effet de ces deux flux et que le premier vecteur garde l'information sur l'évolution régie par la température de l´océan. Pour résoudre ces problèmes on a :

1. changé le pas de temps à 0.1 jour ;
2. changé la cte de temps de la précipitation à 180 jours pour ralentir son effet ;
3. augmenté l'amplitude du forçage pour perturber plus le système :

$$FS = 343\,(1 + \frac{1}{2}\sin(\frac{2\pi t}{365})) \quad (Wm^{-2})$$

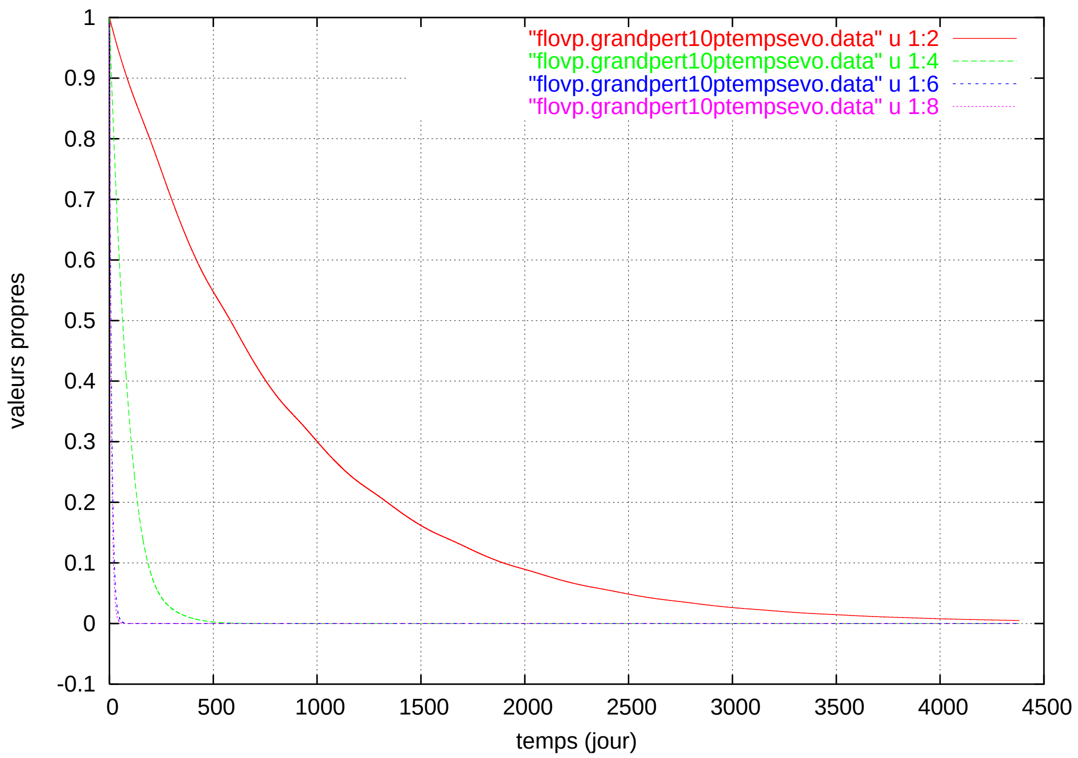

FIG. 9 – La deuxième valeur propre en vert a un ordre de magnitude acceptable pour $t = 365$. Toutes les valeurs propres ont perdu le bruit.

De cette façon on a réussi à gagner le deuxième vecteur de Floquet mais comme notre système est toujours très lent ça nous a pris quelques jours de calculs pour aboutir enfin au cycle limite.

a. Analyse des vecteurs de Floquet

Exposants de Floquet [1]

Lorsque notre espace de variable d´état est de quatre dimensions on a quatre exposants de Floquet. Notre analyse nous donne qu´en effet on garde que deux exposants de Floquet parce que les autres deux sont rapidement amortis. De ce résultat on peut toute suite dire que le couplage entre les variables d´état fait que notre système a deux degrés de liberté. Il nous reste deux exposants de Floquet réels, résultat logique parce que notre système est intrinsèquement non oscillatoire. Ce résultat est bien lié au fait qu´on trouve que le

[1] All : cette analyse est ajoutée au rapport officiel et expose les arguments du stagiaire ; nous en discuterons ensuite.

système a une réponse avec le période du forçage. Les deux exposants de Floquet ont des constantes de temps égale à :

$$\tau_1 = 2.3\,ans \tag{30}$$
$$\tau_2 = 80\,jours \tag{31}$$

La décomposition en vecteur de Floquet nous laisse qu´un seul vecteur pour les temps supérieurs à 800 jours. Donc le couplage dans notre système fait qu´on a un système unidimensionnel pour les temps très grands. De cette façon on peut dire que l'information de la trajectoire asymptotique est gardée par le premier vecteur.

Premier vecteur compréhension La simplicité de ce système nous peux aider a savoir la information qu´on peut gagner en faisant une analyse de Floquet. Dans notre système on a un vecteur de Floquet pour le trajectoire asymptotique. De toutes les perturbations avec lesquelles on peut perturber le système Fl1 nous sélectionne les plus lentes. Les reste des directions, si elles ne sont pas perpendiculaires à F1, vont avoir une évolution lente parce qu'elles vont finir pour s'aligner avec la direction de F1, évolution plus au moins lente selon leur produit escalaire avec F1.

Maintenant on peut regarder les différentes valeurs de F1, et comment F1 est une perturbation des variables d´état. D´abord c´est logique que F1 perturbe l'océan parce que c´est la variable avec la plus grande inertie, celui qui donne l´effet lent, les autre vecteurs de Floquet étant fortement amortis ne le perturbe pas. Mais pour que la perturbation soit la plus lente possible, l´océan doit perturber les autres variables d´une façon optimale qui mette la machine en route sans créer de perturbations rapides.

Cette façon on peut la voir en regardant quelques composantes de F1. La composante RH de F1 est presque nulle, ça veux dire que RH ne joue pas dans la trajectoire asymptotique. Donc de toutes les façons possibles d´être couplées les perturbations T tropo et Q restent couplées pour l'équation de Clausius Clapeyron.

Les perturbations de T tropo et T océan sont couplées par le Bilan de LW et par l´effet que l'evaporation est presque égale à la precipitation. D´où que notre dimension soit égale à un.

Comme résultat important, on peut dire que plus l'inertie de l´océan est forte, plus il est puissant. On a pu voir que le premier vecteur de Floquet nous donne la façon espécifique (les couplages entre variables d´état) de la tendance asymptotique de notre système vers l´équilibre. Et Floquet nous peux donner l´information parce que notre système a la particularité d´avoir une variable beaucoup plus dificile à estabiliser.

Deuxième vecteur de Floquet compréhension : Comme première information on peut dire que ce vecteur nous donne une direction de perturbation rapidement amortie. Donc son effet n'est présent que de manière transitoire. Et alors que le premier vecteur garde la façon que le système tombe asymptotiquement, le deuxième représente une perturbation qui, si on l'ajoute à la tendance asymptotique, nous donne le transitoire le plus significatif. Don c´est pas le vrai transitoire mais il caractèrise le transitoire. Par contre sa direction, à différence du F1, on ne peut pas la lier à une seule variable, et c'est le couplage entre les variables qui nous donne la cartéristique du transitoire.

Par rapport à F1, F2 perturbe la chaleur sensible, le flux LW de la stratosphère et le RH. Donc interpréter ce mode est difficile lorsque toute est perturbé, comment savoir quelle est la combinaison qui dirige et pourquoi. On peut donc dire que l'analyse de Floquet

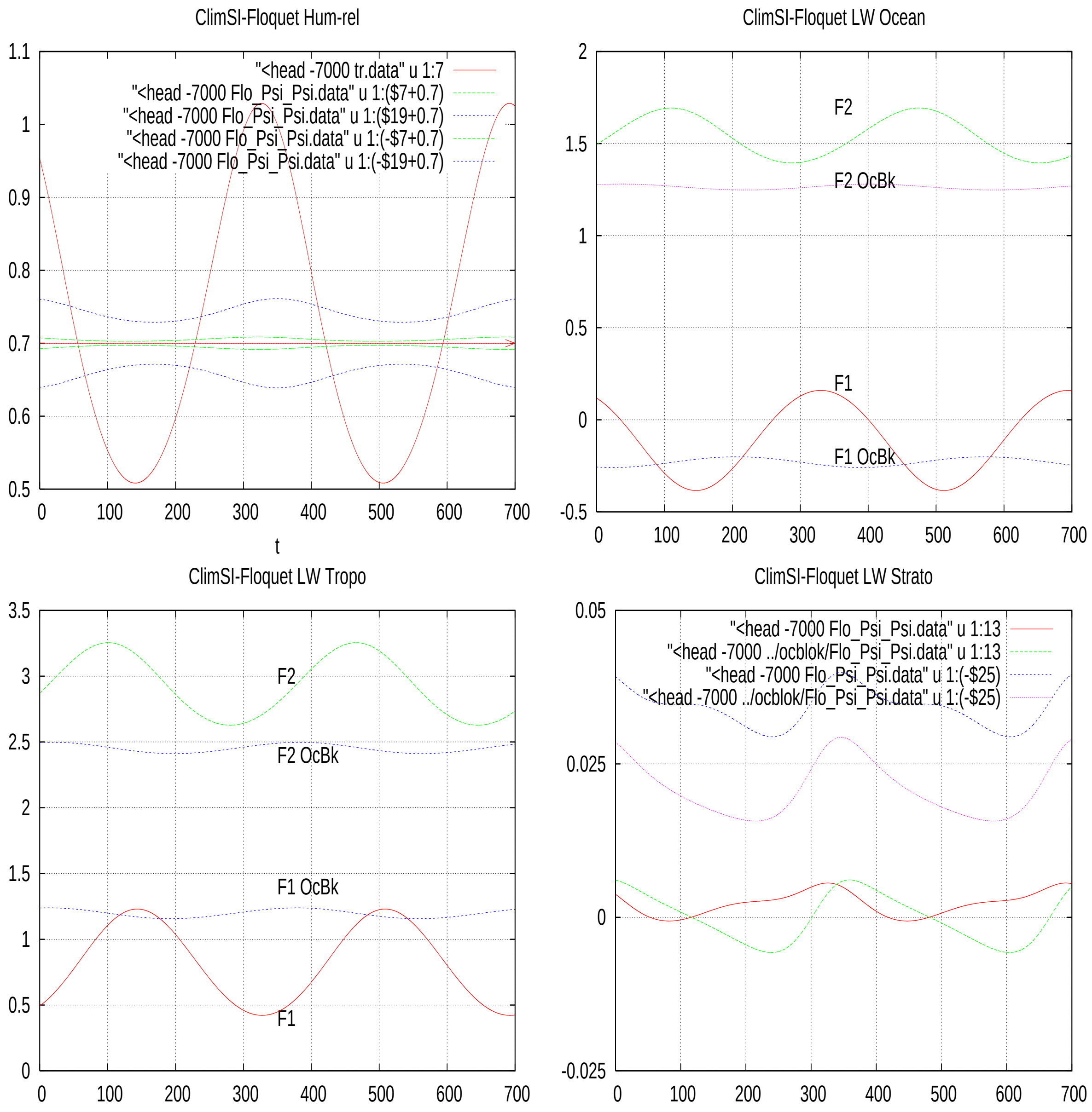

FIG. 10 – Composantes des deux vecteurs de Floquet (océan bloqué en référence.

n´est pas très utile pour analyser les transitoires parce que on trouve une direction de perturbation difficilement assimilable à une ou deux variables spécifiques.

A mon regard, ce F2 doit être lié au couplage de la température de Tropo et Q, après que le temps d´action des perturbations induites par T-strato s´est amorti beaucoup plus rapide que ce F2.

Maintenant on se pose la question, lorsque on remet la concentration de CO2 en variable d'état, que doit-on trouver ? Qu´est ce que Floquet peut nous dire sur l´effet serre ?

D´abord dans notre modèle le concentration de CO2 est fixée : on peut la perturber, elle gardera sa valeur. C´est cet effet qui fait qu'on a des sensibilités asymptotiques différentes de zéro pour la perturbation de CO2 dans notre propagateur. Quand on a système comme ça, Floquet répond en nous donnant un multiplicateur de Floquet constant et égal à 1. Et de cette façon quand on définit un système dynamique avec un variable bloquée, Floquet nous va donner un vecteur de perturbations qui ne bouge pas ($\mu = 1$), donc on aura tout de suite la perturbation de notre système pour $t = \infty$.

On se retrouve aussi avec un deuxième vecteur avec multiplicateur égal à 0.6. Donc comme on a pas changé une autre fois la variable océan plus dure à ce stabiliser on trouvera maintenant avec ce vecteur (à présent F2), la façon que le système tombe sur le valeur asymptotique : soit zéro si on ne perturbe pas le CO2 , c'est-à-dire une perturbation de direction parallèle a F1 si on perturbe le CO2. Lorsque on ne perturbe pas la concentration de CO2 l'évolution de notre système est la même que le système sans avoir [CO2] comme variable d´état. Donc on doit trouver les mêmes vecteurs de Floquet. Et donc comme les vecteurs de Floquet ne dépendent pas de la direction de perturbation et seulement du système, on peut dire que dans notre nouveau système on va trouver le même vecteur F1 d´avant cette fois comme F2. De cette façon on peut dire qu'on avait bien l´évolution asymptotique du système et en particulier aussi pour la tendance à cette valeur asymptotique qui donne l´effet serre.

Donc on a regardant F1 de notre premier système, l'information de comment définit le modèle de Stephane la façon que le climat évolue avec l´effet serre.

3 annexe

3.1 Transfer Evolution Formalism

a. Introduction

En physique on partitionne toujours (en molécules, en particules fluides, en atomes, en éléments différentiels) parce que c´est plus facile comprendre quand on a des éléments“isolés” qui sont liés les uns aux autres par des interactions. Donc pour partitionner on doit définir les interactions entre les parties, et c´est elles qui nous aident a trouver toute l’information.

Le TEF est une formalisme de modélisation de systèmes qui suit ce principe mais dans un espace mathématique.

On a un modèle défini par ses équations d´état.

$$\frac{d\vec{\eta}}{dt} = \vec{G}(\vec{\eta}, \vec{\psi}, t) \tag{32}$$

En donnant des conditions initiales $\vec{\eta}(t_0)$, et avec des conditions limites et forçages connus $\vec{\psi}(t)$, la trajectoire du système est déterminée[1] : on dit que le problème est “bien posé”.

Ici on a un couplage parmi les variables d´état qui peut nous cacher des informations. Donc on partitionne dedans notre espace de variables d´état, et on a l’espace vectoriel $\{\vec{\eta}\}$, ce qui aboutit à la définition d’équations d’état pour chaque sous-espace $\{\vec{\eta_\alpha}\}$:

$$\frac{d\vec{\eta}_\alpha}{dt} = \vec{G}(\vec{\eta}_\alpha, \vec{\varphi}, \vec{\psi}, t) \tag{33}$$

où on remarque l’adjonction de conditions limites supplémentaires $\vec{\varphi}$. Le TEF exige en effet que chaque élément α du système partitionné corresponde à un problème bien posé. Cela a deux conséquences :

- a) chaque élément, dénommé “cellule”, ne doit explicitement pas dépendre de l’état d’un autre élément ;
- b) l’interface introduit par le découpage avec les autres cellules représente de nouvelles conditions aux limites (C.L.) dépendantes.

Si ces nouvelles C.L. sont connues, alors chaque cellule va suivre une trajectoire dite “découplée”. Pour que les cellules suivent leur trajectoires d’ensemble, déterminée par le système global, il faut donc que ces conditions d’interface soient contraintes par le reste du système, ce qui se fait par l’introduction de modèles d’interface, dénommés “transferts” :

$$\vec{\varphi} = \vec{f}(\vec{\eta}, \vec{\varphi}, t) \tag{34}$$

L’équation (34) exprime que les transferts sont à tout instant déterminés par les états, et n’ajoutent donc pas de conditions initiales supplémentaires. La définition de ces transferts correspond ainsi à la notion de **raccordement**. Ces nouvelles variables, “les transferts”, induites par le découpage, introduisent des modèles de couplage entre des éléments-cellules. Ils représentent couramment des contraintes de continuité, ou des flux et des forces dans les modèles physiques, des échanges, des répartitions et des informations dans les modèles macro-économiques.

Mathématiquement, la solution du système (33, 34) fournit la même trajectoire que (32). C’est de cette manière que le TEF met en œuvre la notion de découpage-raccordement. On aboutit en résumé à deux classes distinctes de modèles, et aux deux

[1] entre les éventuelles singularités

types de variables associés. Les **cellules** sont représentées par leur état et définies par des équations d'état, c'est-à-dire donnant leur évolution, alors que les **transferts** sont des équations de contrainte statique[1].

b. Linéarisation et résolution

L'étude des relations entre sous-systèmes est excessivement complexe si on regarde le système complet non-linéaire. Toute l'étude va donc se faire sur le système linéarisé sur une portion de la trajectoire. Le système linéaire obtenu dépend encore continuement du temps, et dans un deuxième temps ce système linéaire est discrétisé.

On considère le système (33, 34), non linéaire, sur une petite section de sa trajectoire (soit entre t_0 et $t_0 + \delta t$), et on détermine l'accroissement $\overrightarrow{\delta\eta}$ de $\vec{\eta}$ et $\overrightarrow{\delta\varphi}$ de $\vec{\varphi}$ par développement de Taylor :

$$\frac{\partial\overrightarrow{\delta\eta}}{\partial t}(\tau) = \vec{G}\Big|_{t_0} + \overline{\overline{\frac{\partial G}{\partial \eta}}}\Bigg|_{t_0}\overrightarrow{\delta\eta}(\tau) + \overline{\overline{\frac{\partial G}{\partial \varphi}}}\Bigg|_{t_0}\overrightarrow{\delta\varphi}(\tau) + \frac{\partial\vec{G}}{\partial t}\Bigg|_{t_0}\tau \tag{35}$$

$$\overrightarrow{\delta\varphi}(\tau) = \overline{\overline{\frac{\partial f}{\partial \eta}}}\Bigg|_{t_0}\overrightarrow{\delta\eta}(\tau) + \overline{\overline{\frac{\partial f}{\partial \varphi}}}\Bigg|_{t_0}\overrightarrow{\delta\varphi}(\tau) + \frac{\partial\vec{f}}{\partial t}\Bigg|_{t_0}\tau \tag{36}$$

On obtient un système d'Equations aux Dérivées Partielles (EDP) baptisé Système Linéarisé Tangent (SLT) en une portion de la trajectoire, avec $\tau \in [t, t+\delta t[$ paramétrisant la trajectoire.

La résolution de ce système linéaire est classique et peut être effectuée, soit en introduisant un schéma temporel, soit par transformation symbolique (Laplace, Fourier, Borel ...). On considère l'application d'un schéma temporel, qui permettra de définir la trajectoire par morceaux. Nous verrons plus loin qu'une transformation symbolique donnerait le même résultat.

L'application du schéma de Crank Nicolson au système (35,36) fournit le système algébrique suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} \overline{\overline{A}}\overrightarrow{\delta\eta} + \overline{\overline{B}}\overrightarrow{\delta\varphi} = \vec{\Gamma}\delta t \\ \\ \overline{\overline{C^+}}\overrightarrow{\delta\eta} - (\mathbb{I} + \overline{\overline{D}})\overrightarrow{\delta\varphi} = \vec{\Omega}\delta t \end{array}\right. \tag{37}$$

avec les matrices et vecteurs introduits définis par :

$$\left\{\begin{array}{l} \overline{\overline{A}} = \mathbb{I} - \frac{\delta t}{2}\,\overline{\overline{\frac{\partial G}{\partial \eta}}}\Big|_{t_0} \\ \overline{\overline{B}} = -\frac{\delta t}{2}\,\overline{\overline{\frac{\partial G}{\partial \varphi}}}\Big|_{t_0} \\ \vec{\Gamma} = \vec{G}\Big|_{t_0} + \frac{\delta t}{2}\,\frac{\partial \vec{G}}{\partial t}\Big|_{t0} \\ \overline{\overline{C^+}} = \overline{\overline{\frac{\partial f}{\partial \eta}}}\Big|_{t_0} \\ \overline{\overline{D}} = -\,\overline{\overline{\frac{\partial f}{\partial \varphi}}}\Big|_{t_0} \\ \vec{\Omega} = -\,\frac{\partial \vec{f}}{\partial t}\Big|_{t_0} \end{array}\right. \tag{38}$$

[1]on peut préférer les qualifier d'instantannées, le terme de "statique" étant utilisé en théorie de la commande

La matrice $(\mathbb{I} + \overline{\overline{D}})$ provient de la partition effectuée sur l'ensemble des transferts, qui introduit des contraintes statiques entre les "objets transferts" du TEF.

Cette formulation répond à notre programme, comme nous allons maintenant le montrer.

Symboliquement la structure matricielle du système (37) est la suivante :

$$\begin{bmatrix} \overline{\overline{A}} & \overline{\overline{B}} \\ -\overline{\overline{C^+}} & \mathbb{I} + \overline{\overline{D}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overrightarrow{\delta\eta} \\ \overrightarrow{\delta\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma\delta t \\ -\Omega\delta t \end{bmatrix}$$

La résolution est conduite en éliminant d'abord les variables d'état, en utilisant la procédure qui permet également d'obtenir :

$$\overrightarrow{\delta\eta} = -\overline{\overline{A^{-1}}}\,\overline{\overline{B}}\,\overrightarrow{\delta\varphi} + \overline{\overline{A^{-1}}}\,\vec{\Gamma}\,\delta t$$

$\overrightarrow{\delta\eta}$ est introduite dans la seconde équation :

$$\overline{\overline{C^+}}\left(-\overline{\overline{A^{-1}}}\,\overline{\overline{B}}\,\overrightarrow{\delta\varphi} + \overline{\overline{A^{-1}}}\vec{\Gamma}\delta t\right) - \left(\mathbb{I} + \overline{\overline{D}}\right)\overrightarrow{\delta\varphi} = \vec{\Omega}\,\delta t$$

$$\left(\mathbb{I} + \overline{\overline{D}} + \overline{\overline{C^+}}\,\overline{\overline{A^{-1}}}\,\overline{\overline{B}}\right)\overrightarrow{\delta\varphi} = \overline{\overline{C^+}}\,\overline{\overline{A^{-1}}}\,\vec{\Gamma}\delta t - \vec{\Omega}\,\delta t$$

Cette équation linéaire est classiquement résolue et donne $\overrightarrow{\delta\varphi}$. On peut alors résoudre chaque équation d'état où tout est connu sauf $\overrightarrow{\delta\eta}$.

3.2 Les equations du modele

Sub-system	State variable	Model
Stratosphere	Average temperature (T_σ) (K)	Capacitance with fixed and uniform lapse rate $C_\sigma \cdot \frac{dT_\sigma}{dt} = \psi_{S\sigma} + \psi_{L\sigma}$
Troposphere	Average temperature at 5000 m (T_τ) (K)	Capacitance with fixed and uniform lapse rate $C_\tau \cdot \frac{dT_\tau}{dt} = \psi_{S\tau} + \psi_{L\tau} + \phi_{s\tau} + \phi_{l\tau}$
Ocean mixed layer	Temperature (θ) (K)	Capacitance with uniform temperature $C_\theta \cdot \frac{d\theta}{dt} = \psi_{S\theta} + \psi_{L\theta} - \phi_{s\tau} - \phi_{l\theta}$
Water vapor	Water vapor content (Q) $(kg\ m^{-2})$	Capacitance with fixed relative humidity gradient (γ_r) $\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{L_v} \cdot (\phi_{l\theta} - \phi_{l\tau})$
Carbon dioxide	CO_2 concentration (CO_2) (ppmv)	Fixed

TAB. 2 – Model sub-systems with state variables and model types

Transfer	Transfer variable(s)	Model
Solar flux	SW budget of troposphere, stratosphere, ocean ($\psi_{S\tau}$, $\psi_{S\sigma}$, $\psi_{S\theta}$) ($W\ m^{-2}$)	constant solar flux shared between ocean, troposphere, stratosphere and reflected flux to space $\psi_{S\sigma} = \alpha_S^\sigma \cdot F_S$ $\psi_{S\tau} = N \cdot \alpha_S^C (1 - \alpha_S^\sigma) F_S$ $\psi_{S\theta} = (1 - A)\left((1 - N) + N \cdot \mathcal{T}_S^C\right)(1 - \alpha_S^\sigma) F_S$ $N = 1 - (1 - N_l)(1 - N_m)(1 - N_h)$
LW flux	LW budget of troposphere, stratosphere, ocean ($\psi_{L\tau}$, $\psi_{L\sigma}$, $\psi_{L\theta}$) ($W\ m^{-2}$)	Malkmus narrow-band radiative module
Sensible heat flux	Surface heat flux ($\phi_{s\tau}$) ($W\ m^{-2}$)	Diffusive term proportional to surface temperature difference $\phi_{s\tau} = h_b \cdot (T_\theta - T_{b\tau})$ $T_{b\tau} = T_\tau - \gamma_\tau \cdot H_m$

TAB. 3 – Transfer models, with transfer variables and model types (Part I)

Transfer	Transfer variable(s)	Model
Precipitation	Surface precipitation and corresponding latent heat flux ($\phi_{l\tau}$) ($W\ m^{-2}$)	Newtonian term nudging tropospheric relative humidity toward target relative humidity $\phi_{l\tau} = -\phi_{l\theta} + L_v \cdot \frac{1}{\tau_p} \cdot (Q - Q^{\infty}(T_\tau))$ $Q^{\infty}(T_\tau)$ is the water vapor content corresponding to the target relative humidity.
Evaporation	Surface latent heat flux ($\phi_{l\theta}$) ($W\ m^{-2}$)	Diffusive term proportional to surface humidity difference $\phi_{l\theta} = k_e \cdot L_v \cdot (P_{sat}(\theta) - r_H \cdot P_{sat}(T_{surf}))$ $P_{sat}(T)$ is the water vapor saturation pressure.
WV temperature	T_{WV} (K)	$T_{WV} = T_\tau$
Cloud cover	High, medium and low level cloud cover (N_h, N_m, N_l) (no unit)	fixed : $N_h = N_{h0}$, $N_m = N_{m0}$ $N_l = N_{l0}$

TAB. 4 – Transfer models, with transfer variables and model types (Part II)

Variable	Value
Surface relative humidity at equilibrium	0.7
Top of the atmosphere altitude	65,000 m
Tropopause altitude	15,000 m
Mean troposphere altitude (H_m)	5000 m
Troposphere lapse rate (γ_τ)	$-6.5 \cdot 10^{-3}\ K\ m^{-1}$
Troposphere heat capacity (C_τ)	$1. \cdot 10^{7}\ J\ K^{-1}\ m^{-2}$
Stratosphere lapse rate (γ_σ)	$3.5 \cdot 10^{-3}\ K\ m^{-1}$
Stratosphere heat capacity (C_σ)	$1.2 \cdot 10^{6}\ J\ K^{-1}\ m^{-2}$
Stratosphere SW absorption (α_S^σ)	12%
High level cloud cover (N_{h0})	22%
High level cloud altitude	14,000 m
Midlevel cloud cover (N_{m0})	18%
Midlevel cloud altitude	6,000 m
Low level cloud cover (N_{l0})	26%
Low level cloud altitude	2,000 m
Cloud LW absorption (α_L^C)	100%
Cloud SW transmitivity ($\mathcal{T}_S^C$)	20%
Cloud SW absorption (α_S^C)	10%

TAB. 5 – Atmosphere parameter values. Sources on atmosphere parameters and cloud properties : Salby (1996) ; Source on cloud covers : http ://isccp.giss.nasa.gov.

Variable	Value
Ocean albedo (A)	0.05
Ocean heat capacity (C_θ)	$2. \cdot 10^8\ J\ K^{-1}\ m^{-2}$
Oceanic mixed layer thickness	$50\ m$
Atmosphere-Ocean sensible heat transfer coefficient (h_b)	$5\ W\ m^{-2}\ K^{-1}$
Evaporation coefficient (k_e)	$0.35 \cdot 10^{-2}\ s\ m^{-1}$
Precipitation characteristic time (τ_p)	5 days
Latent heat of evaporation (L_v)	$2.5 \cdot 10^6\ J\ kg^{-1}$
Incoming solar flux (F_S)	$340\ W\ m^{-2}$

TAB. 6 – Surface parameter values. Data from Salby (1996), except : the atmosphere-Ocean sensible heat transfer coefficient (h_b) and the evaporation coefficient (k_e), that are calibrated in order to have realistic fluxes ; and the precipitation characteristic time (τ_p), that is *ad hoc*, equal to the mean synoptic time scale.

Références

Bode, H. : 1945, *Network Analysis abd Feedback Amplifier Design*. Van Nostrand, New York.

Bony, S., R. Colman, V. Kattsov, R. Allan, C. Bretherton, J.-L. Dufresne, A. Hall, S. Hallegatte, M. Holland, W. Ingram, D. Randall, B. Soden, G. Tselioudis, and M. Webb : 2006, How Well do we Understand and Evaluate Climate Change Feedback Processes ? *J. Clim.*, **19**, 3445–3482.

Hallegatte, S., A. Lahellec, and J.-Y. Grandpeix : 2006, An elicitation of the dynamic nature of water feedback in Climate Change using a 1D model. *J. Atmos. Sci.*, **63**, 1878–1894.

Hansen, J., D. Lacis, D. Rind, G. Rusell, P. Stone, I. Fung, R. Ruedy, and J. Lerner : 1984, Climate Sensitivity : Analysis of Feedback Mechanisms. *Climate Processes and Climate Sensitivity*, J. Hansen and T. Takahashi, eds., Geophysical monograph 29, AGU, volume 5, 130–162.

Manabe, S. and R. Wetherald : 1967, Thermal Equilibrium of the Atmosphere with a given Distribution of Relative Humidity. *J. Atmos. Sci.*, **24**, 241–259.

Salby, M. : 1996, *Fundamentals of Atmospheric physics*. International Geophysics Series, Edited by R. Dmowska and J.R. Holton, Acamdemic Press, San Diego, California, United-States, 626 pp.