

A “new” approach to Climate feedbacks : the Inclusive Feedback Components analysis

All, Août 2008

0.1 Introductions formelles

exclusif versus inclusif Dans l’analyse classique, chaque mécanisme est considéré séparément (cf par ex. Peixoto). Un gain se détermine de l’annulation des autres, d’où la qualification d’analyse **exclusive**. On peut citer Hansen *et al* : an effect “that would exist if all other feedbacks where inoperative”.

Dans la nouvelle approche, il s’agit de caractériser l’importance d’un mécanisme dans la réponse globale vis à vis des autres retenus dans l’analyse, d’où le choix de qualifier cette analyse **d’inclusive**.

Mais cette approche n’est que ‘nouvelle’ car elle est proposée dès 84 dans Hansen *et al*! Voir en effet leur introduction du gain (exclusif) par $g_i = \frac{\Delta T_i}{\Delta T_{tot}}$. Cette définition s’avère correcte avec notre reformulation, mais dans les applications, ils calculent les ΔT_i de manière erronée : un ΔT_i **n’est pas** la réponse du système quand seul le mécanisme i est opérant (analyse exclusive), mais quand seul ce mécanisme est inopérant (inclusif), cf annexe A. On peut comprendre leur analyse erronée qui prend comme vérité immédiate que l’ajout d’un nouveau mécanisme ne peut que rajouter un nouveau ΔT_i — l’intuition a du mal à admettre que c’est faux!

présentation possible : On base la présentation sur un modèle global (1D) de type EBM comme intermédiaire commode pour une présentation allégée mais non triviale. On cherche à caractériser des rétroactions climatiques en prenant comme dans les classiques de l’IPCC la variable test ΔT_s .

1. introduction du SLT, limitation au système à l’équilibre; forme Laplace;
de $\partial_t \eta = f(\eta)$ à $\mu \Delta \eta = A \Delta \eta$;
2. rappel de la forme classique de boucle unique de rétroaction ;
 - (a) le système perturbé analysé en boucle de rétroaction : c’est la température de surface qui est perturbée¹ et analysée, dans la globalité de la réponse du système — structuré ou non en boucles de rétroactions. La boucle se définit par i) le choix de la variable test (ici $\Delta T_s = \langle c | \Delta \eta$ avec $\langle c |$ dernière ligne de la matrice identité I .); ii) on ferme la boucle en rentrant ΔT_s perturbée par ϖ dans le système en sélectionnant un mécanisme dont on analyse l’effet de rétroaction. Le système avec cette structure est alors donné par :

$$\begin{cases} \mu \Delta \eta = A^b \Delta \eta & + |b\rangle \Delta T_s \\ \Delta T_s = \langle c | \Delta \eta + \varpi \end{cases}$$

Ce système reste mathématiquement équivalent à l’original dès qu’on a l’égalité $A = A^b + |b\rangle \langle c|$; sa solution en ΔT_s est alors :

$$\Delta T_s = \frac{1}{1 - \langle c | (\mu I - A^b)^{-1} |b\rangle} \varpi \quad (1)$$

¹ou modèle avec hypothèses verticales à expliciter.

c'est la forme "facteur de rétroaction" $f = \frac{1}{1-g}$;

- (b) Il est utile de faire apparaître l'effet–retour qui s'additionne à la perturbation pour former la variation totale ΔT_s :

$$\Delta T_s = \varpi + \rho(\mu)\varpi, \text{ avec } \rho(\mu) = \frac{\langle c | (\mu I - A^b)^{-1} | b \rangle}{1 - \langle c | (\mu I - A^b)^{-1} | b \rangle} \quad (2)$$

de la forme $\rho = \frac{g}{1-g}$;

- (c) On définit alors en cohérence le système donnant cette composante $\Delta\theta_s = \rho(\mu)\varpi$:

$$\begin{cases} \mu\Delta\eta = A^b\Delta\eta + |b\rangle (\Delta\theta + \varpi) \\ \Delta\theta = \langle c | \Delta\eta \end{cases}$$

qui mène à

$$\Delta\theta = \frac{\langle c | (\mu I - A^b)^{-1} | b \rangle}{1 - \langle c | (\mu I - A^b)^{-1} | b \rangle} \varpi \quad (3)$$

et à $\Delta T_s = \varpi + \Delta\theta$; on appelle $\Delta\theta$ la composante de rétroaction associée au mécanisme identifié à $|b\rangle$.

3. ensuite, l'analyse multiple ;

- (a) on décompose la partie sensible $|b\rangle$ extraite de A à fin d'analyse plus détaillée, c'est-à-dire $|b\rangle = \sum_{j=1,p} |b_j\rangle$. On suppose alors que l'analyse physique conduit à être en mesure de **séparer** des mécanismes responsables de rétroactions du système dans sa réponse à la perturbation ϖ de la température de surface T_s^1 .
- (b) attribution : on est ainsi conduit à identifier chaque contribution à ΔT_s comme suit

$$\Delta\theta_i = \frac{\langle c | (\mu I - A^b)^{-1} | b_i \rangle}{1 - \langle c | (\mu I - A^b)^{-1} | b \rangle} \varpi \quad (4)$$

Au numérateur apparaît g_i le gain de rétroaction attribué au mécanisme i , et au dénominateur la somme de tous les gains analysés, soit

$$\Delta\theta_i = \frac{g_i}{1 - \sum_j g_j} \varpi \quad (5)$$

Cette forme fonction des gains exclusifs est peu propice à l'analyse, car la suppression d'une rétroaction ($g_i = 0$) modifie le dénominateur et ainsi toutes les autres contributions ;

- (c) forme réponse : on montre en annexe que (4) s'écrit aussi $\Delta\theta_i = \langle c | (\mu I - A)^{-1} | b_i \rangle \varpi$, si bien que :

$$\Delta T_s = \varpi + \sum_j \Delta\theta_j = \varpi + \sum_j \langle c | (\mu I - A)^{-1} | b_j \rangle \varpi \quad (6)$$

en fonction cette fois de la matrice A globale du système. Une nouvelle application de l'identité (A1) fournit encore

$$\begin{aligned} \Delta\theta_i &= \langle c | (\mu I - A)^{-1} | b_i \rangle \varpi \\ &= \frac{\langle c | (\mu I - A^i)^{-1} | b_i \rangle}{1 - \langle c | (\mu I - A^i)^{-1} | b_i \rangle} \varpi \end{aligned} \quad (7)$$

dans laquelle on a noté $A^i = A - |b_i\rangle\langle c|$, qui est la matrice réduite dans le cas où seul le mécanisme i est analysé dans une boucle unique de rétroaction ;

¹on précisera cette procédure en introduisant les transferts à la *Liu&Cai*.

- (d) interprétation : chaque terme de la somme de droite est la réponse du système structuré par une seule boucle de rétroaction par $|b_i\rangle$ avec $\rho_i(\mu) = \langle c | (\mu I - A)^{-1} |b_i\rangle$, les autres mécanismes étant ré-intégrés dans le système. On note $g_i^* = \langle c | (\mu I - A^i)^{-1} |b_i\rangle$ ce gain dît *inclusif*.

De cette manière, chaque analyse est effectuée par la réponse du système à la perturbation via un seul mécanisme : chaque nouvelle contribution apporte un nouvel accroissement à la résultante ΔT_s ; on récolte alors à chaque nouvelle analyse une nouvelle composante de ΔT_s liée au mécanisme abordé. Il suffit que les matrices-colonne $|b_i\rangle$ restent indépendantes et que $A = A^b + \sum_j |b_j\rangle \langle c|$.

On a en définitive $\Delta T_s = \varpi + \sum_j \Delta\theta_j$, décomposée en ses *Composantes Inclusives de Rétroaction* $\Delta\theta_j$, $j = 1, p$.

Ainsi, nous avons montré la pertinence de l'analyse de DuB¹, qui examine le système à l'équilibre asymptotique — $\mu = 0$, mais du même coup sa généralisation au système perturbé retournant à l'équilibre dans la limite où le SLT reste valide (faibles perturbations).

On peut noter que cette décomposition reste valable aussi bien pour des perturbations pulse ($\varpi(\mu) = 1$, step ($\varpi(\mu) = \mu$) ainsi que toute fonction du temps.

Dans le cas de fonctions complexes du temps, l'inversion de (6) par exemple pourra fournir des CIR à la dynamique très diverse, donnant accès à des temps caractéristiques de rétroaction riches d'enseignement, cf jas-Hallegatte et al. Ces dynamiques résultent de la sélection (par les $|b_i\rangle$) d'un noyau dynamique commun (donné par $(\mu I - A)^{-1}$ et $\varpi(\mu)$).

Nous allons montrer que cette analyse se généralise aux systèmes hors d'équilibre, en appliquant la formulation introduite dans EPL Lahellec et al.

L'analyse dynamique des rétroactions en composantes inclusives En reprenant la formulation générale de départ, la réponse linéaire à un système perturbé est donnée par le propagateur associé au SLTC :

$$\Delta\theta_i(t) = \langle c | \int_0^t \Phi(t, \tau) |b_i(\tau)\rangle \varpi(\tau) d\tau$$

à la condition que :

$$d_t \Phi(t, \tau) = A(t) \Phi(t, \tau), \quad t \geq \tau \quad \text{et} \quad \Phi(\tau, \tau) = I.$$

Nous avons supposé que le système était spatialement discrétisé, si bien que la matrice Φ représente le propagateur associé au SLTC du système le long de sa trajectoire (ref texbook comme Luenberger). Cette approche classique de la réponse d'un système perturbé généralise ainsi la décomposition précédente, les matrices du systèmes étant à présent dépendantes du temps le long de la trajectoire de référence. Les CIR sont à présent déterminées en fonction du temps dans la limite de validité du SLTC, avec une dynamique commune liée à celle du propagateur, mais de plus sélectionnée et augmentée de celles des $|b_i(t)\rangle$. Notons qu'on a perdu la relation aux gains de rétroaction, ceux-ci étant déterminés par un système aux EDP différent (cf EPL). Dans le cas classique où la perturbation est de type Heaviside — $\varpi(t) = 1$ dans (8) — on définit l'effet-en-retour dû à chaque rétroaction par

$$\rho_i(t) = \langle c | \int_0^t \Phi(t, \tau) |b_i(\tau)\rangle d\tau \tag{8}$$

La question se pose alors de l'intérêt de cette généralité d'application de l'analyse par CIR à l'intercomparaison de modèles effectuée dans le cadre de l'IPCC. Une étape

¹Dufresne Bony Journal of Climate, 2008.

intéressante serait d'effectuer cette analyse en cycle saisonnier des modèles ayant retrouvé leur équilibre¹. On justifie ainsi la section suivante qui explore les systèmes soumis à un forçage périodique.

Analyse des composantes périodiques de rétroaction Le cycle saisonnier du climat exhibe une dynamique de grande amplitude, qui exclue l'approche par le SLT. L'analyse de Floquet du SLTC semble alors l'outil nécessaire ici. Cette approche a déjà été appliquée au climat par M.Ghil et al. qui ont montré le lien entre des vecteurs de Floquet et des phénomènes climatiques importants comme ...

Rappelons brièvement comment on construit cette analyse, le détail étant reporté à l'annexe C.

à faire et à voir (hypothèses, définition de la matrice des vecteurs de Floquet, propagateur).

On veut caractériser le comportement asymptotique de l'effet-en-retour :

$$\varrho(t, 0) = \langle c | \int_0^t \Phi(t, \tau) | b(\tau) \rangle s(\tau) d\tau, \text{ soit } \lim_{n \rightarrow \infty} \varrho(t + nT, 0).$$

Le comportement asymptotique du propagateur dans ce cadre des hypothèses de Floquet est donné par :

$$\begin{aligned} \int_0^{t+nT} \Phi(t+nT, \tau) d\tau = & e^{\Lambda nT} \int_0^t \Psi^F(t) e^{\Lambda(t-\tau)} \Psi^{-F}(\tau) d\tau \\ & + \int_t^{t+T} \Psi^F(t) \left[\frac{I - e^{\Lambda nT}}{I - e^{\Lambda T}} e^{\Lambda(t+T-\tau)} \right]^d \Psi^{-F}(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (9)$$

qui permet de déterminer le comportement asymptotique de l'effet-en-retour pour un système stable, périodiquement forcé :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho(t + nT, 0) = \sum_k \frac{1}{1 - e^{\lambda_k T}} \bar{\varrho}_k(t) + \epsilon(nT) \quad (10)$$

dans laquelle apparaît un effet-en-retour périodique $\bar{\varrho}(t + T) = \bar{\varrho}(t)$ défini par

$$\bar{\varrho}_k(t) = \langle c | \int_0^T e^{\lambda_k(T-\tau)} | \psi_k^F(t) \rangle \langle \psi_k^{-F}(t + \tau) | b(t + \tau) \rangle s(t + \tau) d\tau \quad (11)$$

La décomposition de $|b(t)\rangle$ fournira classiquement alors des CIR périodiques. On trouve ainsi que tous les vecteurs de Floquet contribuent aux CIR, les mécanismes effectuant entre-eux une sélection par ce poids $\langle \psi_k^{-F}(\tau) | b(\tau) \rangle$ intervenant dans $\bar{\varrho}_k(t)$.

On aura en résumé des CIR dont les phases et les amplitudes diffèrent dans l'intra-saisonnier, autrement dit avec un découpage de la ΔT_s variable : bref, on a une variation saisonnière de la contribution au total de chaque effet des rétroactions.

Illustration avec un modèle simple du climat Soit on augmente le modèle de Barsugli-Battisti, soit celui de l'EPL, avec en plus de WV la retro albedo, et si possible ocean et Lapse-Rate. Soit on passe à ClimSI avec la totale ...

Il me semble que cet article étant à destination de l'IPCC, un modèle très simple validant et illustrant les méthodes est plus approprié, alors que ClimSI apporterait un message scientifique de nature différente. De plus, l'intérêt du modèle WVsimple est qu'il colle parfaitement à la vision d'équilibre radiatif, en découplant la température équivalente de rayonnement des lapse-rate et autres ayant pour effet de déterminer cette altitude $T_e q(z_e)$ et *in fine* la surface ΔT_s .

¹l'application au forçage de type rampe pourra faire l'objet d'une ultime section si nécessaire.

0.2 Application aux GCM

On s'aide de la formulation précédente pour analyser la pratique GCM-IPCC.

- **système de base** L'analyse des rétroactions climatiques considère que “la rétroaction purement radiative”¹, à savoir le rayonnement d'un corps noir (le système de référence avec sa structure climatique), est la réponse triviale du climat à un réchauffement – même si les calculs radiatifs au sein de l'atmosphère en présence de gaz-traces et autres aérosols n'est guère triviale. Par chance, cet effet est aussi un effet qui se manifeste instantanément ou quasi, ce qui permet des hypothèses réalistes de perturbation initiale.
- **la variable jauge** Préciser le mode et le rôle de la perturbation au forçage saisonnier $s(t)$. **à voir, en fonction des méthodes d'intercomparaison**; il s'agit peut-être d'articuler le passage entre analyse de sensibilité et de rétroaction. L'analyse climatique privilégie la variable température atm de surface, pour une raison anthropologique évidente (lieu de vie, de ressource et d'industrie). Par exemple, la méthode PRP perturbe directement T_s (même si justification via ΔQ TOA);
- **la perturbation** on veut associer une perturbation initiale en température à un forçage climatiquement réaliste (CO₂, TOA SW, aérosols (Pinatubo), ou cas particuliers : SST... En conséquence, on prétend analyser des sensibilités climatiques en terme de rétroaction, c'est la difficulté qui nous éloigne du formalisme strict des définitions formelles de la rétroaction.
- **sensibilité climatique** L'évolution du climat est considérée comme caractérisant les effets liés aux variations des phénomènes météorologiques (vapeur d'eau et nuages, albedo de surface, profils verticaux, voire, influence du réservoir océanique et échanges entre inter-extra tropiques). Dans le cas du réchauffement global, un step de la concentration de CO₂ perturbe θ_{atm} quasi-instantanément, déclenchant une série de réajustements climatiques. La perturbation est alors un certain profil vertical suivant les nouveaux bilans radiatifs (instantanés). Les rétroactions climatiques modifiant ce paysage vont alors s'établir dans le temps et finalement aboutir à un nouvel équilibre, c'est du moins la vision classique de l'analyse du réchauffement global. Une modification du TOA-SW induit d'autres voies vers un équilibre souvent comparé à celui du CO₂, justifié? voir Hansen et d'autres
- **la verticale** Il faut alors associer des bilans radiatifs aux perturbations en température; ici, commenter les équations d'équilibre → Une difficulté provient du fait qu'il n'y a aucune raison pour que les profils initiaux (la perturbation) et finaux (Planck à l'équilibre) soient les mêmes (à un facteur près — linéarité). On a recours à ce qui semble un artefact d'analyse en introduisant une rétroaction de lapse-rate.
- **l'horizontale** et propositions d'analyse // Colman (moyennes zonales) avec cycle saisonnier. (mais alors, comment estimer l'impact des échanges entre zones?) Isoler une cellule de Walker?
- **l'équilibre** cycle saisonnier et moyenne annuelle; est-il possible d'utiliser le cycle saisonnier actuel pour évaluer des effets du réchauffement — ceci en liaison avec le fait que le cycle saisonnier sollicite plus amplement le climat que le réchauffement, mais avec un filtrage manifestement passe-haut; (S'agit de comparer sur les mêmes SLTC-Floquet deux perturbations : step ou rampe versus cycle saisonnier (+ effet du bruit météo);
- **des régimes** évidemment, si on pouvait caractériser des rétroactions en fonction d'un paramètre climatique, comme le “régime de circulation” de Bony *et al* 2006, eh bien, faudrait le faire!

¹dite par ciel clair, on la dénommera rétroaction de Planck.

– **la pratique** Examiner les différences PRP avec CRF et autres, lien avec hypothèses verticales dans $f(\eta)$.

et terminer par un résumé sur les propriétés des CIR en relation avec les résultats d'intercomparaison publiés (additivité, proportionnalité, etc)

Me semble aller de soi de reporter à une autre étude l'histoire de moyenne des rétroactions *versus* rétroaction moyenne, voire stochastique ...

Lien entre analyse de sensibilité et rétroactions Pour un modèle de climat 1D, le système déterminant une composante $\Delta\theta_i$ de l'effet-en-retour sur la température de surface (scalaire) est le suivant :

$$\begin{cases} (\mu K + P)\Delta\eta = A^i\Delta\eta + |b_i\rangle (\Delta\theta_i + \varpi(\mu)) \\ \Delta\theta_i = \langle c | \Delta\eta \end{cases}$$

où K représente la matrice d'inertie de couches, P la "matrice de Planck" — soit : $\partial_T R$ où R est le vecteur des flux quittant chaque couche, cf L&C. La matrice d'avance de phase complète est ainsi $[P - A]$, avec $A = \sum A_j = \sum |b_i\rangle \langle c|^1$, et où on a de nouveau posé $A^i = A - |b_i\rangle \langle c|$. Dans ce système, on utilise une perturbation arbitraire pour exciter un mécanisme de rétroaction particulier représenté par $|b_i\rangle$. L'analyse en CIR excite ainsi chacun de tous les mécanismes possibles de rétroaction dont la somme est la réponse globale du système — à la perturbation directe près.

La pratique climatologique est de considérer un "forçage externe" — comme un saut de la constante d'ensoleillement (ou une variation astronomique), ou un accroissement de CO_2 ou d'aérosols, ou encore une perturbation localisée ou non de la SST ... On s'intéresse à l'impact de ce changement sur, par exemple, T_s . Il s'agit alors à proprement parler **d'analyse de sensibilité**. Or, ce type d'analyse est systématiquement sollicité pour en induire le rôle des rétroactions comme composantes de cette sensibilité globale. L&C posent ainsi par exemple le système suivant :

$$\partial_t K \Delta T = -P \Delta T + \Delta\varphi_{rad} + \Delta\varphi_{loc-dyn} + \Delta\varphi_{dyn} + \Delta F_{ext} \quad (12)$$

ou presque, puisqu'ils le considèrent à l'équilibre final seulement. On prendra $\Delta\varphi_{dyn}$ nul (les bilans d'échanges horizontaux), notre modèle étant 1D. On a alors un lien évident entre nos $|b_i\rangle \Delta\theta_i$ et leur $\Delta\varphi_i$, et leur analyse via les transferts semble la meilleure façon d'analyser exhaustivement les mécanismes du climat déterminant la réponse globale ΔT_s au forçage ΔF_{ext} .

Comment lier cette sensibilité aux rétroactions précédemment définies? La solution tient dans le choix de la perturbation $\varpi(t)$; en effet, les climatologues — que nous fréquentons avec parcimonie — considèrent la réponse de Planck comme non-significative du climat, Ceci se traduit par le "système sans rétroactions" (on devrait ajouter "climatologiques") :

$$\begin{cases} (\mu K + P)\Delta\eta = \Delta F_{ext} \\ \Delta\theta_0 = \langle c | \Delta\eta \end{cases}$$

qui détermine une réponse de base $\Delta\theta_0(\mu) = \langle c | (\mu K + P)^{-1} \Delta F_{ext}$. Alors, une composante additionnelle de rétroaction est simplement la réponse d'un mécanisme à la perturbation $\varpi = \Delta\theta_0$:

$$\begin{cases} (\mu K + P)\Delta\eta = A^i\Delta\eta + |b_i\rangle \Delta\theta_i + |b_i\rangle \langle c | (\mu K + P)^{-1} \Delta F_{ext} \\ \Delta\theta_i = \langle c | \Delta\eta \end{cases} \quad (13)$$

¹là je triche en fait, en supposant que "tout passe par la surface", ce qui revient à annuler une matrice A^b n'apparaissant pas dans les rétroactions listées. C'est peut-être ici qu'il faudrait introduire l'hypothèse du lapse-rate constant, mais j'y arrive pas. On peut tenter $A\Delta\theta = A|1\rangle \Delta\theta_s + A(\Delta\theta - |1\rangle \Delta\theta_s)$, faire des hypothèses sur A ou même sur la forme ΔF_{ext} pour justifier une forme simple, mais je cale — voire les conséquences next paragraphe (le "à vérifier").

qui fournit (cf 4)

$$\Delta\theta_i = \frac{\langle c | (\mu K + P)^{-1} | b_i \rangle}{1 - \langle c | (\mu K + P)^{-1} | b \rangle} \langle c | (\mu K + P)^{-1} \Delta F_{ext} \rangle \quad (14)$$

La réponse globale, quant à elle, est donnée par :

$$\Delta\theta_{tot} = \langle c | (\mu K + P - | b \rangle \langle c |)^{-1} \Delta F_{ext} \rangle \quad (15)$$

que l'on peut encore écrire :

$$\Delta\theta_{tot} = \langle c | (\mu K + P)^{-1} (I - | b \rangle \langle c | (\mu K + P)^{-1})^{-1} \Delta F_{ext} \rangle \quad (16)$$

On peut vérifier formellement que la somme des contributions donne bien la réponse globale :

$$\begin{aligned} \Delta\theta_0 + \sum \Delta\theta_i &= \left(1 + \frac{\langle c | (\mu K + P)^{-1} | b \rangle}{1 - \langle c | (\mu K + P)^{-1} | b \rangle}\right) \langle c | (\mu K + P)^{-1} \Delta F_{ext} \rangle \\ &= \frac{1}{1 - \langle c | (\mu K + P)^{-1} | b \rangle} \langle c | (\mu K + P)^{-1} \Delta F_{ext} \rangle \end{aligned} \quad (17)$$

Les égalités (15) et (17) doivent être vérifiées pour tout ΔF_{ext} ; on doit donc vérifier l'égalité :

$$\frac{\langle c | (\mu K + P)^{-1} | b \rangle}{1 - \langle c | (\mu K + P)^{-1} | b \rangle} \stackrel{?}{=} \langle c | (\mu K + P)^{-1} [I - | b \rangle \langle c | (\mu K + P)^{-1}]^{-1} \rangle$$

ou encore en croisant les inverses :

$$\langle c | (\mu K + P)^{-1} [I - | b \rangle \langle c | (\mu K + P)^{-1}] \stackrel{?}{=} (1 - \langle c | (\mu K + P)^{-1} | b \rangle) \langle c | (\mu K + P)^{-1}$$

le terme de droite se transforme en :

$$\begin{aligned} &\langle c | (\mu K + P)^{-1} - \langle c | (\mu K + P)^{-1} | b \rangle \langle c | (\mu K + P)^{-1} \\ &= \langle c | (\mu K + P)^{-1} [I - | b \rangle \langle c | (\mu K + P)^{-1}] \end{aligned}$$

et s'identifie au terme de gauche, vérifiant l'égalité entre la réponse globale et la somme des CIR augmentée de la perturbation directe¹. Les égalités restent vraies pour toute matrice de base plus complète² $[\mu K + P - A^b]$, **mais pas** si on laisse une partie du modèle hors d'analyse avec : $| b \rangle \langle c | \rightarrow | b \rangle \langle c | + A^b$.

Détermination pratique des caractéristiques de rétroaction Pour un forçage ΔF_{ext} appliqué successivement au modèle :

(encore à bien vérifier³ :)

analyse inclusive

1. on détermine $\Delta\theta_{tot}$;
2. on construit une liste de mécanismes **séparés** contribuant à la rétroaction globale du système ;
3. pour chacun des mécanismes de la liste, on en gèle un seul et on relève $\Delta\theta^i$ (qui n'est pas le $\Delta\theta_i$ recherché!) ;

¹c'était quasi évident en considérant la (5), mais pourquoi renoncer à un calcul plus sophistiqué ?

²à rapprocher du terme d'OHU ($\lambda_P + \lambda_O$) de DuB.

³incluant la proposition de StepH du 29.12.08, il reste un doute sur le choix ici arbitraire de la perturbation ΔF_{ext} .

alors, on a

- les effets-en-retour $\rho_i = \frac{\Delta\theta_{tot} - \Delta\theta^i}{\Delta\theta^i}$ ($= \frac{g_i^*}{1 - g_i^*}$);
- et les gains inclusifs $g_i^* = \frac{\Delta\theta_{tot} - \Delta\theta^i}{\Delta\theta_{tot}}$;

bizarrement, la procédure ne définit pas $\Delta\theta_i$, parce que la perturbation de base est à multiplier par f^i qui reste inconnu (cf fig. 1). C'est ce qui est choquant et réduit l'intérêt de l'analyse inclusive à ne donner définitivement que la proportion relative du réchauffement $\frac{\Delta\theta_{tot}}{\Delta\theta^i}$, ainsi que ce gain attaché à l'ouverture d'une seule boucle de rétroaction¹.

[∞] **Mais on peut ajouter que c'est nécessaire, car gains et réponses restent indépendants de l'amplitude de la perturbation dans le cadre linéaire.** Ceci revient encore à dire que, pour un modèle de SLT, l'application de ΔF_{ext} est source d'analyse de sensibilité du système qui y répond avec tous ses mécanismes. Ainsi, $\Delta\theta_{tot}$ est la sensibilité de la T surface à cette perturbation. On peut remarquer que ce résultat, contrairement à l'analyse de rétroaction, est obtenu en appliquant effectivement une perturbation. Ou sinon, il peut être estimé linéairement de l'analyse de rétro à condition de connaître l'amplitude de la perturbation. Et à l'opposé de la question du réchauffement, c'est bien l'intérêt de l'analyse de rétroaction que de découpler la caractérisation du système de l'amplitude des perturbations ! Ici, on veut le beurre et l'argent du beurre.

Dans ce cas comme on l'a montré précédemment, le lien avec les rétroactions se fait en proportionnant cette excitation sur chaque boucle, c'est-à-dire que la perturbation n'est plus arbitraire. Mais on a vu de plus qu'elle nécessitait le choix d'un modèle de base, qui exclut toute autre mécanisme associé à rétroaction.

Comment redéfinir une procédure inclusive semblable ? Soit une liste exhaustive traitée inclusivement. On a par définition $\Delta\theta_{tot} = (1 + \sum \rho_i)\varpi$ (c'est les ρ_i qui sont définis inclusivement) : avec ϖ arbitraire, la réponse globale lui est proportionnelle. Il suffit de se donner l'une ou l'autre pour déterminer les sensibilités. Dit encore autrement, dès qu'on s'intéresse aux réponses, ce sont les effets-en-retour qui sont pertinents en inclusifs, et les gains exclusifs, mais les premiers se calculent avec la trajectoire et se généralisent au SLTC, pas les deuxièmes.

analyse exclusive

1. on détermine $\Delta\theta_{tot}$;
2. on construit une liste de mécanismes **séparés** contribuant à la rétroaction globale du système ;
3. on gèle tous ces mécanismes de rétroaction et on relève $\Delta\theta_0$;
4. pour chacun des mécanismes de la liste, on gèle tout sauf un seul et on relève ΔT^i ;

alors, on a

$$- \Delta T^i = \frac{g_i}{1 - g_i} \Delta\theta_0, \text{ d'où on déduit } g_i = \frac{\Delta T^i}{\Delta T^i + \Delta\theta_0}, \text{ les gains exclusifs de rétroaction ;}$$

¹On peut s'en convaincre en transformant l'équation de base des gains, pour le cas le plus simple où ΔF_{ext} se réduit à perturber T_s :

$$(1 - g)\Delta\theta_{tot} = \varpi \rightarrow (1 - g + g_i - g_i)\Delta\theta_{tot} = \varpi, \text{ ou encore}$$

$$(1 - \frac{g_i}{1 - g + g_i})\Delta\theta_{tot} = \frac{g_i}{1 - g + g_i}\varpi = \Delta\theta_0^i$$

il en suit que $\Delta\theta_{tot} - \Delta\theta_0^i = \frac{g_i}{1 - g} \Delta\theta_0$, alors que la composante inclusive est la même fraction fois ϖ , c'est le message de la fig. 1. Autrement dit, la réponse inclusive doit être associée à $\Delta\theta_0^i$ pour obtenir par sommation $\Delta\theta_{tot}$, c'est la seule contrainte qui fixe la perturbation à appliquer ; ceci renforce le sens de "inclusif" : les composantes ne peuvent être désolidarisées, elles partagent la réponse globale quand le système est intégré ; dès qu'on le touche, hop ! elles se modifient, ce qui peut encore se voir comme un avatar de la relation non-linéaire entre les gains, qui s'additionnent, et les réponses.

– le gain total $g = \sum g_i$, et le facteur global de rétroaction $f = \frac{1}{1-g}$;

Ainsi, l'analyse inclusive se contente d'affirmer que la suppression d'un mécanisme provoque une réduction relative de $\frac{\Delta\theta_{tot}}{\varpi} \rightarrow \times(1 - \rho_i)$, chaque mécanisme ajoutant sa réduction propre dès lors qu'il s'agit de mécanismes séparables.

Mais dès qu'une liste est supposée exhaustive, laissant un dernier paquet attribué au $\Delta\theta_0$, avec un certain arbitraire, les deux méthodes trouvent leur correspondance :

- en analyse inclusive :
 - les composantes inclusives $\Delta\theta_i = \rho_i\Delta\theta_0$, et alors $\Delta\theta_{tot} = \Delta\theta_0 + \sum \Delta\theta_i$;
 - les facteurs partiels $f^i = \frac{\Delta\theta^i}{\Delta\theta_0} (= \frac{1}{1-g+g_i})$, cf A-8, car c'est bien g_i^* qui a été annullé);
 - les gains exclusifs $g_i = \frac{f-f^i}{ff^i} = \frac{\Delta\theta_0}{\Delta\theta^i}g_i^*$, d'où $\Delta\theta_i = g_i\Delta\theta_{tot}$;
 - et le facteur global net de rétroactions $f = \frac{\Delta\theta_{tot}}{\Delta\theta_0}$;
- en analyse exclusive :
 - les composantes inclusives $\Delta\theta_i = \frac{g_i}{1-g}\Delta\theta_0 = \frac{\Delta T^i}{\Delta T^i + \Delta\theta_0}\Delta\theta_{tot}$;
 - d'où les effets-en-retour $\rho_i = \frac{\Delta T^i}{\Delta T^i + \Delta\theta_0} \frac{\Delta\theta_{tot}}{\Delta\theta_0}$;

On a en particulier $g_i = \frac{\Delta\theta_i}{\Delta\theta_{tot}}$, c'est-à-dire que l'on retrouve la "définition" de Hansen *et al*, mais pour une détermination très différente des $\Delta\theta_i$.

On peut alors vérifier l'exhaustivité des rétroactions retenues; le gain total $g = \sum g_j$ doit être compatible avec $f = \frac{1}{1-g}$ ou de même $\Delta\theta_{tot} = \Delta\theta_0 + \sum \Delta\theta_j$. Comme y insiste JLD¹, comment comprendre intuitivement que ce gain — qui bien évidemment — ne dépend pas des autres rétroactions, de par sa définition même : $g_i = \langle c | (\mu K + P)^{-1} | b_i \rangle$, puisse encore se définir "climatologiquement" par $g_i = \frac{\Delta\theta_i}{\Delta\theta_{tot}}$, qui dépend de tout ! Il se trouve que le reste du système s'introduit multiplicativement, cf (A-8). Mais il reste bien qu'une fois ce gain déterminé il est acquis, qu'on ai ou pas effectué d'autres déterminations. Ainsi, comme dans DuB, ajouter un nouveau mécanisme tel que l'OHU — qui ne modifie pas la réponse de Planck — change chacune des réponses inclusives $\Delta\theta_i$, mais aussi $\Delta\theta_{tot}$, laissant le rapport $\frac{\Delta\theta_i}{\Delta\theta_{tot}}$ inchangé!

Commentaires Si la liste n'est pas exhaustive, la procédure 3-inclusive va définir un modèle de base avec une matrice supplémentaire $\mu K + P - A^b$. La réponse globale est évidemment non-ambigüe, mais l'analyse donnant (14) et l'égalité (16) reste valable. On n'a donc aucun moyen de vérifier la compatibilité. En pratique, le point 3 est obtenu par une procédure simple, car "rien ne bouge", que les profils verticaux de température; mais alors, si la liste en 2 n'est pas exhaustive, on ne retrouvera pas les sommes? Il faut du coup encore envisager une autre méthode de perturbation avec le $\varpi = \Delta\theta_0$ en abandonnant le forçage ΔF_{ext} , etc tout restant possible à ce stade. Ou alors justifier la méthode PRP avec ses avantages comparés — ce qu'il faudra faire dans tous les cas ! (je laisse sans comprendre la question 29/12/08.)

alors laquelle des deux ? puisque, une fois qu'on a dit ça, pourquoi serait-on particulièrement satisfait de cette introduction de l'analyse inclusive, je vous demande de ne pas vous arrêter de le demander ? Tout ne tient semble-t-il qu'à cette forme du $\rho_i = \frac{g_i^*}{1-g_i^*}$: qu'a-t-elle de si enthousiasmant ? Elle dit que la réponse du système avec

¹communication particulière du 13/10/08.

une seule boucle de rétroaction de gain g_i^* est une composante inclusive, ce qui permet sa détermination numérique en même temps que le calcul de trajectoire, et ceci pour un nombre quelconque de composantes. Ce n'est pas le cas de l'analyse exclusive. L'une est ainsi généralisable, l'autre pas. Ça se voit encore en remarquant que les gains inclusifs et effets-en-retour ne dépendent pas de $\Delta\theta_0$, contrairement aux gains exclusifs.

simplement à l'équilibre Il y a peut-être un intérêt à reprendre la présentation dans le cas // DuB. On écrit successivement en accord avec les trois diagrammes équivalents,

$$\text{que } f = \frac{1}{1-g} = \frac{\frac{1}{1-g+g_i}}{1 - \frac{1}{1-g+g_i}g_i} = f^i \times \frac{1}{1-g_i^*}.$$

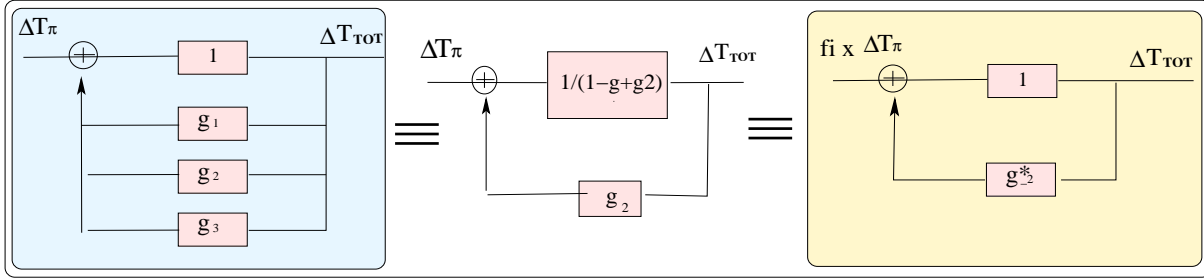


FIG. 1 – Introduction du gain inclusif en deux étapes.

Pour conclure que g_i^* est le gain du système avec une seule boucle de rétroaction.

En introduisant les “facteurs de rétroaction” λ_x , on retrouve les résultats de DuB, avec :

$$\begin{aligned} \Delta G &= \Delta F_P + \sum \Delta F_x = \lambda \Delta T_s; & \lambda &= \lambda_P + \sum \lambda_x; \\ g_x &= -\frac{\lambda_x}{\lambda_P}; & g_x^* &= -\frac{\lambda_x}{\lambda - \lambda_x}; & \rho_x &= -\frac{\lambda_x}{\lambda}; \\ g &= \sum g_x = 1 - \frac{\lambda}{\lambda_P}; & f &= \frac{\lambda_P}{\lambda}; & f^x &= \frac{\lambda_P}{\lambda - \lambda_x}; \end{aligned} \quad (18)$$

où on a noté ΔG le bilan radiatif TOA comme dans Zhang.

interprétation d'analyses avec GCM Le but étant d'abord de comprendre les différentes méthodes, de les classer et critiquer avec le formalisme précédent, de faire les liens entre eux, en déduire des CIR, etc

– sensibilité au forçage CO_2

- Hansen *et al* 84, peut-on les qualifier de fondateurs? En tout cas, tout y est ou presque des méthodes appliquées par la suite. On pourrait baser notre intro sur un hommage à la leur.
- Expérience climato. GCM 3D grossier avec slab-ocean de 67m à flux figés (36x12x9). comparaison $s_0 \times 1.02$ et $2 \times \text{CO}_2$. Définition ref Bode du gain par $g_i = \frac{\Delta\theta_i}{\Delta\theta_{\text{tot}}}$; lien entre f et transitoires, et référence au temps d'établissement des fb.
- rétroactions, par transplantation des résultats moyennés du 3D dans un code 1D¹, avec séparations extrêmes, genre : Q moyen, puis effet de répartition verticale $\bar{Q}(z)$; même chose sur cld amount plus cld altitude. A remarquer que la base est calculée avec $2 \times \text{CO}_2$ par exemple par le 1D qui inclue un ajustement vers le profil donné au modèle (voir discussion L-R).

¹ce qui me semble une excellente méthode si je puis me permettre.

Problème, il faut imaginer leurs procédures, car elles sont mal décrites bien que détaillées : ex le L-R fb est calculé en reportant dans le 1D “pair by pair” le L-R du 3D moyen, hum ? Quant au tableau I résumant l’analyse des fb, impossible de faire le lien avec la Fig 6.

A chaque fois, c’est $\Delta\theta_s$ qui est analysé pour g et f — mais impossible de reconstituer leurs calculs, qui semblent de plus partir sur une base fautive (mésinterprétation de $\Delta\theta_{ow}$ etc. Mais ils fournissent aussi les cartes du forçage radiatif induit, donc lien possible à faire avec PRP.

- je passe sur diverses analyses de climat glaciaire et scénario futur. Mais un point de vue en annexe intéressant sur le transitoire et f d’équilibre en annexe A, à discuter dans notre contexte.
- Schneider *et al* jas-99 : sensibilité de ΔT_s moyenne globale 5 ans à doublement de CO_2 ; nuages fixés, WV radiatif fixé, par tranches d’altitude, inter ou extra tropiques. Considérations intéressantes sur le L-R effect, discussion z_e vu du haut mais aussi z'_e vu de la surface ! GCM basse résolution avec slab-ocean, nuages et sea-ice albedo prescrits. Comparaison des sensibilités en 1x et 2x CO_2 avec WV prescrite ou pas pour LW radiation. Moyenne des sensib locales. Reste effet cloud emissivity(T).
- Méthode des trois trajectoires : pour unconstrained, différence ΔT_s classique entre 2x et 1x CO_2 ; on bloque en spécifiant les champs du 1x pour le 2x run, clouds et WV. Seuls les calculs radiatifs utilisent ces champs spécifiés, si bien que le reste, convection profonde, condensation etc restent pronostiques. Avec une spécificité qui est de prendre comme unconstrained WV le 2x avec WV du 2X prescrit ! Cycle diurne ici, ils montrent également l’incohérence introduite par une moyenne temporelle (jour ou mois), incohérence entre SW et LW interaction.
- Résultats, table I : ΔT_s avec ou sans blocage Cloud et WV par tranches de tropo. ΔT_{sw} totale de 2.3 K (2.05 avec cld fixés). Cartes humidité eau précipitable hum rel etc. Bilan atm non atteint, qui prend 2.5 W m^{-2} mais les cèdent aux surfaces continentales. Hum rel globale ne change pas, mais à l’équateur, le L-R diminue (haute trop +3.2 K contre 2.2 K surface “suivant la moist adiabatique du climat plus chaud” ??¹, et ainsi un **L-R f-b négatif**.
- Feedback-analysis : $\Delta T_s = \frac{1}{1-g} \Delta T_0$, $\Delta T_0 = 1.08 \text{ K}$ sans f-b (cld et WV). on applique successivement la formule avec ΔT_0 et différentes $\Delta T_{si} = \frac{1}{1-g_{cld}-g_{wv}}$, et $g_{wv} = g_{BL} + g_i + g_2 + g_3$ en annulant les bons avec table I donne table II ($\Delta T_s^{wv} = 2.05 \text{ K}$). On peut en déduire les **IFC** ($= \frac{g_i}{1-0.53} \Delta T_0$) pour cld (0.14 K), BL (0.30 K), low tropo (0.41 K), mid tropo (0.18 K), et hi tropo (0.18 K), avec tropo (0.78 K) ; total=1.22+1.08=2.3. Soit encore par tranche de 100 hPa dans le même ordre en 10^{-2} K par tranche de 100 hPa : 11, 14, 8, 8 → low tropo est dominante, la z_{eq} étant dedans — ils disent p 1651 entre 600 hPa tropiques à 500 aux hautes latitudes, alors que les basses sont entre 750 et 450 hPa², justifiant leur découpe verticale. Sur la bande intertropicale, on trouve des IFC dues à la tropo seule de 0.34 K, pour 0.50 extra-tropiques. *remarque sur ces découpages par zone ou par bande, on n’explique pas l’influence des échanges, même si la somme reste correcte ; il s’agit donc de contributions tous échanges confondus, alors qu’on pourrait en plus introduire des rétros dynamiques.*
- Colman McAvaney 97 et Colman 2003 97 : Juillet perpétuel GCM slab oc. $\pm 2 \text{ K}$ SST exp. et champ CO_2 Focus sur Cld, soil moisture, Kuo-Tiedke L-R. Sensibilité

¹en contradiction avec la Fig. 5 ?

²pour info **modélisation**, la z_{eq}^\dagger est entre 800 et 700 hPa aux hautes, et entre 600 et 400 aux basses.

principale à L-R et WV, trouvées dépendantes des C.L. LW cld amount fb est négatif (g_i0), f de hi et mid décroît), contrairement à cld z avec z_hi croissant. Cld sensi dépendantes du schéma convectif. Analyse en latitudes x p, 5 expés. Rien de neuf sur PRP mais discussion méthodo sur moyenne Clear-sky, linéarité.

- Soden *et al* 2006 critique de PRP ± 2 K pour decorrélation entre nuages et WV. Les “kernel” radiatifs sont la réponse nette TOA à un +1 K sur une maille, ou l'équivalent en Q à RH constant. Discussion des résultats latitude x pression, puis application à la comparaison de 14 GCM. Les kernels sont déjà dispersés, etc On a $\lambda_x = K^x dx$. et encore discussion entre la définition de Cld radiative forcing et ΔR_{cld} .
- Bony *et al* 2006 et Dufresne Bony 2008
- Partial Radiative Perturbation
 - Cess *et al* 90 Evolution avec ± 2 K SST à l'équilibre juillet perpétuel. Sensibilité TOA à SW, LW clear ou overcast. Focus sur Cld f-b entre 19 GCM.
 - Zhang *et al* 94 PRP sur $\Delta T_S = \pm 2$ K. Sensibilité pour total, clear-sky et overcast à Planck, LR, WV et Cld. Même méthode que Cess pour comparaison entre versions du même CCM2, avec trois différents schémas de convection ; analyse latitude x pression des sensibs (LW et/ou SW). Cycle diurne, sol etc juillet-perpet (sol profond juillet climatique).
 - Méthode (justifiée par dérivées partielles des flux TOA) : pour $\Delta\theta_s$ trouvé, avec ΔQ , on regarde les bilans TOA en prenant successivement profils de $T + \Delta T_{SST}$, $T + \Delta T$, la différence étant attribuée au L-R, etc S'agit donc d'analyse exclusive. *que serait cette mise-en-pratique d'une analyse inclusive ?* Ils montrent que somme des off-line PRP donne le quasi-même bilan que le run, d'où ils déduisent que la réponse à $\Delta T = 4$ K est linéaire. Le gain permet une analyse en nuages par tranche de bas / moyen / haut **comparer à Schneider**. Analyse du Cld rad fb en sus. Les sensibs en latitudes montrent non pas la non-linéarité, mais l'effet non pris en compte de la dynamique (me semble-t-il, contrairement à leur analyse de surplus PRP en Antartique, qu'ils attribuent à un “découplage surface / tropo” ?). C'est ainsi que la décomposition amplifie la sensib entre -30 et 30, pour la sous-estimer au-delà. Le terme de Planck est pris du LW en clear sky, puisqu'alors l'effet du SW est à inclure uniquement dans le WV. L'analyse Cld-fb sépare les effets T, LR et Clds, et par tranche d'altitude.
 - résultats Le modèle avec la convection la plus réaliste (et la plus forte) amplifie à la fois les Clds tropopause, Q, mais aussi la plus forte augmentation de T \Rightarrow la plus forte rétro négative.
 - discussion. La convection dans l'ITCZ assèche la tropo (RH \searrow), augmente T surtout en haut (LR \searrow) ; Q augmente bien sûr mais pas autant que Q_{sat} . En tout, on trouve plus d'émission LW (fb négatif). Du point de vue de l'analyse en rétroaction, on peut dire que ΔT_{SST} déclenche plus de convection profonde, augmentant T et Q (rétros directes), Mais en ce qui concerne Clds, ils sont fonction de ces deux grandeurs primitives, avec à la fois formation de nuages (impact Rad), limitation de WV (précip), et redistribution de chaleur et eau par les mouvements de convection. Dans un premier temps, on dirait formellement que la rétro des Clds devrait s'analyser de la contribution des deux autres. Mais voilà, on dit causalement que la convection est au cœur des rétros directes, alors quoi ?

- la rétroaction WV dans la variabilité climatique
- Hall et Manabe 99 J. of Clim.. Méthode des trois trajectoires sur 1000 ans. Analyse spatio-temporelle de la variabilité du climat non-perturbé (pas de cycle diurne). Comparaison avec 2xCO₂. Le blocage de WV est fait en prenant les champs complets de WV sur 50 ans moyennés sur une année : on a donc un champ complet par jour, chaque jour étant la moyenne sur 50 ans — en montrant au passage le biais qui serait introduit par une moyenne spatiale. Ils notent de plus que l'effet WV sur SW est toujours présent. Ils font en réalité un calcul inclusif et corrigent ensuite par PRP évaluation des autres gains. Pour ce gain global de 0.83, ils trouvent $g_{WV} = 0.39$ (on a 0.37, $f = 1.58$). Notre rapport des déviations standards est de 1.78, pour le leur entre 1.9 (Fig. I) et 1.53 qu'ils donnent dans le texte ps. 2333. Le problème, c'est que nous trouvons une réduction pour les signaux de périodes plu courtes que 10 ans, pas eux¹. Enfin, leur trajectoire avec rampe de CO₂ semble indiquer un gain négatif au démarrage, mais manque de résolution.
- Slingo *et al* 2000
 - variabilité géographique du climat pour en inférer la sensibilité à WV. ERA 15 (clear sky) versus Hadley GCM (HadAM3 SST prescrite) pour tester l'inférence. La pertinence par rapport au réchauffement climatique tient à l'aspect temporel des différence spatiales utilisées. On est donc comme pour l'observation, sans analyse par coupure de boucle.
 - **méthode** Relation entre les moyennes annuelles de W (column Water-Vapor en Kg m⁻²) Γ (normalized greenhouse effect) et l'OLR par régression sur scatter-plot des points de grille moyennés sur un mois :
 $\ln W = a_1 + b_1 T_{SST}$, $\Gamma = a_2 + b_2 T_{SST}$, $\Gamma = a_3 + b_3 \ln W$.
 Normalized greenhouse-effect : $\Gamma = \frac{R_s - R_{TOA}}{R_s}$, où R_s est le flux émis par la surface et R_{TOA} est le flux LW par ciel clair quittant le TOA. On observe des b_i tous positifs, ce qui indique que WV-fb est actif — à ces échelles de variations. Comparaison avec le même régressions sur les 10 points obtenus par moyenne annuelle des dix années 79-88 d'ERA (clear-sky ice-free oceans). En régressant à mort du bruit, ils trouvent une cohérence avec les moyennes mensuelles par point de grille.
 - **résultats** $\Gamma \propto 4.0 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1} \text{ SST}$. $d_{T_s} R_{TOA} \approx 2. \text{ Wm}^{-1} \text{ K}^{-1}$, plus faible que pour $BB^y = 3.6$. Leurs scatter plots montrent des effets très net de la dynamique aux hautes et basses latitudes.
 - comparaison avec HadCM3 de réchauffemet climatique : l'effet du CO₂ modifie $d_{T_s} R_{TOA}$, ce qui complique la comparaison, mais W idem. En déduisent l'impossibilité d'observer l'effet OLR du réchauffement avec satellites. Il faut donc enlever de g l'effet du CO₂, ce qu'ils tentent en effectuant un calcul radiatif à CO₂ de base mais températures HadCM3, et, OK. Une remarque sur l'exclusion de régions (sea-ice, land) qui ne modifient pas les résultats. Analyse des profils verticaux humidité, le L-R n'a qu'une faible influence sur $\frac{d\Gamma}{dT_s}$.
 - on peut faire le lien entre $\frac{d\Gamma}{dT_s}$ et notre analyse, puisque

¹et comme le remarque stepH, ceci étant dû à quasi-absence de perturbation de type atm maîtresse, ce qui supprime l'intervention de notre pôle rapide dans leur fig. I

$d_{T_s} R_{TOA} = \lambda_P + \lambda_{WV} + \dots$, et que R_s est connu ou BB^y - calculable :

$$\begin{aligned} \Gamma &= 1 - \frac{R_{TOA}}{R_s}; & d_{T_s} R_s &= 4\sigma T_s^3; \\ b_2 &\approx \frac{1}{R_s} \left[4 \frac{R_{TOA}}{T_s} - \sum \lambda_i \right] \end{aligned} \tag{19}$$

application numérique, avec $BB^y \approx 3.6$ ci-dessus, $T_s = 287.6$ K et $F_{TOA} = 260$ W m⁻² de Slingo p 3086 , et $\sum \lambda_i \approx 1.27$ (global warming GCMs) de DuB, ça donne un b_2 de 0.005 au lieu de 0.0031 à 0.0044 clear-sky du papier. Ou plus directement les tables donnent $d_{T_s} R_{TOA}$ entre 2.41 (CLERA) et 1.9 (HadCCM3), comparables à DuB $\lambda_{P+WV} = 2.24$. Par contre, la valeur de OHU de DuB n'explique pas la valeur pour HadGHG de 0.18 m⁻²K⁻¹, mais on n'a pas le OHU de ce cas.

On peut plus globalement en conclure une certaine pertinence du lien entre variabilité géographique et sensibilité du climat au réchauffement par PRP. C'est pour notre analyse un challenge qui interroge à la fois l'analyse en Floquet pour les aspects temporels et aussi les sensibilités par la moyenne, Slingo ayant montré avec débruitage scabreux des sensibilités comparables entre régression sur les scatter de points en moyenne mensuelle (mais un seul mois d'avril 85 ERA montré) et celle des 10 points annuels des moyennes globales.

- Cloud feedback and others
- Wetherald Manabe 88
 - GFDL GCM, ajustement humide, cycle saisonnier; doublement de CO₂, focus sur Clds fb.
 - introduction de la PRP, du L-R, comparaison des modèles avec ou pas Cld-fb; Intro des λ // Dickinson 1D modèle, par dérivées partielles (par "convenience in this study"). convention de signe des λ qui donnent un flux sortant (Planck positif) contraire à DuB ...
 - analyse de l'effet d'équilibre statique sur modifs Clds. Effets des hauts basses lat supplante l'accroissement des bas aux hautes lat, ce qui donne un gain négatif aussi pour global Clds; de plus, l'accroissement des bas se produit en hiver, c'est-à-dire par faible ensoleillement. Les λ sont assez différents des actuels avec cet ancêtre de GCM, sauf Planck et WV.
- Cai, Liu et Cai 2008

0.3 La rétroaction du lapsus vertical

Bon, eh bien, dans la mesure où ce problème résiste, je propose d’aborder une discussion aux contours du problème, en sachant que naîtra la lumière.

c’est un problème Tentons de poser le problème. Il s’agit de construire un modèle dynamique permettant de critiquer la pratique. Ce “L-R feed-back” est de fait introduit de la pratique des utilisateurs de GCM par la PRP, conduits à la détermination des rétroactions par sensibilité des flux TOA à une perturbation — de la SST par exemple. La question se pose comme on l’a vu de déterminer un modèle de base, c’est-à-dire sans aucune rétroaction que radiative, pour passer des sensibilités aux rétroactions. Or, contrairement aux processus physiques — que l’on a proposé de tracer à partir des flux effectivement calculés dans les modèles, aucune définition de variable ou de mécanisme n’est liée dans les modèles — sauf éventuellement dans des modèles simplifiés — à une modification exclusive du gradient vertical de T en tant que tel. Il apparaît indirectement, via la température potentielle virtuelle par exemple, dans la stabilité atmosphérique, et ainsi, aussi bien dans les modèles de couche limite atmosphérique que dans les divers modèles de convection profonde ou prou.

Mais alors, à qui attribuer le changement de profil vertical de la température ? Ce profil est clairement dépendant des divers mécanismes impliqués dans les rétroactions en souffrance d’analyse. La solution PRP adoptée est de séparer l’effet radiatif LW dû à ce profil perturbé en deux termes : l’un uniquement dû à une perturbation uniforme du profil — effet de base ou “Planck response”, le complément étant attribué par définition au “Lapse-Rate feedback”. Ainsi, l’état de base que nous devrions définir serait un système répondant radiativement à la perturbation et tendant à l’équilibre au moins vers une réponse de type $|1 > \epsilon$, c’est-à-dire une perturbation verticalement uniforme.

Bon, mais c’est pas forcément pertinent, car on ne répond pas à la question de quels mécanismes sont responsables de ce L-R fb. Et même, cette pratique définit une rétroaction — prenons celle du WV — en conservant le profil originel de température et en modifiant uniquement l’humidité spécifique : on prend le profil d’équilibre atteint par le modèle perturbé et on effectue un calcul purement radiatif avec ce champ de Q . Il apparaît ainsi que la rétroaction par WV n’inclue pas les modifications de profils de température inhérentes aux processus qui sont intimement liés à la redistribution de Q , à savoir : évaporation/précipitations, turbulences et convections (on reste en 1D). Les PRP s’en tirent en attribuant à WV ce L-R fb introduit de la pragmatique, en justifiant comme pour notre propre discussion de la stabilité verticale.

En ce qui nous concerne après cette introduction, la définition d’un modèle séparant les effets de L-R ne semble être possible que par une manipulation formelle. Ceci dit, un tel modèle serait pertinent s’il permettait de distribuer son effet entre les rétroactions de processus : on aurait ainsi des rétroactions attribuables à chaque processus à L-R figé et à L-R libre. De plus on disposerait de ce fameux modèle de base, à savoir celui donnant “la réponse de Planck”, toute matrice additionnelle devant être analysée en processus de rétroaction. Enfin, un tel modèle permettrait d’étendre la pratique PRP à l’analyse dynamique, voire de proposer une pratique différente. Ceci dit pour justifier ce jeu laborieux de tourner autour du pot, **le lecteur pourra passer cet exercice et aller directement aux conclusions, page 20**

Alors tournons, et pour ce faire, étudions le modèle d’état suivant :

$$(\mu kI + P - A)\Delta\eta = \Delta F_{\text{ext}} \quad (20)$$

qui est le SLT du modèle perturbé par un forçage externe arbitraire ΔF_{ext} . On ne considère que les températures ($\Delta T \equiv \Delta\eta$), et on a simplifié en supposant n couches de masses égales, avec la matrice diagonale d’inertie $K = kI$.

Le jeu trouble de la moyenne, première Il est très tentant de modifier un peu l'approche PRP en introduisant non pas leur réponse de base $|1\rangle \Delta T_{\text{SST}}$, mais la moyenne verticale — l'écart à celle-ci donnant le L-R recherché. On obtient un modèle de la moyenne en sommant les lignes de (20) et en posant $\Delta\eta = \Delta\theta^* + |1\rangle \Delta\bar{\theta}$:

$$\begin{cases} (\mu k I + P - A)(\Delta\theta^* + |1\rangle \Delta\bar{\theta}) & = \Delta F_{\text{ext}} \\ (\mu k + \langle \frac{1}{n} | (P - A) | 1 \rangle) \Delta\bar{\theta} + \langle \frac{1}{n} | (P - A) \Delta\theta^* & = \langle \frac{1}{n} | \Delta F_{\text{ext}} \end{cases} \quad (21)$$

en remarquant que la somme des anomalies est nulle : $|1\rangle \Delta\theta^* = 0$.

S'il se trouvait par hasard que ΔF_{ext} provoque $\Delta\theta^* = 0$, la réponse du système serait donnée par $(\mu k + \langle \frac{1}{n} | (P - A) | 1 \rangle) \Delta\bar{\theta} = \langle \frac{1}{n} | \Delta F_{\text{ext}}$. Avec, suivant le terme d'inertie, $\langle 1 | (P - A) | 1 \rangle$, qui donne le bilan radiatif TOA provoqué par n couches de température augmentée de $\Delta\bar{\theta}$.

Une naïve tentative d'éliminer tout-de-go $\Delta\theta^*$, donne :

$$\begin{aligned} & (\mu k + \langle \frac{1}{n} | (P - A) | 1 \rangle - \langle \frac{1}{n} | (P - A) | 1 \rangle) \Delta\bar{\theta} \\ & = \mu k \Delta\bar{\theta} = \langle \frac{1}{n} | \Delta F_{\text{ext}} - \langle \frac{1}{n} | (P - A) (\mu k I + P - A)^{-1} \Delta F_{\text{ext}} \end{aligned} \quad (22)$$

Le troisième facteur suivant le terme d'inertie $+\langle \frac{1}{n} | (P - A) | 1 \rangle$ est donc attribuable au L-R et annule le second terme. De même, la somme des perturbations nettes par couche $\langle 1 | \Delta F_{\text{ext}}$ est la perturbation globale entrant dans le système à L-R fixé ($\Delta\theta^* = 0$), augmentée de l'effet des perturbations ayant provoqué un L-R.

À l'équilibre ($\mu = 0$), le système dégénère en $0 \Delta\bar{\theta} = 0$, c'est le genre de problème qu'on rencontre singulièrement avec les modèles de moyenne. Pour obtenir ce modèle à l'équilibre, on peut récrire le système $\Delta\theta^* + |1\rangle \Delta\bar{\theta} = (\mu k I + P - a)^{-1} \Delta F_{\text{ext}}$ et sommer pour obtenir

$$\Delta\bar{\theta} = \langle \frac{1}{n} | (\mu k I + P - A)^{-1} \Delta F_{\text{ext}} . \quad (23)$$

La perturbation moyenne est alors une moyenne des perturbations, ce qui ne nous apprend pas grand chose.

Le jeu trouble de la moyenne, deuxième On définit cette fois la moyenne en l'associant à une variable de Lagrange contraignant les anomalies à être de somme nulle :

$$\begin{cases} (\mu k I + P - A)(\Delta\theta^* + |1\rangle \Delta\bar{\theta}) & = \Delta F_{\text{ext}} \\ 0 \Delta\bar{\theta} & = \langle \frac{1}{n} | \Delta\theta^* \end{cases} \quad (24)$$

technique que nos lecteurs reconnaîtront (cf Matriochka). L'équation singulière attachée à $\Delta\bar{\theta}$, lorsque l'on y élimine $\Delta\theta^*$ connue de la première, réintroduit en effet la moyenne et on trouve le même résultat (23) que précédemment. Introduisons un effet-en-retour en posant comme d'habitude $A = A^b + |b\rangle \langle c|$ et en prenant $\Delta F_{\text{ext}} = |b\rangle \varpi$ comme perturbation :

$$\begin{cases} (\mu k I + P - A^b)(\Delta\theta^* + |1\rangle \Delta\bar{\theta}) & = |b\rangle (\Delta\theta_s + \varpi) \\ 0 \Delta\bar{\theta} & = \langle \frac{1}{n} | \Delta\theta^* \\ \Delta\theta_s & = \langle c | \Delta\theta^* + \Delta\bar{\theta} \end{cases} \quad (25)$$

On se retrouve avec un effet-en-retour dépendant d'un mécanisme intermédiaire, comme dans l'annexe A (cf A-11). L'élimination de $\Delta\theta^*$ donne le système couplant les deux variables scalaire :

$$\begin{cases} \Delta\bar{\theta} + \langle \frac{1}{n} | (\mu k I + P - A^b)^{-1} | b \rangle \Delta\theta_s = \langle \frac{1}{n} | (\mu k I + P - A^b)^{-1} | b \rangle \varpi \\ (-1 + \langle c | 1 \rangle) \Delta\bar{\theta} + (1 - \langle c | (\mu k I + P - A^b)^{-1} | b \rangle) \Delta\theta_s \\ & = \langle c | (\mu k I + P - A^b)^{-1} | b \rangle \varpi \end{cases} \quad (26)$$

On remarque que l'équation de $\Delta\theta_s$ se découple alors de $\Delta\bar{\theta}$, puisque $(-1 + \langle c|1\rangle) = 0$, et on retrouve le gain classique attaché à $\Delta\theta_s$. Mais conservons cependant cette somme, $\langle c|$ marquant "ce qui est passé par $\Delta\theta^*$ ", en éliminant $\Delta\bar{\theta}$; on obtient

$$\begin{aligned} & -(-1 + \langle c|1\rangle) \langle \frac{1}{n} | (\mu kI + P - A^b)^{-1} | b \rangle + (1 - \langle c| (\mu kI + P - A^b)^{-1} | b \rangle) \Delta\theta_s \\ & = \langle c| (\mu kI + P - A^b)^{-1} | b \rangle \varpi - (-1 + \langle c|1\rangle) \langle \frac{1}{n} | (\mu kI + P - A^b)^{-1} | b \rangle \varpi \end{aligned}$$

et enfin, en regroupant ces termes en $\langle c|$:

$$\begin{aligned} & (1 - \langle c - \frac{1}{n} | (\mu kI + P - A^b)^{-1} | b \rangle - \langle \frac{1}{n} | (\mu kI + P - A^b)^{-1} | b \rangle) \Delta\theta_s \\ & = \langle c - \frac{1}{n} | (\mu kI + P - A^b)^{-1} | b \rangle \varpi + \langle \frac{1}{n} | (\mu kI + P - A^b)^{-1} | b \rangle \varpi \quad (27) \\ & = \langle c| (\mu kI + P - A^b)^{-1} | b \rangle \varpi \end{aligned}$$

Cet exercice nous donne a) un gain globalement inchangé — ce qui est raisonnable si ce dernier système est mathématiquement équivalent à l'originel; b) une sparation possible en deux "sous-gains"

$$\begin{aligned} g_{L-R} & = \langle c - \frac{1}{n} | (\mu kI + P - A^b)^{-1} | b \rangle \\ g_m & = \langle \frac{1}{n} | (\mu kI + P - A^b)^{-1} | b \rangle \end{aligned} \quad (28)$$

le gain g_m est pris d'une moyenne de températures perturbées, et le premier fait apparaître la matrice-ligne

$$\langle c - \frac{1}{n} | = \left[-\frac{1}{n}, \quad -\frac{1}{n}, \quad \dots, \quad \frac{n-1}{n} \right] = \langle \gamma | \quad (29)$$

qui prend ainsi la différence entre l'effet de $\Delta\theta_s$ et la moyenne de l'effet des autres; il s'agit d'une définition possible du L-R, on peut donc lui attribuer ce sous-gain! On ne peut qualifier ces machins que de sous-gains, puisqu'ils apparaissent ou disparaissent ensemble par annulation de $|b\rangle$. Alternativement, on pourrait choisir d'annuler $\langle \gamma |$, et il faudrait alors prendre $\langle c | = \langle \frac{1}{n} |$, c'est-à-dire définir comme variable-jauge la moyenne!

Globalement, on a décomposé $|b\rangle \langle c|$ en $|b\rangle \langle \gamma| + |b\rangle \langle \frac{1}{n}|$. Ces résultats peuvent dès lors se décliner en floplant la Woodbury avec cette matrice de base $A_0 = \mu kI + P - A^b$:

$$\begin{aligned} g_{L-R}^* & = \langle \gamma | (\mu kI + P - A^b - |b\rangle \langle \frac{1}{n}|)^{-1} |b\rangle \\ & = \langle \gamma | \left[A_0^{-1} + \frac{A_0^{-1} |b\rangle \langle \frac{1}{n}| A_0^{-1}}{1 - \langle \frac{1}{n}| A_0^{-1} |b\rangle} \right] |b\rangle \quad (30) \\ & = g_{L-R} \left(1 + \frac{g_m}{1 - g_m} \right) = \frac{g_{L-R}}{1 - g_m} \end{aligned}$$

et de même pour g_m^* :

$$\begin{aligned} g_m^* & = \langle \frac{1}{n} | (\mu kI + P - A^b - |b\rangle \langle \gamma|)^{-1} |b\rangle \\ & = \langle \frac{1}{n} | \left[A_0^{-1} + \frac{A_0^{-1} |b\rangle \langle \gamma| A_0^{-1}}{1 - \langle \gamma| A_0^{-1} |b\rangle} \right] |b\rangle \quad (31) \\ & = \frac{g_m}{1 - g_{L-R}} \end{aligned}$$

qui tous deux prennent donc la forme standard de gains inclusifs. Sous la forme réponse, on aurait coupé l'effet-en-retour en deux termes :

$$\begin{aligned}\rho &= \rho_m + \rho_{L-R} \\ &= \langle \frac{1}{n} | (\mu k I + P - A^b - | b \rangle \langle c |)^{-1} | b \rangle \\ &\quad + \langle \gamma | (\mu k I + P - A^b - | b \rangle \langle c |)^{-1} | b \rangle\end{aligned}\quad (32)$$

Faut reconnaître que ça a de la gueule, mais a-t-on pour autant débusqué ce fameux modèle de base ? Écrivons ce modèle de v-lapsus :

$$\begin{cases} (\mu k I + P - A^b - | b \rangle \langle \frac{1}{n} |) \Delta \eta = | b \rangle (\Delta \theta_s^* + \varpi) \\ \Delta \theta_s^* = \langle \gamma | \Delta \eta \end{cases}\quad (33)$$

Le v-lapsus de surface $\Delta \theta_s^*$ ne change pas si on perturbe $\Delta \eta \rightarrow \Delta \eta + | 1 \rangle \epsilon$, et on peut vérifier que les termes en ϵ s'annulent en effet lors de l'élimination de $\Delta \eta$ perturbé. On a donc bien un modèle avec rétroaction pure de v-lapsus. Mais comme on l'a déjà remarqué, le modèle de base ne peut se définir par suppression de ce seul L-R. Il faut quand même supprimer les autres : retour à la case départ, *en notant cependant qu'on a une candidate pour décomposer une fonction de rétroaction "passant ou pas" par le L-R.*

Le jeu trouble de la moyenne, troisième Repartons de PRP : le modèle de base est purement radiatif et il répond par $\Delta \eta = | 1 \rangle x$. Quelque chose du genre

$$P \Delta \eta = \Delta F_{\text{ext}} \Rightarrow \Delta \eta = | 1 \rangle x ; \quad (34)$$

à l'équilibre, qui n'a de solution que pour une unique direction de ΔF_{ext} . Il faut clairement imaginer un mécanisme supplémentaire — mettons $\Delta \varphi$ — qui donne une telle solution. On aurait $P | 1 \rangle x = \Delta F_{\text{ext}} + \Delta \varphi = P \Delta \eta + \Delta \varphi$ d'où à choisir x fonction scalaire arbitraire de $\Delta \eta$ pour ce mécanisme :

$$\Delta \varphi = P | 1 \rangle x - P \Delta \eta ; \quad (35)$$

Prenons x comme moyenne verticale des températures ($x = \Delta \bar{\theta} = \langle \frac{1}{n} | \Delta \eta$). On est conduit à examiner un système où la modification du modèle de base est compensée par une rétroaction, comme ça :

$$\begin{cases} [\mu K + P(I - | 1 \rangle \langle \frac{1}{n} |)] \Delta \eta = -P | 1 \rangle (\Delta \bar{\theta} + \varpi) \\ \Delta \bar{\theta} = \langle \frac{1}{n} | \Delta \eta , \end{cases}\quad (36)$$

système mathématiquement quasi équivalent au système originel, à un bémol près que nous allons expliciter. Remarquons que la formulation dépend du profil de base adopté, ici $| \pi_0 \rangle = | 1 \rangle x$, mais le système obtenu posera les mêmes problèmes. Problème, car à l'équilibre, le système de base est défini par une matrice singulière — en effet $\det(I - | 1 \rangle \langle \frac{1}{n} |) = \det(1 - \langle \frac{1}{n} | 1 \rangle) = 0$, et tout vecteur $| 1 \rangle x$ est dans son noyau. Mais hors d'équilibre, on aurait

$$g_x = - \langle \frac{1}{n} | \left[\mu K + P(I - | 1 \rangle \langle \frac{1}{n} |) \right]^{-1} P | 1 \rangle \quad (37)$$

qui par la magie du Woodbury-feedback se transforme en :

$$g_x = - \frac{\langle \frac{1}{n} | (\mu K + P)^{-1} P | 1 \rangle}{1 - \langle \frac{1}{n} | (\mu K + P)^{-1} P | 1 \rangle} \quad (38)$$

On peut déjà tirer une leçon de l'exercice, qui est que le système modifié introduit une matrice singulière qui rend l'analyse par le gain scabreuse à l'équilibre. Par contre, la réponse globale est :

$$\sigma = 1 + \rho_\chi(\mu) = (1 - \langle \frac{1}{n} | (\mu K + P)^{-1} P | 1 \rangle) \varpi(\mu), \quad (39)$$

réponse du système à une perturbation de sa valeur moyenne. Alors, prenant le système de base, on peut toujours définir une perturbation $-P|1\rangle \varpi(\mu)$ et considérer la réponse de la valeur moyenne à cette perturbation, on trouvera ce même $\rho_\chi(\mu)$, et par extension au SLTC :

$$\rho_\chi(t) = - \langle \frac{1}{n} | \int_0^t \Phi(t, \tau) P(\tau) | 1 \rangle \varpi(\tau) d\tau. \quad (40)$$

Bien reprenant notre SLT, une impulsion appliquée initialement à cette valeur moyenne ($\varpi(\mu) = 1$) donne asymptotiquement une réponse globale nulle ($1 - 1$). La réponse à un forçage perpétuel aussi. Bon me direz-vous, c'est normal, puisqu'on n'a pas globalement modifié le système! On a créé une rétroaction qui s'oppose à une réponse différente du système modifié, c'est pas mal, non?

On peut le voir autrement : si on pouvait supprimer cette rétroaction, c'est-à-dire faire $P|1\rangle = 0$ dans le système (36), on pourrait ajouter à $\Delta\eta$ une perturbation homogène ($\Delta\eta + |1\rangle x$) sans changer le terme de gauche de l'équation de $\Delta\eta$ à l'équilibre, grâce à la singularité. La rétroaction s'oppose à ce changement, et comme P est non-singulière, on ne peut de toute manière annuler cette rétroaction, qui met en jeu la somme des sensibilités des couches à chacune des autres.

Bref, on a trouvé un pseudo-mécanisme qui s'oppose au changement de la moyenne, mais ce qu'on cherche, n'est-ce pas au contraire un mécanisme qui s'oppose au changement de L-R? On voit bien que la question est de nature différente, car s'il n'existe qu'une direction de perturbation à L-R nul, on a une infinité de L-R non nuls. *Mais il faut remarquer que notre recherche est passée de la quête d'un système de base donnant un certain profil comme solution à l'équilibre, à celle d'un système **insensible à une modification de la perturbation**.*

N'y-a-t-il pas derrière tout ça une sorte de développement de profils en fonctions de base ($\frac{1}{|\Delta\eta|} \Delta\eta = a_0 f_0 + \sum a_i f_i$), avec f_0 de direction la diagonale principale de l'espace de phase $|1\rangle$?

On pourrait tenter de construire une série de vecteurs P^{-1} -orthogonaux : $\langle f_i | P^{-1} | f_j \rangle = \delta_{ij} \alpha_i$, en tirant partie des propriétés de P . En effet, par ciel clair, la faible épaisseur optique de l'atmosphère permet d'affirmer que P est diagonale dominante à diagonale positive. Elle n'a aucune raison d'être symétrique en raison de la décroissance de T , mais on peut en prendre la partie symétrique $P_s = \frac{1}{2}(P + P^\dagger)$ et laisser de côté sa composante anti. Alors P_s est symétrique et strictement définie-positive : on peut décomposer $P_s = \sum_i \frac{1}{\alpha_i} | f_i \rangle \langle f_i |$ avec des poids positifs. La réponse à chaque "mécanisme radiatif $| f_i \rangle$ " perturbant avec ce profil est

$$1 + \rho_i = 1 - \langle f_i | (\mu K + P_s)^{-1} | f_i \rangle, \quad (41)$$

c'est-à-dire que ce mécanisme s'oppose à cette perturbation, mais on peut remarquer que chaque "matrice de base" est singulière, car $(P_s - \frac{1}{\alpha_i} | f_i \rangle \langle f_i |) | P_s^{-1} f_i \rangle = 0$. *3 décembre : suivaient des considérations sans suite ... La suite est à présent plus bas.*

On garde cependant l'exercice suivant. On considère un système où on coupe P en deux, avec des poids $\alpha P + (1 - \alpha)P$, et on analyse en SVD : $P = U w V^\dagger$. A l'équilibre, on obtient

$$1 - \langle c | P^{-1} | b \rangle = 1 - g = 1 - \frac{1}{\alpha} g - \frac{(1 - \alpha)^2}{\alpha} \sum \frac{w_i}{\alpha(w_i - 1) - 1} \langle c | P^{-1} | u_i \rangle \langle v_i | P^{-1} | b \rangle \quad (42)$$

c'est-à-dire qu'on a simplement décomposé un gain en contributions pondérées, avec un poids pouvant varier de 0^+ à 1. **Et alors**¹ ?

Conclusions de l'exercice Il y a peut-être dans la discussion qui précède moyen de faire des choses, mais il me semble finalement que le problème est mal posé. Notre point de départ est une pratique (PRP) qui définit pragmatiquement ce gain de L-R, mais pourquoi ? On se fourvoie dans ce problème par notre absence aux discussions qui ont mené à cette pratique.

Je fais l'hypothèse que la **question initiale** était la suivante. Considérons la rétroaction WV : elle est associée, certes, à une redistribution de Q, mais de manière évidente également en T. Alors, des profils obtenus à l'équilibre, comment séparer ce qui est effectivement dû à WV de ce qui est une réponse purement radiative ? Je pense que devant l'impossibilité de répondre avec justesse, on a trouvé un compromis qui a le mérite de la simplicité (une des règles de Charney), à savoir : attribuer à cet effet de base (Planck) la réponse par ciel inchangé à L-R constant², la différence étant attribuée au WV. Si nous pouvons faire avancer l'analyse, la question du L-R fb est alors tout autre :

- le modèle de base purement radiatif est

$$K \partial_t \Delta \eta_0 = -P \Delta \eta_0 \quad [+ \Delta F_{\text{ext}}] \quad (43)$$

(n'est-ce pas évident ? réponse : non, cf plus bas *additions*) ;

- pour une perturbation ΔF_{ext} , le profil de base est $\Delta \eta_0 = P^{-1} \Delta F_{\text{ext}}$, la réponse purement radiative à l'équilibre. Dans une analyse de rétroaction, elle est ainsi $\Delta \eta_0 = (\mu K + P)^{-1} | b(\mu) > \varpi(\mu)$, en attribuant volontairement l'inertie atmosphérique à cette réaction purement radiative, car elle n'est ni plus ni moins physiquement évitable ;
- du point de vue du modèle, on peut certainement répondre aux questions posées, mais :
- comment améliorer l'analyse d'une simulation PRP **évitant** la réponse par le Lapse-Rate ?

c'est à cette grande œuvre que nous allons à présent nous atteler.

addition suivant discussion avec JLD du 11-12-08 *Les climatologues attribuent au L-R une certaine importance a priori. Voilà comment je réinterprète la chose : a) la décroissance de $T(z)$ explique le comportement du réchauffement climatique, cf modèle du z_{eq} dans EPL, à savoir qu'une remontée du niveau d'émission équivalente z_{eq} diminue l'OLR à profil donné, menant finalement au gain négatif du WV³ ; b) en l'absence d'eau, "l'ajustement sec" se traduit par cette conservation de la valeur du gradient vertical. On peut alors concevoir que ce "modèle de base" recherché comporte non seulement la partie Planck (et l'inertie), mais en plus un modèle d'ajustement sec (comme ce mécanisme supplémentaire envisagé dans la moyenne troisième page 18). Du coup, ma proposition serait que :*

- le modèle de base est bien représenté par $\mu K + P$, inertie et Planck, et un profil à l'équilibre associé $\Delta T_0(z)$;
- on a une rétroaction "planétaire" liée à l'ajustement sec (\rightarrow profil ΔT_s) ;
- le profil de $\Delta T_s(z)$ — résultant des deux précédents mécanismes se trouve être grossièrement celui de l'équilibre radiatif pour les planètes "sèches" ;

¹Il y a encore la définition d'un modèle de la moyenne comme dans **première** qui consiste à régulariser le système des anomalies en éliminant le terme en $\mu k \Delta \bar{\theta}$ et en supprimant une ligne, mais ça ressemble au système en annexe B et comme je ne trouve pas de notation satisfaisante pour traiter des sous-matrices et sous-sommes de lignes ou colonnes, je laisse de côté cet exercice.

²reportons la question du ciel clair ou pas.

³voir par exemple Schneider *etal*, *jas* 99.

- on suppose ainsi que la perturbation de SST induise du L-R C^{st} en l'absence de WV, mais c'est difficile à vérifier ;
- d'où il appert que le supplément est alors attribué au WV et au reste ;
- enfin, tout le monde peut se tromper ...

Du point de vue de notre analyse, on ne change ainsi pas de modèle de base, mais on pourra séparer les effets à L-R C^{st} des gains de rétroaction imputés à WV, cld etc.

de la décomposition du modèle de base La piste que nous suivons, c'est d'être à même de décomposer un gain ou une réponse en fonction des "réponses de base" de P . On a en effet que si $P = U[w]^d V^\dagger$, il est possible d'associer les composantes de tout forçage dans la base de $U : \Delta F_{ext} = \sum \alpha_i |u_i\rangle$ avec celles du profil perturbé dans sa base V : chaque forçage de base $w_i |u_i\rangle$ aura comme solution à l'équilibre $|v_i\rangle$, puisque $P|v_i\rangle = w_i |u_i\rangle$.

Parallèlement, tout gain exclusif se pourra décomposer en

$$g = \langle c | P^{-1} | b \rangle = \sum \frac{1}{w_i} \langle c | u_i \rangle \langle v_i | b \rangle \quad (44)$$

A partir de ces évidences, il est possible de décomposer selon les mécanismes ou les profils que l'on veut. Par exemple, $|1\rangle$ se projette dans la base V , on sait y associer un forçage dans U , et ainsi, pour un forçage donné, son complément à ce qui donne $|1\rangle$, je viens alors de dire qu'il est possible de donner la composante d'une réponse due au L-R, non ?

Et pire, si on a ces poids, on peut donner au GCM le profil du forçage correspondant au L-R bloqué ou non. Conduisons cet exercice à son terme (**à faire**).

de la décomposition de la matrice de base On introduit une notation pour l'analyse d'une matrice en ses "composantes de rétroaction" ainsi, pour la matrice de Planck :

$$P = \begin{bmatrix} \bar{P} & , & |\bar{p}\rangle \\ \langle \bar{p} | & , & \bar{p} \end{bmatrix} \quad (45)$$

alors, son inverse est

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{P}^{-1}(I + \underline{p} | \bar{p} \rangle \langle \bar{p} | \bar{P}^{-1}) & , & -\bar{P}^{-1} | \bar{p} \rangle \underline{p} \\ -\underline{p} \langle \bar{p} | \bar{P}^{-1} & , & \underline{p} \end{bmatrix} \quad (46)$$

où on a noté $\underline{p} = (\bar{p} - \langle \bar{p} | \bar{P}^{-1} | \bar{p} \rangle)^{-1}$.

On peut remarquer l'importance de ce terme $\bar{p} - \langle \bar{p} | \bar{P}^{-1} | \bar{p} \rangle$ en analysant la conséquence d'une perturbation de la SST, en tant que condition limite, comme dans PRP. On perturbe $\Delta\theta_s = \varpi$, c'est-à-dire pas comme dans le TEF mais en figeant la SST. Alors, \bar{p} est ce qui est émis par cette couche perturbée de 1 K, $\bar{P}^{-1} | \bar{p} \rangle$ la perturbation induite sur la température des autres couches, et $-\langle \bar{p} | \bar{P}^{-1} | \bar{p} \rangle$ le rayonnement qui revient à la première, d'où un bilan net : ce qu'elle émet moins ce qu'elle reçoit. Et comme ce qu'elle n'as pas reçu et ce que les autres n'ont pas reçu est parti plus haut, on doit encore trouver que ce bilan est le bilan TOA. Pour le vérifier, calculons ce ΔG . Le profil de base est donné par

$$\begin{aligned} \bar{P} \Delta \bar{\eta}_0 + | \bar{p} \rangle \varpi &= 0, \text{ d'où :} \\ \Delta \bar{\eta}_0 &= -\bar{P}^{-1} | \bar{p} \rangle \varpi \end{aligned} \quad (47)$$

Pour le bilan TOA, on a

$$\Delta G = \langle 1 | P \Delta \eta_0 = \langle 1 | \bar{P} + \langle \bar{p} | \Delta \bar{\eta}_0 + \langle 1 | \bar{p} \rangle \varpi \quad (48)$$

soit, en remplaçant $\Delta\bar{\eta}_0$ par sa valeur :

$$\begin{aligned}\Delta G &= (-\langle 1|\bar{p}\rangle - \langle \bar{p}|\bar{P}^{-1}|\bar{p}\rangle + \langle 1|\bar{p}\rangle + \bar{p})\varpi \\ &= (\bar{p} - \langle \bar{p}|\bar{P}^{-1}|\bar{p}\rangle)\varpi\end{aligned}\quad (49)$$

Ainsi, perturber seulement la première couche, c'est équivalent à dire que son bilan net est aussi le bilan net TOA (sortant, comme la convention sur les λ), et on a

$$\boxed{\lambda_P^{PRP} = \bar{p} - \langle \bar{p}|\bar{P}^{-1}|\bar{p}\rangle}\quad (50)$$

(on note PRP, mais en gardant en mémoire que PRP inclue aussi un ajustement sec, à voir plus loin).

□ On peut expliciter le bra du gain ou de l'effet-en-retour $\langle c|P^{-1}$ qui est la dernière ligne de P^{-1} :

$$\langle c|P^{-1} = \underline{p} [-\langle \bar{p}|\bar{P}^{-1} \quad , \quad 1 \quad]\quad (51)$$

retour sur le forçage ΔF_{ext} Avec la décomposition de la matrice de base, ici supposée juste P , on peut expliciter la perturbation induite de surface :

$$\varpi = \langle c|P^{-1}\Delta F_{ext} = \frac{\Delta\bar{f}_{ext} - \langle \bar{p}|\bar{P}^{-1}\Delta\bar{F}_{ext}}{\bar{p} - \langle \bar{p}|\bar{P}^{-1}|\bar{p}\rangle}\quad (52)$$

soit

$$(\bar{p} - \langle \bar{p}|\bar{P}^{-1}|\bar{p}\rangle)\varpi = \Delta\bar{f}_{ext} - \langle \bar{p}|\bar{P}^{-1}\Delta\bar{F}_{ext}$$

le terme de gauche est le bilan à l'équilibre sortant de la surface dont la température est perturbée de ϖ , résultat du forçage direct de cette couche par $\Delta\bar{f}_{ext}$, dernière composante du forçage, augmentée de l'effet sur la surface de la perturbation directe de la tropo par $\Delta\bar{F}_{ext}$.

Mais en adoptant cette perturbation induite, on ne tient pas compte du forçage direct sur la tropo, alors la question se pose de l'incidence sur la rétro WV de cet effet, non ? Et pourtant, avec ce choix de la perturbation, on obtient bien la réponse du système complètement forcé, alors ?

On va ré-explore le rôle du forçage, en écrivant d'abord la réponse de base forcée par les flux ($|b\rangle = 0$)

$$\begin{cases} (\mu K + P - A^b)\Delta\eta_0 = \Delta F_{ext} \\ \Delta\theta_0 = \langle c|\Delta\eta_0 \end{cases}\quad (53)$$

et le système rétroaction dans lequel on pose $\Delta\eta = \Delta\eta_0 + \Delta\eta^r$ ("r" pour : effet-en-retour)

$$\begin{cases} (\mu K + P - A^b)(\Delta\eta_0 + \Delta\eta^r) = |b\rangle (\Delta\theta_s + \Delta\theta_0) + \Delta F_{ext} \\ \Delta\theta_s = \langle c|\Delta\eta^r \end{cases}\quad (54)$$

on remarque que $\Delta\theta_s$ est ainsi défini comme effet-en-retour, c'est-à-dire l'excès de température de surface par rapport au forçage induit $\Delta\theta_0$, qui bien que introduite par le changement de variables va représenter la perturbation pour le système suivant.

En soustrayant (53) de (54), on élimine ΔF_{ext} :

$$\begin{cases} (\mu K + P - A^b)\Delta\eta^r = |b\rangle (\Delta\theta_s + \Delta\theta_0) \\ \Delta\theta_s = \langle c|\Delta\eta^r \end{cases}\quad (55)$$

Alors, ce système des excès au modèle de base a les mêmes jacobiennes que le système originel et conduit ainsi aux mêmes gains et réponses à une perturbation linéaire ; l'obtention des composantes de $\Delta\theta_s$ est liée à la seule réponse de base soumise à ΔF_{ext} , qui dépend de toutes ses composantes. Ainsi, l'intérêt de l'introduction de cette notion

de réponse de base apparaît comme découplant les calculs, l'un lié au forçage dans sa généralité et donnant une base, l'autre fournissant les caractéristiques standards de rétroaction¹, faut pas être sectaire !.

En pratique, un calcul de trajectoire fournit ces caractéristiques, mais il faut deux autres ingrédients pour évaluer les CIR :

- un calcul (optionnel) de $\Delta\eta, \Delta\theta_{tot}$, qui se peut faire en appliquant la source ΔF_{ext} au SLTC — puisque $\Delta\eta_{tot}(t) = \int_0^t \Phi(t, \tau) \Delta F_{ext}(\tau) d\tau$;
- la réponse $\Delta\theta_0$ de la base est donnée par soustraction à la précédente $\Delta\eta_0(t) = \int_0^t \Phi(t, \tau) (\Delta F_{ext}(\tau) - |b\rangle \Delta\theta_0(\tau)) d\tau$, d'où le système à intégrer

$$\begin{cases} K \partial_t \Delta\eta_0 = -(P - A) \Delta\eta_0 + \Delta F_{ext} - |b\rangle \Delta\theta_0 \\ \Delta\theta_0 = \langle c | \Delta\eta_0 \end{cases} \quad (56)$$

on pourra alors vérifier que la somme des $\Delta\theta_i$ égale $\Delta\theta_{tot}$. Une **question amusante** concerne le calcul du modèle de base, lié à $|p\rangle$, dernière colonne de P — du fait qu'alors $\Delta\theta_{tot} = \langle c | \int_0^t \Phi(t, \tau) |p + \sum b_i\rangle(\tau) \varpi(\tau) d\tau$ par principe d'exhaustivité, ce qui semble dire que cette perturbation hypothétique $\varpi(\tau)$, qui solliciterait la réponse d'un "modèle sans aucune rétroaction" (sans Planck donc), n'est pas inaccessible, en intégrant un système du type base avec $-|b\rangle \Delta\theta_0 \rightarrow -|p + b\rangle \varpi$.

On aura ainsi pour p rétroactions, $p + 2$ SLTC à calculer dont l'un donne $\Delta\theta_0(t)$, un autre $\Delta\theta_{tot}$, et les p standards permettant de partager cette réponse globale en CIR.

Il va de soit encore que la structure du système doit permettre de séparer les $|b_i\rangle$ et éventuellement ce $|p\rangle$ supplémentaire. Comment celà se traduit-il par exemple dans ClimSI ?

On peut remarquer que cette belle procédure ne résoud pas le problème du forçage par $2 \times CO_2$! Sauf à calculer $\Delta F_{ext} = (P_{2 \times CO_2} - P_{1 \times CO_2}) \eta(z)$, ce qui exige que le modèle de climat définisse les échanges par ciel clair — comme les AGCM.

Différence de Gâteaux finie Pour calculer $\Delta\eta^r$ par différence, il faudra faire la différence **call convec** $(T + \Delta\eta_0) - (T)$ en parallèle à (54), d'accord ? Mais du coup, on récupère aussi toutes les anomalies des champs en sortie. D'où remise sur la table de la question de que faire de cette information. Prenant l'imbroglio du cld fb par exemple, on doit pouvoir tout dire, alors que par le TEF, en supposant un modèle d'unicolonne jacobienisé, comment définir la rétroaction nuages à partir de $\Delta\theta_s + \varpi$, quand les nuages ne sont pas directement dépendants de la surface ? Bref, c'est ce terme $|b\rangle \varpi$ qui me taquine, parce qu'il est de portée verticale directe très limitée². Quand on perturbe le mécanisme-source de rétroaction WV dans ClimSI, on perturbe toute la colonne.

Pour analyser cette contradiction, on considère encore (54) :

$$\begin{cases} (\mu K + P - A^b) (\Delta\eta_0 + \Delta\eta^r) = |b\rangle (\Delta\theta_s + \Delta\theta_0) + \Delta F_{ext} \\ \Delta\theta_s = \langle c | \Delta\eta^r \end{cases}$$

on a conclu que de forcer avec ΔF_{ext} et voir les différences avec $|b\rangle$ nul ou pas, c'est comme ne plus forcer mais regarder les différences entre θ_s perturbée ou pas par $\Delta\theta_0$; ainsi donc, $\Delta\eta_0$ n'intervient pas en tant que perturbation. Par contre, si on annule $|b\rangle$ et A^b en même temps, c'est-à-dire on "bloque la convection", il faut appliquer $\Delta\eta_0$ pour virer ΔF_{ext} . Alors, comment justifies-tu ton $+|1\rangle$? Avais-tu essayé un simple $+1$ sur le premier niveau ?

¹mais il nous faut admettre que si nous effectuons le calcul de ce $\Delta\theta_s$, il nous fournirait une température qui ajoutée à $\Delta\theta_0$ est la réponse surface à ΔF_{ext} : ce n'est pas la composante inclusive ! ceci est à rapprocher de nôtre déception à trouver cette même composante avec une seule boucle de rétroaction. **mais, attention !** on peut définir cette composante inclusive comme liée à ΔF_{ext}

²bien que $|b(\mu)\rangle$ soit le résultat d'une élimination — de Q par exemple.

Sinon, on peut en effet prétexter de la singularité numérique pour expliquer le $+\epsilon\Delta\eta_0$, sachant qu'alors le gain TEF correspondant est modifié par "l'effet indirect" :

$$g^{tot} = g^* + g^{ind} \quad \text{avec, si } A_i^b = L_i R_i^b \quad \text{et } M = \mu K + P - A^i : \\ g^{ind} = \langle c | M^{-1} L_i (I - R_i^b M^{-1} L_i)^{-1} R_i^b M^{-1} | b \rangle$$

d'après la formule (A-18).

Il faudra vérifier que la G-diff finie est linéaire par, si on suit Cacuci 81,

1. $\xi(t + dt) = \mathcal{N}(\xi(t), \Delta F_{\text{ext}}(t))$ faiblement Lipschitz (à l'équilibre par ex) ;
2. $\mathcal{N}(\xi(t) + \epsilon\Delta\eta_1 + \epsilon\Delta\eta_2) - \mathcal{N}(\xi(t) + \epsilon\Delta\eta_1) - \mathcal{N}(\xi(t) + \epsilon\Delta\eta_2) + \mathcal{N}(\xi(t)) = o(\epsilon)$;

où comme on le devine, l'opérateur numérique-fortran \mathcal{N} représente l'avance d'un pas de temps de la "Physique" sur toutes les variables disponibles ξ . Ce qui devrait fixer-justifier un bon ϵ numérique d'accroissements finis. Mais en tant que physiciens, on pourra argumenter que cela ne se doit vérifier a) que pour les variables d'état et b) que pour l'ensemble des $\Delta\eta_i$ constituant les rétroactions à perturber ?

En tout cas, on trouve la juste perturbation $\Delta\eta_0$ à appliquer, qui est la réponse de base du système à ΔF_{ext} , ou au $2 \times CO_2$.

analyse de la PRP On vient déjà de voir que la PRP change les CL (la SST), au lieu de lui faire subir une perturbation, ce qui se traduit par l'annulation de $\langle \bar{p} |$ et de \bar{p} , c'est bien ce que signifie l'hypothèse du "tout passe par la surface" : elle ne dépend que de la perturbation, pas de l'effet induit sur elle par le reste du système. Mais qu'en est-il du profil de base $\Delta\bar{\eta}_0$? Il ne dépend pas des grandeurs annulées précédemment évoquées ; alors, si on attribue à ϖ la valeur finale et globale $\Delta\theta_s$, le profil de base trouvé sera correct, et on pourra calculer le ΔG_P avec ce profil !

Il suffit ainsi dans la PRP de calculer cette matrice de Planck P , comme le proposent L&C d'ailleurs, pour avoir ce profil de base correct, effectuer le calcul du bilan TOA et obtenir le facteur λ_P correct — et ainsi abandonner le L-R.

Poursuivons l'analyse PRP du WV, en acceptant la méthode de Zhang basée sur les régions ne mettant en œuvre que cette rétroaction (ciel clair, pas d'effet albedo ...), et alors A ne représente que les mécanismes du WV. La réponse au changement de la SST est

$$\Delta\bar{\eta} = -(\bar{P} - \bar{A})^{-1} |\bar{p} - \bar{a}\rangle \varpi \quad (57)$$

Attention à présent, car le bilan TOA est $\Delta G_{tot} = \langle 1 | (P - A) \begin{bmatrix} \Delta\bar{\eta} \\ \varpi \end{bmatrix}$; on a en effet dans la matrice A des échanges matériels qui vont s'annuler dans la somme, ne laissant que les fuites radiatives (LW et SW) dues à WV. On obtient alors le bilan global lié à $\lambda_P + \lambda_{WV}$:

$$\lambda_P + \lambda_{WV} = - \langle 1 | (\bar{P} - \bar{A})(\bar{P} - \bar{A})^{-1} |\bar{p} - \bar{a}\rangle + \langle 1 | \bar{p} - \bar{a}\rangle \\ - \langle \bar{p} - \bar{a} | (\bar{P} - \bar{A})^{-1} |\bar{p} - \bar{a}\rangle + \bar{p} - \bar{a} \quad (58)$$

soit :

$$\boxed{\lambda_P + \lambda_{WV} = \bar{p} - \bar{a} - \langle \bar{p} - \bar{a} | (\bar{P} - \bar{A})^{-1} |\bar{p} - \bar{a}\rangle} \quad (59)$$

On a encore cependant

$$\lambda_P + \lambda_{WV} = \bar{p} - \langle \bar{p} | (\bar{P} - \bar{A})^{-1} |\bar{p}\rangle \\ + \langle \bar{p} | (\bar{P} - \bar{A})^{-1} |\bar{a}\rangle + \langle \bar{a} | (\bar{P} - \bar{A})^{-1} |\bar{p}\rangle - \langle \bar{a} | (\bar{P} - \bar{A})^{-1} |\bar{a}\rangle - \bar{a} \quad (60)$$

comme il nous faut enlever λ_P , on développe le premier terme avec $\bar{A} = \bar{L}\bar{R}$

$$\bar{p} - \langle \bar{p} | (\bar{P} - \bar{A})^{-1} |\bar{p}\rangle = \bar{p} - \langle \bar{p} | \bar{P}^{-1} |\bar{p}\rangle \\ - \langle \bar{p} | \bar{P}^{-1} \bar{L} (I - \bar{R}\bar{P}^{-1}\bar{L})^{-1} \bar{R}\bar{P}^{-1} |\bar{p}\rangle \quad (61)$$

dont la première ligne est λ_P . Il reste alors :

$$\boxed{\lambda_{WV}^{PRP} = \langle \bar{p} - \bar{a} | (\bar{P} - \bar{A})^{-1} | \bar{a} \rangle + \langle \bar{a} | (\bar{P} - \bar{A})^{-1} | \bar{p} \rangle - \bar{a} - \langle \bar{p} | \bar{P}^{-1} \bar{L} (I - \bar{R} \bar{P}^{-1} \bar{L})^{-1} \bar{R} \bar{P}^{-1} | \bar{p} \rangle}$$
 (62)

□ Pour la comparaison avec le TEF, on va plutôt comparer les réponses globales à l'équilibre. On a pour le TEF, en prenant comme dénominateur commun

$$- \frac{1}{\bar{p} - \bar{a}} = \bar{p} - \bar{a} - \langle \bar{p} - \bar{a} | (\bar{P} - \bar{A})^{-1} | \bar{p} - \bar{a} \rangle :$$

$$\sigma = 1 + \varrho = 1 + \langle c | (P - A)^{-1} | b \rangle = \frac{\bar{p} - \bar{a} - \langle \bar{p} - \bar{a} | (\bar{P} - \bar{A})^{-1} | \bar{p} - \bar{a} \rangle - \langle \bar{p} - \bar{a} | (\bar{P} - \bar{A})^{-1} | \bar{b} \rangle + b_n}{\bar{p} - \bar{a} - \langle \bar{p} - \bar{a} | (\bar{P} - \bar{A})^{-1} | \bar{p} - \bar{a} \rangle}$$
 (63)

$$\sigma_{TEF} = \frac{\bar{p} - \langle \bar{p} - \bar{a} | (\bar{P} - \bar{A})^{-1} | \bar{p} \rangle}{\bar{p} - \bar{a} - \langle \bar{p} - \bar{a} | (\bar{P} - \bar{A})^{-1} | \bar{p} - \bar{a} \rangle} \quad (\text{si } |b\rangle = |\bar{a}\rangle)$$

Pour PRP, on a $\sigma = \left(\frac{\lambda_P}{\lambda_P + \lambda_{WV}} \right)^{PRP}$, soit (cf 50 et 59) :

$$\sigma^{PRP} = \frac{\bar{p} - \langle \bar{p} | \bar{P}^{-1} | \bar{p} \rangle}{\bar{p} - \bar{a} - \langle \bar{p} - \bar{a} | (\bar{P} - \bar{A})^{-1} | \bar{p} - \bar{a} \rangle}$$
 (64)

On a les mêmes dénominateurs! C'était pas évident, et c'est le calcul radiatif qui restore la présence de $\langle \bar{p} |$ et $\langle \bar{a} |$ évacués par la prise de conditions limites de la SST.

Au numérateur, on peut penser prendre $|\bar{b}\rangle = |\bar{a}\rangle$ selon le principe que seul le WV est ici présent comme mécanisme de rétroaction, de même $b_n = \bar{a}$, ce qui simplifie une partie du numérateur, cf 3^{ième} ligne de (63) si bien qu'il reste à comparer $\bar{p} - \langle \bar{p} | \bar{P}^{-1} | \bar{p} \rangle$ de PRP avec $\bar{p} - \langle \bar{p} - \bar{a} | (\bar{P} - \bar{A})^{-1} | \bar{p} \rangle$ du TEF. Sont pas formellement si éloignés, mais la différence semble tenir au rôle de la perturbation de base selon chacun.

Faisons apparaître la partie PRP dans l'autre :

$$\begin{aligned} \bar{p} - \langle \bar{p} - \bar{a} | (\bar{P} - \bar{A})^{-1} | \bar{p} \rangle &= \\ &= \bar{p} - \langle \bar{p} | \bar{P}^{-1} | \bar{p} \rangle - \langle \bar{p} | \bar{P}^{-1} \bar{L} (I - \bar{R} \bar{P}^{-1} \bar{L})^{-1} \bar{R} \bar{P}^{-1} | \bar{p} \rangle + \langle \bar{a} | (\bar{P} - \bar{A})^{-1} | \bar{p} \rangle \end{aligned}$$
 (65)

Le résidu comporte ainsi deux termes liés à la perfection des couplages dans le TEF ?

- un terme de couplage radiato-convectif $\langle \bar{a} | (\bar{P} - \bar{A})^{-1} | \bar{p} \rangle$, qui donne le retour sur $\Delta\theta_s$ par couplage convectif avec les autres couches, de la perturbation radiative induite sur elles par celle de la SST, et
- un terme de couplage radiatif-radiatif par l'intermédiaire d'une rétroaction convective : $-\langle \bar{p} | \bar{P}^{-1} \bar{L} (I - \bar{R} \bar{P}^{-1} \bar{L})^{-1} \bar{R} \bar{P}^{-1} | \bar{p} \rangle$, qui donne le retour radiatif d'une même perturbation induite radiativement par $\Delta\theta_s$ soumise à la rétroaction des autres couches, avec intervention de cette "matrice des gains convectifs" : $\mathcal{G} = \bar{R} \bar{P}^{-1} \bar{L}$.

On peut en conclure plus précisément que PRP rate λ_P tout en évaluant correctement $\lambda_P + \lambda_{WV}$! Il fait donc porter à WV une partie de P, ce qui n'est pas sans rappeler encore l'intervention du L-R ?

Donnons les expressions correctes par le TEF des λ :

$$\boxed{\begin{aligned} \lambda_P &= \bar{p} - \langle \bar{p} - \bar{a} | (\bar{P} - \bar{A})^{-1} | \bar{p} \rangle \\ -\lambda_{WV} &= \bar{a} - \langle \bar{p} - \bar{a} | (\bar{P} - \bar{A})^{-1} | \bar{a} \rangle \\ \lambda_P + \lambda_{WV} &= \bar{p} - \bar{a} - \langle \bar{p} - \bar{a} | (\bar{P} - \bar{A})^{-1} | \bar{p} - \bar{a} \rangle \end{aligned}}$$
 (66)

en notant que le signe de λ_W est positif-sortant la TOA, alors que A représente une convergence dans les couches.

Mais plus important pour la PRP, si on inclue dans le modèle de base un ajustement sec, on rétablit un couplage convectif dans le calcul de λ_P^{PRP} qui peut ressembler à ce que l'on a trouvé qu'il lui manquait.

Alors, dans l'attente d'erreurs de calculs identifiés, on peut à nouveau être surpris de la pertinence de PRP, et trouver dans le résidu de quoi tenter de l'améliorer ? Mais il semble difficile de poursuivre l'exercice sans évaluer numériquement les éléments formellement définis, alors qui et sur quel modèle 1D ? Et ne pas oublier qu'il nous faut calculer P pour définir un profil de base correct dans les calculs de type PRP.

reformulation d'un modèle de la moyenne ou équivalent Même indépendamment du L-R, il s'agit d'un problème récurrent d'introduire par changement de variables le système de la moyenne avec ses écarts. On utilise la matrice de base décomposée pour le faire, donc ici le symbole \bar{x} n'est plus un cumul mais correspond à (45)¹. Dans le traitement donné dans les cahiers Propagateur, on conservait $\partial_t \bar{\eta}$ dans le système, on propose ici de remplacer par sa valeur — c'était le but de la notation des sous-matrices. Alors, d'un vrai système moyenne + écarts sortira peut-être quelque vérité formelle sur le L-R ? Mais à l'exercice, on apprend que le traitement de la moyenne est formellement plus complexe que celui d'une valeur et des écarts à icelle, c'est donc ce système (température de surface, écarts) que nous traitons, qui lui est physiquement très proche — et de plus strictement en rapport avec la définition du L-R.

Pour nous satisfaire, il faut utiliser l'équation de $\Delta\theta_s$ pour enlever du système restant sa dépendance en $\mu k \Delta\theta_s$, d'accord ? Alors on va le faire², mais en utilisant la décomposition de la matrice de base et ainsi coupler le vecteur $\Delta\theta^*$ et la dernière composante de $\Delta\eta \rightarrow \Delta\theta_n$, avec changement de variable pour les (n-1) premières composantes $\Delta\eta_i = \Delta\theta_i^* + \Delta\theta_n$:

$$\mathcal{S}^o \left\{ \begin{array}{l} (\mu k I + \bar{P} - \bar{A}) \Delta\theta^* + \mu k |1\rangle \Delta\theta_n + [(\bar{P} - \bar{A}) |1\rangle + |\bar{p} - \bar{a}\rangle] \Delta\theta_n = \Delta\bar{F}_{ext} \\ \langle \bar{p} - \bar{a} | \Delta\theta^* + (\mu k + \bar{p} - \bar{a} + \langle \bar{p} - \bar{a} | 1 \rangle) \Delta\theta_n = \Delta f_{ext} \equiv \Delta F_{ext,n} \\ \Delta\theta_s = \Delta\theta_n \end{array} \right. \quad (67)$$

on a donc conservé la séparation entre la variable perturbée $\Delta\theta_s$ et $\Delta\theta_n$ pour rester proche du système classique, sans encore préciser ΔF_{ext} . Il reste à soustraire $\mu k |1\rangle \Delta\theta_n$, terme laissé à part exprès, du système, pour obtenir :

$$\left\{ \begin{array}{l} (M - |1\rangle \langle \bar{p} - \bar{a} |) \Delta\theta^* + (|\bar{p} - \bar{a}\rangle + (\bar{P} - \bar{A}) |1\rangle - (\bar{p} - \bar{a} + \langle \bar{p} - \bar{a} | 1 \rangle) |1\rangle) \Delta\theta_n \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad = \Delta\bar{F}_{ext} - |1\rangle \Delta f_{ext} \\ \langle \bar{p} - \bar{a} | \Delta\theta^* + (\mu k + \bar{p} - \bar{a} + \langle \bar{p} - \bar{a} | 1 \rangle) \Delta\theta_n = \Delta f_{ext} \\ \Delta\theta_s = \Delta\theta_n \end{array} \right. \quad (68)$$

avec $M = \mu k I + \bar{P} - \bar{A}$. On s'est alors débarrassé de $\partial_t \Delta\theta_n$ au prix du changement des matrices, certes, mais sans qu'elles soient pour autant devenues singulières.

Le calcul de $\Delta\theta_n$ fait apparaître un produit que l'on va d'emblée expliciter :

$$\begin{aligned} \langle \bar{p} - \bar{a} | (M - |1\rangle \langle \bar{p} - \bar{a} |)^{-1} &= \langle \bar{p} - \bar{a} | \left[M^{-1} + M^{-1} \frac{|1\rangle \langle \bar{p} - \bar{a} |}{1 - \langle \bar{p} - \bar{a} | M^{-1} |1\rangle} M^{-1} \right] \\ &= \left[1 + \frac{\langle \bar{p} - \bar{a} | M^{-1} |1\rangle}{1 - \langle \bar{p} - \bar{a} | M^{-1} |1\rangle} \right] \langle \bar{p} - \bar{a} | M^{-1} \\ &= \frac{\langle \bar{p} - \bar{a} | M^{-1}}{1 - \langle \bar{p} - \bar{a} | M^{-1} |1\rangle} \end{aligned} \quad (69)$$

¹le 15 décembre 2008.

²on a donc intérêt à reprendre des couches de même inertie k .

On obtient à présent le système effet-en-retour en prenant $\Delta \bar{F}_{ext} = |\bar{b}\rangle \varpi$ et $\Delta f_{ext} = \bar{b}\varpi$. Comme premier système, on fait porter à $|\bar{a}\rangle$ et \bar{a} l'ensemble des rétroactions, soit :

$$S^* \left\{ \begin{array}{l} (M - |1\rangle\langle\bar{p} - \bar{a}|) \Delta\theta^* + [|\bar{p}\rangle - \bar{p}|1\rangle + (\bar{P} - \bar{A})|1\rangle - \langle\bar{p} - \bar{a}|1\rangle|1\rangle] \Delta\theta_n \\ \quad = (|\bar{a}\rangle - \bar{a}|1\rangle)(\Delta\theta_s + \varpi) \\ \quad \langle\bar{p} - \bar{a}| \Delta\theta^* + (\mu k + \bar{p} + \langle\bar{p} - \bar{a}|1\rangle) \Delta\theta_n = \bar{a}(\Delta\theta_s + \varpi) \\ \quad \Delta\theta_s = \Delta\theta_n \end{array} \right. \quad (70)$$

qui donne par élimination de $\Delta\theta^*$, compte-tenu du résultat (69) :

$$\begin{aligned} (\mu k + \bar{p} + \langle\bar{p} - \bar{a}|1\rangle) \Delta\theta_n = \\ \frac{\langle\bar{p} - \bar{a}| M^{-1}}{1 - \langle\bar{p} - \bar{a}| M^{-1}|1\rangle} (|\bar{p}\rangle - \bar{p}|1\rangle + (\bar{P} - \bar{A})|1\rangle - \langle\bar{p} - \bar{a}|1\rangle|1\rangle) \Delta\theta_n \\ + \left[\bar{a} - \frac{\langle\bar{p} - \bar{a}| M^{-1}}{1 - \langle\bar{p} - \bar{a}| M^{-1}|1\rangle} (|\bar{a}\rangle - \bar{a}|1\rangle) \right] (\Delta\theta_s + \varpi), \end{aligned} \quad (71)$$

On va d'abord traiter ce terme qui tend à l'équilibre vers $\langle\bar{p} - \bar{a}|1\rangle$, à savoir

$$\begin{aligned} \frac{\langle\bar{p} - \bar{a}| M^{-1}}{1 - \langle\bar{p} - \bar{a}| M^{-1}|1\rangle} [(\bar{P} - \bar{A})|1\rangle - \langle\bar{p} - \bar{a}|1\rangle|1\rangle] \\ = \langle\bar{p} - \bar{a}|1\rangle \left[1 - \frac{\langle\bar{p} - \bar{a}| [I - M^{-1}(\bar{P} - \bar{A})]|1\rangle}{1 - \langle\bar{p} - \bar{a}| M^{-1}|1\rangle} \right] \\ = \langle\bar{p} - \bar{a}|1\rangle \left(1 - \frac{\Gamma_{LR}}{1 - \langle\bar{p} - \bar{a}| M^{-1}|1\rangle} (\mu) \right), \text{ avec } \Gamma_{LR}(0) = 0; \end{aligned} \quad (72)$$

alors, en rassemblant-simplifiant, on trouve

$$\begin{aligned} \left[\mu k + \langle\bar{p} - \bar{a}|1\rangle \Gamma_{LR}(\mu) + \frac{\bar{p} - \langle\bar{p} - \bar{a}| M^{-1}|\bar{p}\rangle}{1 - \langle\bar{p} - \bar{a}| M^{-1}|1\rangle} \right] \Delta\theta_n \\ = \frac{\bar{a} - \langle\bar{p} - \bar{a}| M^{-1}|\bar{a}\rangle}{1 - \langle\bar{p} - \bar{a}| M^{-1}|1\rangle} (\Delta\theta_s + \varpi) \end{aligned} \quad (73)$$

ce qui reporté dans l'équation de $\Delta\theta_s$ fournit le gain à l'équilibre :

$$g_\infty = \frac{\bar{a} - \langle\bar{p} - \bar{a}| (\bar{P} - \bar{A})^{-1}|\bar{a}\rangle}{\bar{p} - \langle\bar{p} - \bar{a}| (\bar{P} - \bar{A})^{-1}|\bar{p}\rangle}. \quad (74)$$

Il semble que ce gain soit différent du gain attaché au système originel

$$g_o = \langle c | (P - A + |b\rangle\langle c|)^{-1} |b\rangle = \frac{\langle c | (P - A)^{-1} |b\rangle}{1 + \langle c | (P - A)^{-1} |b\rangle}; \quad (75)$$

explicitons les inverses en éléments de sous-matrice, mêmes composantes de $|b\rangle$ que précédemment et à l'aide de la formule (51) :

$$\langle c | (P - A)^{-1} |b\rangle = \frac{\bar{a} - \langle\bar{p} - \bar{a}| (\bar{P} - \bar{A})^{-1}|\bar{a}\rangle}{\bar{p} - \bar{a} - \langle\bar{p} - \bar{a}| (\bar{P} - \bar{A})^{-1}|\bar{p} - \bar{a}\rangle} \quad (76)$$

qui permet alors d'identifier les deux gains (ouf!) Bon, avec tout ça, on s'est simplement convaincu de l'identité mathématique des deux systèmes, et on a trouvé une forme supplémentaire pour les gains. Que dit-elle?

- le dénominateur $\bar{p}- \langle \bar{p} - \bar{a} | (\bar{P} - \bar{A})^{-1} | \bar{p} \rangle$ n'est autre que λ_P , à savoir le bilan net de surface; on le redit ici, la perturbation appliquée à la surface provoque un bilan sortant \bar{p} de la première couche, et détermine à l'équilibre une variation de la température tropo $(\bar{P} - \bar{A})^{-1} | \bar{p} \rangle$; enfin, la surface reçoit en retour $-\langle \bar{p} - \bar{a} | (\bar{P} - \bar{A})^{-1} | \bar{p} \rangle$: bilan net. C'est également le bilan LW TOA sortant;
- de même, si la matrice A originelle représente tous les processus du WV, le numérateur $\bar{a}- \langle \bar{p} - \bar{a} | (\bar{P} - \bar{A})^{-1} | \bar{a} \rangle$ est ce même bilan pour une perturbation de ce mécanisme — bilan entrant, donc $= -\lambda_{WV}$;
- on a finalement $g_\infty = \frac{-\lambda_{WV}}{\lambda_P}$, expression classique retrouvée ici;

La conclusion qui s'impose, c'est que cette expression du gain par les λ est «naturellement» associée à la forme $\{\Delta\theta^*, \Delta\theta_s\}$ du système, c'est-à-dire L-R et $\Delta\theta_s$ alors, que dire de plus sur ce fameux L-R?

Considérons à présent la forme instationnaire du gain, où rappelons-le tous les termes à l'exception de P ont des coefficients fractions rationnelles¹ de μ :

$$g(\mu) = \frac{\bar{a} - \langle \bar{p} - \bar{a} | M^{-1} | \bar{a} \rangle}{\mu k (1 - \langle \bar{p} - \bar{a} | M^{-1} | 1 \rangle) + \Gamma_{LR}(\mu) + \bar{p}- \langle \bar{p} - \bar{a} | M^{-1} | \bar{p} \rangle} \quad (77)$$

on a ce terme $1 - \langle \bar{p} - \bar{a} | (\mu k I + \bar{P} - \bar{A})^{-1} | 1 \rangle$ qui vient augmenter l'inertie du système et qui manifestement implique le L-R! Il donne en effet le bilan net surface d'une perturbation $|1\rangle \varpi$ verticalement homogène².

On peut encore écrire le gain

$$g(\mu) = \frac{\beta_{WV}(\mu)}{\mu k \beta_{LR}^0(\mu) + \Gamma_{LR}(\mu) - \beta_P(\mu)} \quad (78)$$

avec ces bilans nets de surface β_i qui, à l'équilibre, deviennent égaux aux λ_i . On peut en déduire la réponse globale — à comparer avec (63):

$$\sigma(\mu) = \frac{\mu k \beta_{LR}^0 + \Gamma_{LR}(\mu) - \beta_P}{\mu k \beta_{LR}^0 + \Gamma_{LR}(\mu) - \beta_P - \beta_{WV}} \quad (79)$$

avec $(-\beta_W - \beta_{WV}) = \bar{p} - \bar{a} - \langle \bar{p} - \bar{a} | (\mu k I + \bar{P} - \bar{A})^{-1} | \bar{p} - \bar{a} \rangle$, qui s'identifie avec notre résultat (63) pour $\mu = 0$.

Ce β_{LR}^0 (adim) s'introduit des équations d'évolution de $\Delta\theta^*$ par le fait qu'elles évoluent **par rapport** à la surface, d'où l'accroissement de leur inertie comparée à celle de $\Delta\eta$. On peut encore le voir en récrivant le dénominateur $(\bar{p} + \mu k) - \langle \bar{p} - \bar{a} | (\mu k I + \bar{P} - \bar{A})^{-1} | \bar{p} + \mu k \rangle$: le couplage radiatif “prend de l'inertie”. Quant au terme $\Gamma \approx -\mu k \langle \bar{p} - \bar{a} | M^{-1} | 1 \rangle$, il tente à compenser cette augmentation artificielle d'inertie précédente.

Alors, dans ce système qui semble pourtant très lié à PRP, le L-R y prend une signification très différente.

le L-R d'ajustement sec On admet de nouveau à présent (voir la discussion avec JLD) que ce profil de perturbation à L-R constant des climatologues est le résultat de deux mécanismes couplés: les échanges LW et un ajustement sec — un système où la

¹par le fait que ce système est obtenu par élimination des autres variables d'état du modèle climatique.

²attention cependant, car ce terme $\approx \lambda_{LR}$ est adimensionnel, mais si on l'interprète en disant que $|1\rangle \varpi$ est un bilan de flux pour une perturbation ϖ de température, alors il ressemble à ça.

matrice A représente cet ajustement, avec

$$A = \begin{bmatrix} -a & a & 0 & \dots & 0 \\ a & -2a & a & \dots & 0 \\ & & & a & -2a & a \\ & & & 0 & a & -2a \end{bmatrix} \quad (80)$$

matrice tgridiag (flux d'en haut nul et flux d'en bas de la première couche, ce qui la rend non-singulière). Il s'agit simplement d'une matrice de la forme conduction, c'est-à-dire qu'on peut considérer l'appliquer au gradient de température virtuelle potentielle, mais en SLT on a $\Delta\theta_v \propto \Delta T$.

L'application de $\varpi = \Delta_{SST}$ à notre système donne

$$\begin{aligned} (M - |1\rangle\langle\bar{p} - \bar{a}|)\Delta\theta^* &= -(|\bar{p} - \bar{a}\rangle - (\bar{p} - \bar{a})|1\rangle + (\bar{P} - \bar{A})|1\rangle - \langle\bar{p} - \bar{a}|1\rangle|1\rangle)\varpi \\ &= -(|\bar{p}\rangle + \bar{P}|1\rangle) + (\bar{p} - \bar{a} + \langle\bar{p} - \bar{a}|1\rangle)|1\rangle)\varpi \\ &= -(|\bar{p}\rangle + \bar{P}|1\rangle) + (\bar{p} + \langle\bar{p}|1\rangle)|1\rangle + a)\varpi \end{aligned} \quad (81)$$

puisque par construction on a $\bar{A}|1\rangle + |\bar{a}\rangle = 0$, de même $-\bar{a} - \langle\bar{a}|1\rangle = a$, et où on a pris $M = \bar{P} - \bar{A}$ à l'équilibre. On remarque ainsi que l'ajustement n'intervient que par les échanges entre la surface et la première couche tropo. De même on peut noter que l'ajustement sec ne modifie pas les échanges LW au sein de la tropo — ce qui signifie qu'il ne modifie pas le L-R dans la tropo¹ !

Pour trouver $\Delta\theta^* = 0$ (L-R cst), le membre de droite devrait s'annuler. $\bar{P}|1\rangle + |\bar{p}\rangle$, c'est le bilan LW net émanant de chaque couche de la tropo, et $\bar{p} - \bar{a} + \langle\bar{p} - \bar{a}|1\rangle$ le bilan net des deux flux dans la couche de surface. Il faudrait que le bilan LW de chaque couche de la tropo soit homogène et égal au bilan surface — dans ce cas de couches de mêmes masses. Il ne peut s'agir que d'une égalité approximative, non ?

On arrive à la conclusion que l'ajustement sec ne répond pas strictement au problème du modèle de base associé au L-R constant, ou que ce choix infirme l'hypothèse PRP de l'estimation du profil correspondant au modèle sans rétroaction.

analyse des résultats du TEF Le bilan associé au modèle de base étant

$\lambda_P = \bar{p} - \langle\bar{p} - \bar{a}|(\bar{P} - \bar{A})^{-1}|\bar{p}\rangle$, il apparait clairement que la réaction de la tropo à la perturbation radiative et son bouclage sur la couche de surface mettent en jeu les deux mécanismes P et WV. Alors, deux types de questions se posent :

- est-ce un modèle de base correct pour aller à la définition de WV ?
- et si oui, concernant l'application PRP, quel profil associer à P ?

Pour répondre à la première question, on doit garder en tête la généralisation des définitions d'une part, et prendre conseil auprès des bons auteurs lorsqu'ils ne sont pas contraints par PRP. Schneider *et al* comme Hall & Manabe définissent la rétroaction WV en calculant une trajectoire à WV coupée qui laisse tous les mécanismes libres à l'exception des calculs radiatifs, qui eux sont effectués avec le champ de Q de référence. On devrait ainsi supprimer de la matrice A les échanges radiatifs LW et SW dépendants de Q : $A = A_0 + A_{Qrad}$. Ce qu'il reste n'est pas un ajustement sec mais tous les mécanismes de turbulence et convection. On ne voit pas pourquoi il en résulterait un L-R constant, et de même la technique influence la définition du gain, car comment bloquer d'autres processus ?

Alors, Hansen *et al* sont plus libres avec leur interrogation en parallèle d'un modèle 1D. Chaque calcul de $\Delta\theta_s$ est fait avec un ajustement vers le profil prescrit au 1D, qui est issu du 3D. On a là un bon compromis entre liberté et contrainte pour notre interrogation.

¹ce qui provient du fait que $|1\rangle$ est dans le noyau de \bar{A} .

Pas de chance, parce qu'ils n'ont guère besoin de définir un modèle de base ! Leur méthode tient exclusivement en la décomposition arbitraire du profil complet de T et Q : retour à la case départ. Mais quand même, leur pratique consiste à se demander quelle perturbation de la surface peut-être rendue responsable du profil imposé ; dans ce cadre linéaire la réponse est unique et T_s pourrait être remplacée par toute autre variable scalaire (ou même un champ 2D en 3D). Leur 1D¹ comporte "l'habituel ajustement" (sec ?) On est dans le cadre de l'influence descendante du profil perturbé de la tropo sur la surface, ce qui est à mettre en rapport avec ce qui, dans les GCM reste quand on supprime la partie ascendante (causale) des mouvements convectifs.

Et Hallegatte *et al*? Ils font quoi ces génies? D'abord ils se débarrassent du modèle de base en expliquant que doubler CO_2 , c'est appliquer une perturbation de température tropo, malin, hein ? La boucle est définie sur T_s avec un L-R constant par choix de modèle. Couper la boucle, c'est couper l'incidence immédiate de $\Delta\theta_s + \varpi$ sur Q, ce qui laisse inchangés les mécanismes inhérents à la réaction du système ; et de plus, ouvrir la boucle conduit le climat à rester à l'équilibre. Il apparaît ainsi que le modèle de base est une définition liée au modèle en boucle ouverte, d'où la difficulté. Alors, est-ce une question pertinente ? De plus, la perturbation "initiale" est une ΔT_{tropo} , justifiée de la réponse au doublement de CO_2 "applying to the tropo temp first", mais éliminant alors le tempo de cette conversion ; et de la forme même du modèle, cette perturbation de base reste à L-R Cst.

Que font Hall et Manabe 2000 auxquels se réfèrent les auteurs pour supprimer WV ? Seuls les calculs LW sont à Q fixés, comme déjà vu.

Mais l'originalité de Hallegatte *et al* réside dans la mise en évidence de l'aspect dynamique de la rétroaction. Comment définir l'influence d'un "modèle de base" dans cette dynamique ? Si on considère que la WV se construit au fil du temps, la réponse quasi-immédiate de Planck concerne les premiers jours du doublement, avec un temps caractéristiques de 20-30 jours ; mais c'est aussi la gamme des tempos du pôle rapide (entre 6 et 30 jours) lié au déséquilibre initial de RH. En fait, la réponse dite de Planck possède sa propre dynamique, avec un refroidissement rapide (30j) de la strato sans grande modif de tropo, suivi d'un réchauffement turbulent par la surface et un retour à l'équilibre avec une z_{eq} à peine plus élevée, et donc vers un profil final proche de l'initial. Ainsi, les réponses en boucle ouverte et fermée ont deux dynamiques de démarrage semblables, qui ne permettent pas de résoudre le problème, sauf à prendre une référence qui absorbe la dynamique du pôle lent ; le profil de base serait alors à prendre entre 2 et 3 mois après la perturbation ? Ceci à vérifier avec un uni-colonne. On peut déjà suivre l'OLR avec doublement dans ClimSI pour voir cette dynamique PRP.

Enfin, Slingo *et al* identifient l'effet de la rétro WV par l'influence de Q sur le flux de surface retenu dans la tropo, et en LW seulement. Ce qui implique l'intervention de tous les mécanismes — à l'exception des nuages grâce à l'analyse par ciel clair et de l'albedo (ice-free oceans).

Bref, il sort de la biblio qu'aucune définition stricte du WV n'existe, et notre conclusion est que la procédure de structuration du modèle avec boucle doit permettre de sélectionner les mécanismes. On va ainsi reformuler le problème en partant de la proposition de Liu & Cai : dans une formulation explicite des transferts, on peut, comme dans Hallegatte *et al*, préciser les mécanismes qui sont ou pas immédiatement dépendants de la variable-jauge. D'autre part, en restant TEF on reste généralisable.

mais on a le droit de reposer le problème *ab initio* de la caractérisation d'un effet de rétro, ça peut être amusant ?

¹Lacis et al 81 je trouve pas.

formulation-transferts On va le faire, mais en sachant qu'on va trouver une décomposition de $A = \sum_i A_i$, on devrait alors simplement extraire les A_i de rétroaction du modèle de base, et avec $A_i = L_i R_i$ trouver un gain direct, augmenté d'un effet indirect, comme dans (A-19). Mais la réponse inclusive ne dépendra à nouveau que de $|b\rangle$, alors ?

Alors, on part d'un supposé modèle explicitant des transferts — attention, il s'agit de divergences, en suivant L&C :

$$K\partial_t\Delta T = -\Delta R + \Delta S + \Delta Q^{conv} + \Delta Q^{turb} - \Delta D^v - \Delta D^h + \Delta W^{fric} + \Delta F^{ext} \quad (82)$$

avec ces composantes censées être en correspondance avec un AGCM. On va examiner cette décomposition du point de vue, d'abord, de LMDZ, et ensuite avec ClimSI comme exemple de la base possible d'un modèle simplifié :

- R , divergence des flux LW et S , flux SW absorbé, ceci correspondant au module des calculs radiatifs ;
- Q^{conv} , convergence des flux convectifs (sous-mailles et verticaux), c'est à la fois le modèle de couche limite et de convection profonde ;
- Q^{turb} , idem pour les flux turbulents, incluant les flux sensible et latent de surface ; en plus de la surface, il pourrait y avoir une prise en compte de l'effet du cisaillement vertical du vent dans la dynamique verticale, le modèle de strato, un modèle de turbulence spécifiques aux nuages types cirrus ? Et les ondes de gravité ?
- D^v , divergence du transport vertical grande échelle ; dans la dynamique liée aux variations de pression ?
- D^h , idem pour l'advection horizontale ; dynamique ;
- W^{fric} bilan net du travail des forces de déformation (wind stress), comprenant en particulier les forces de friction de surface ; mais quoi d'autre ?

mais comme on arrête pas d'en discuter, cette séparation parallèle aux codes ne satisfait pas le questionnement climatologique. Poursuivons L&C en restant 3D. Leur “modèle de base”, le seul exprimé en fonction de la température est lié au LW (effet direct), sans y intégrer les effets des changements d'humidité ni de nuages (effets indirects), soit : $\Delta R = P\Delta T + \Delta^w R + \Delta^c R$. On a bien dans les calculs radiatifs un calcul par ciel clair distinct des nuages. La part $\Delta^w R$ est causée par un changement de P .

De même, ils séparent effets de nuages et albedo du SW : $\Delta S = \Delta^\alpha S + \Delta^c S$ (clairement distincts). Le nouveau regroupement est alors :

1. $\Delta\varphi_{rad} = \Delta^\alpha S + \Delta^c(S - R) - \Delta^w R$, terme qualifié de rétroactions thermodynamiques liées au rayonnement ; là, ils regroupent des termes qui sont analysés séparément d'ordinaire.
2. $\Delta\varphi_{loc-dyn} = \Delta Q^{conv} + \Delta Q^{turb} - \Delta D^v + \Delta W^{fric}$, rétroactions dynamiques *locales*, y incluant le transport vertical de grande échelle très faible en effet, mais aussi la convection qui peut envahir toute une colonne. Local doit donc se comprendre comme vertical, ou géographiquement local à l'échelle de la discrétisation ;
3. $\Delta\varphi_{dyn} = -D^h$ reste alors comme seul effet non local, prenant en compte les couplages synoptiques et climatiques (entre basses et hautes latitudes par ex.) par l'atmosphère et l'océan – T_s étant alors une température de couche de mélange océanique ;

L&C font remarquer que des rétroactions plus ciblées peuvent être néanmoins analysées, exercice auquel ils se prêtent dans un deuxième papier applicatif.

Leur méthode évaluant les composantes additives du changement se prête à toute partition des flux possible, mais l'application dans le TEF exige d'identifier les ensembles de mécanismes associés — puisqu'alors, on va définir chaque boucle de rétroaction par une variable distincte perturbant chaque ensemble de mécanismes (c'est la procédure de “séparation”), et on a $|b_i\rangle = \partial_{\theta_s} X_i$ pour chaque contribution X aux flux.

Comme on peut interroger ClimSI (avec ses augmentations supposées) :

- $\Delta S = \Delta^\alpha S + \Delta^c S$, pa ni problème, modèles explicites avec même trois bandes de nuages ;
- $\Delta R = P\Delta T + \Delta^w R + \Delta^c R$. On peut interroger le modèle radiatif sans nuages, mais le terme $P\Delta T$ est à prendre en compte dans le modèle de base, on va y revenir ;
- ΔQ^{conv} , ΔQ^{turb} , et ΔD^v sont ensemble dans l'ajustement au L-R ;
- ΔD^h est sans objet pour une seule colonne, mais serait en transferts paramétrisés entre colonnes ;
- ΔW^{fric} , c'est juste le transfert surface-tropo, qui pourrait dépendre de l'intensité des transferts horizontaux ;

Dans mini-ClimSI, il faut répertorier tous les transferts connectés à la T surface, — avec cette difficulté que cette T_{surf} est connectée rigidement à la tropo par le L-R fixé : on a pour l'heure :

- $T_s \rightarrow Q$ via Clausius-Clapeyron ;
- on peut définir trois T_{nua} sur les trois bandes de nuages $\rightarrow SW$;
- pour l'effet LW, soit il est inclu dans WV, et c'est fait, soit il est à mettre sur rétro Cld, et alors dans :

```

eqn: flux_LW_ocean = Flux_Rad(
  T_ocean_eta,T_tro_surf_phi,rLapse_tro,T_strato_eta,rLapse_str,
  HumRel_phi,CO2_conc_eta,rN_B,rN_M,rN_H,IDO,time,istep,Zprint,ZnewFlux
) + flux_oce_ref
  + flux_oce(2)*(T_ocean_eta-Tocean_ref)
  + flux_oce(3)*(T_tro_surf_phi-Tsurfair_ref)
  + flux_oce(4)*(T_strato_eta-Tstrato_ref)
  + flux_oce(5)*(HumRel_phi-HumRel_ref)
  + flux_oce(6)*(CO2_conc_eta-xCO2_ref)
  + flux_oce(7)*(rN_B-rN_B_ref)
  + flux_oce(8)*(rN_M-rN_M_ref)
  + flux_oce(9)*(rN_H-rN_H_ref);

```

il faut détacher les trois dernières composantes et en faire un flux dépendant des $rN(T_{nua} - \gamma z_{nua})$. Conceptuellement, il y a un pb, car ces nuages ne sont pas directement perturbés par T_s , mais le modèle suppose que cet effet se produit rapidement (?) Sinon, on pourrait faire que rN_i dépende de $Q(z)$, mais alors, il faudrait que $T_{nua} \rightarrow Q \rightarrow rN_i$ définisse séparément les nuages.

- il reste les flux surface, sensible et latent via une autre température.

Ces température d'excitation des mécanismes supposées exhaustives, on aura les effets-en-retour par la procédure standard¹ mais en utilisant cette fois une perturbation déterminée par ΔF_{ext} (cf retour sur forçage page 22. On aura éternellement besoin de plus de la composante de Planck, et enfin du changement global sur T_s .

La composante de Planck n'est pas calculée dans ClimSI actuellement. Si on connecte une T_{temp} sur les flux LW en isolant la contribution

$$+ \text{flux_oce}(3) * (T_tro_surf_phi - Tsurfair_ref) ,$$

on a cette perturbation purement radiative, mais sans perturbation associée.

Le changement global étant $\Delta T_{tot}(t) = c \int_0^t \Phi(t, \tau) \Delta F_{ext}(\tau) d\tau$, on devra conduire ce calcul de SLTC avec évaluation de la source, soit en utilisant la contribution linéaire :

$$+ \text{flux_oce}(6) * (CO2_conc_eta - xCO2_ref)$$

soit par différence.

¹dite pert : step_eff; les calculs correspondent à la réponse associée à chaque boucle indépendamment, en identifiant la colonne de B_b correspondante.

Annexe A

Liens entre l'effet-en-retour et les gains Nous allons établir une identité formelle qui recèle deux lectures physiques fondamentalement différentes de la réponse d'un système à une perturbation. Cette identité relie la forme réponse à la forme gain du SLT caractérisé par sa matrice d'avance-de-phase A diversement décomposée en $A = A^b + \sum_j |b_j\rangle\langle c|$. Voici cette identité :

$$\langle c | (\mu I - A^b - \sum_j |b_j\rangle\langle c|)^{-1} |b_i\rangle = \frac{\langle c | (\mu I - A^b - \sum_{j \neq i} |b_j\rangle\langle c|)^{-1} |b_i\rangle}{1 - \langle c | (\mu I - A^b - \sum_{j \neq i} |b_j\rangle\langle c|)^{-1} |b_i\rangle} \quad (\text{A-1})$$

qui s'écrit encore en explicitant par la matrice A et la matrice réduite $A^i = A - |b_i\rangle\langle c|$:

$$\langle c | (\mu I - A)^{-1} |b_i\rangle = \frac{\langle c | (\mu I - A^i)^{-1} |b_i\rangle}{1 - \langle c | (\mu I - A^i)^{-1} |b_i\rangle} \quad (\text{A-2})$$

Sous cette forme, le terme de gauche exprime la réponse du système à une perturbation excitant le système via le mécanisme identifié à $|b_i\rangle$. La structure du terme de droite explicite la boucle de rétroaction mettant en jeu ce mécanisme — avec $\rho_i(\mu) = \frac{g_i^*(\mu)}{1 - g_i^*(\mu)}$. L'égalité permet d'identifier ces deux manières de considérer la réponse à une perturbation.

Pour la démonstration de l'identité (A-1), on multiplie chaque terme par le dénominateur. Allégeons l'écriture en posant $D_i = \mu I - A^b - \sum_{j \neq i} |b_j\rangle\langle c|$; le terme de gauche devient alors :

$$LHS = (1 - \langle c | D_i^{-1} |b_i\rangle) \langle c | (D_i - |b_i\rangle\langle c|)^{-1} |b_i\rangle \quad (\text{A-3})$$

on sort D_i du facteur de droite, on développe, et on met $\langle c | D_i^{-1}$ en facteur à gauche et $(I - |b_i\rangle\langle c | D_i^{-1})^{-1} |b_i\rangle$ à droite :

$$\begin{aligned} LHS &= \langle c | D_i^{-1} (I - |b_i\rangle\langle c | D_i^{-1}) (I - |b_i\rangle\langle c | D_i^{-1})^{-1} |b_i\rangle \\ &= \langle c | D_i^{-1} |b_i\rangle \end{aligned} \quad (\text{A-4})$$

les facteurs internes s'éliminent et on retrouve le numérateur du terme de droite de (A-1). Cette identité permet, pour une boucle unique, de passer de la forme gain à la forme réponse, comme pour (6) et (5); et dans le cas d'analyse multiple, elle justifie (7)¹, que l'on peut obtenir par application de la Woodbury flop.

Par ailleurs, en posant à présent $D_i = (\mu I - A^i)$ dans la démonstration précédente, on trouve encore que $\rho_i(\mu) = \frac{g_i(\mu)}{1 - g(\mu)}$, cette fois en fonction des gains exclusifs. On a alors ce lien entre les deux analyses :

$$\boxed{\rho_i(\mu) = \frac{g_i(\mu)}{1 - \sum_j g_j(\mu)} = \frac{g_i^*(\mu)}{1 - g_i^*(\mu)}} \quad (\text{A-5})$$

ce qui identifie deux manières fondamentalement différentes de considérer une réponse : i) en fonction d'un ensemble de p boucles de rétroaction exclusives d'une part, et ii) de p boucles uniques correspondant à chaque réponse inclusive du même système d'autre part.

¹on démontre plus généralement que $C^\dagger(A - BC^\dagger)^{-1}B = [I - C^\dagger A^{-1}B]^{-1} C^\dagger A^{-1}B$ — ou son commuté.

Insistons sur le fait que tous ces systèmes sont mathématiquement équivalents. On peut en particulier noter la consistance des deux analyses en constatant que

$$\sum_{j=1,p} \rho_j = \frac{g}{1-g} \quad (\text{A-6})$$

qui montre de ce fait l'identité des réponses globales ΔT_s .

On a encore cette relation qui peut se tirer de (A-5) :

$$g_i^* = \frac{g_i}{1 - \sum_{j \neq i} g_j} \quad (\text{A-7})$$

qui lie les deux approches, et qui justifie le diagramme de droite de la fig. 2, car on a bien alors :

$$f = \frac{1}{1 - \sum_{j \neq i} g_j} \times \frac{1}{1 - g_i^*} \quad (\text{A-8})$$

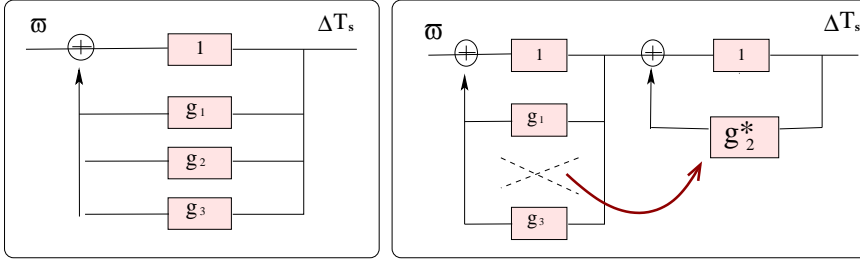


FIG. 2 – Process two is analysed in the exclusive way (left panel) or inclusively (right).

On a également cette détermination des IFC en fonction des gains exclusifs avec le facteur net de rétroaction de Hansen, et des effets-en-retour inclusifs :

$$\Delta T_i = g_i \Delta T_{tot} = g_i f \Delta T_0 = \frac{g_i^*}{1 - g_i^*} \Delta T_0 \quad , \quad (\text{A-9})$$

relation qui resitue la définition de Hansen *et al* dans le présent contexte formel. On peut remarquer que ce qu'ils déterminent avec leur 1D, c'est $\Delta T'_i = \frac{g_i}{1 - g_i} \Delta T_0$. On peut donc évaluer leur “erreur” :

$$\frac{\Delta T_i}{\Delta T'_i} = g_i \Delta T_{tot} = (1 - g_i) f \quad . \quad (\text{A-10})$$

d'où ils déduisent $g'_i = \frac{\Delta T'_i}{\Delta T_{tot}}$; le facteur d'erreur précédent est donc aussi le rapport des gains $\frac{g_i}{g'_i}$, c'est beaucoup! Mais je renonce à toute application numérique, dans l'impossibilité de reconstituer les chiffres du papier : quel rapport entre les ΔT de leur figure 6 et de leur table I? Et considérant cette table, comment peuvent-ils bien trouver ces g_i ?

remarque la question selon L&C pourrait être reformulée ainsi : comment calculer les $\Delta \theta_i$ connaissant les $\Delta \varphi_i$ et ΔT_{tot} ? En voilà une question qu'elle est bonne.

Interaction entre rétroactions Ce lien entre gains inclusifs et exclusifs peut se décliner de manière simple lorsque la matrice d'avance a la forme $A = \mu K + P - |u\rangle\langle v| - |b\rangle\langle c|$, ayant décidé que le système de base était défini par $A_0 = \mu K + P$. On étudie d'abord comment ce gain supplémentaire intervient dans celui défini par l'acteur $|b\rangle = \sum |b_i\rangle$, en considérant le système suivant

$$\begin{cases} (\mu K + P)\Delta\eta = |u\rangle\Delta\theta_x + |b\rangle(\Delta\theta_s + \varpi(\mu)) \\ \Delta\theta_x = \langle v| \Delta\eta \\ \Delta\theta_i = \langle c| \Delta\eta \end{cases} \quad (\text{A-11})$$

l'élimination de $\Delta\eta$ donne le système couplant les deux variables de rétroaction :

$$\begin{cases} (1 - \langle v| A_0^{-1} |u\rangle)\Delta\theta_x - \langle v| A_0^{-1} |b\rangle\Delta\theta_s = \langle v| A_0^{-1} |b\rangle\varpi \\ -\langle c| A_0^{-1} |u\rangle\Delta\theta_x + (1 - \langle c| A_0^{-1} |b\rangle)\Delta\theta_s = \langle c| A_0^{-1} |b\rangle\varpi \end{cases}$$

On s'intéresse tout d'abord à l'**impact d'un gain additionnel** sur nos gains g_i , et on élimine $\Delta\theta_x$:

$$\begin{aligned} & [1 - \langle c| A_0^{-1} |b\rangle - \frac{1}{1 - g_x} \langle c| A_0^{-1} |u\rangle\langle v| A_0^{-1} |b\rangle] \Delta\theta_s \\ & = (\langle c| A_0^{-1} |b\rangle + \frac{1}{1 - g_x} \langle c| A_0^{-1} |u\rangle\langle v| A_0^{-1} |b\rangle)\varpi \end{aligned} \quad (\text{A-12})$$

où nous avons posé $g_x = \langle v| A_0^{-1} |u\rangle$ ce gain exclusif lié à $\Delta\theta_x$. Ces résultats nous autorisent à identifier le gain inclusif lié à $\Delta\theta_s$ avec

$$g^* = g + \frac{1}{1 - g_x} \langle c| A_0^{-1} |u\rangle\langle v| A_0^{-1} |b\rangle \quad (\text{A-13})$$

modifiant ainsi le gain exclusif $g = \langle c| A_0^{-1} |b\rangle$ ¹. Il est alors possible de récrire le système originel (A-11) avec une seule boucle de rétroaction, ce qui revient à changer $|b\rangle$, de cette manière :

$$\begin{cases} (\mu K + P)\Delta\eta = (I + \frac{|u\rangle\langle v|}{1 - g_x} A_0^{-1}) |b\rangle (\Delta\theta_s + \varpi(\mu)) \\ \Delta\theta_i = \langle c| \Delta\eta \end{cases} \quad (\text{A-14})$$

Ces systèmes étant tous mathématiquement équivalents, on remarque que la déclinaison des rétroactions en $|b_i\rangle$ permet de modifier chacun des gains exclusifs en fonction de la rétroaction supplémentaire.

De manière analogue, en éliminant cette fois $\Delta\theta_s$ du système (A-12), on peut écrire la relation entre gains liés à $\Delta\theta_x$:

$$g_x^* = g_x + \frac{1}{1 - g} \langle v| A_0^{-1} |b\rangle\langle c| A_0^{-1} |u\rangle \quad (\text{A-15})$$

qui donne l'**impact de gains** en analyse sur un autre. Là encore, chacune des rétroactions via $\frac{|b_i\rangle}{1 - g}$ contribue additivement à modifier le gain de la rétroaction x.

Pour être exhaustif, le système originel s'écrit ici :

$$\begin{cases} (\mu K + P)\Delta\eta = (I + \frac{|b\rangle\langle c|}{1 - g} A_0^{-1}) |u\rangle (\Delta\theta_x + \varpi(\mu)) \\ \Delta\theta_x = \langle v| \Delta\eta \end{cases} \quad (\text{A-16})$$

¹cette dernière équivalence se démontrant directement par application de la Woodbury flop à partir de la définition du gain inclusif $g^* = \langle c| (A_0 - |u\rangle\langle v|)^{-1} |b\rangle$.

Étudions *in fine* le rôle d'une **rétroaction vectorielle** sur nos gains $\Delta\theta_s$, avec cette fois $A = \mu K + P - A_* - |b\rangle\langle c|$. On décompose arbitrairement $A_* = LR$ en produit de matrices triangulaires L et R , et on étudie le système suivant

$$\begin{cases} (\mu K + P)\Delta\eta = L\Delta\theta_x + |b\rangle(\Delta\theta_s + \varpi(\mu)) \\ \Delta\theta_x = R\Delta\eta \\ \Delta\theta_i = \langle c| \Delta\eta \end{cases} \quad (\text{A-17})$$

où cette fois-ci $\Delta\theta_x$ est un vecteur. On obtient le système couplé :

$$\begin{cases} (1 - RA_0^{-1}L) \Delta\theta_x - RA_0^{-1}|b\rangle \Delta\theta_s = RA_0^{-1}|b\rangle \varpi \\ -\langle c| A_0^{-1}L) \Delta\theta_x + (1 - \langle c| A_0^{-1}|b\rangle) \Delta\theta_s = \langle c| A_0^{-1}|b\rangle \varpi \end{cases}$$

et le rapport aux gains :

$$g^* = g + \langle c| A_0^{-1}L(I - RA_0^{-1}L)^{-1}RA_0^{-1}|b\rangle \quad (\text{A-18})$$

qui correspond au système original suivant

$$\begin{cases} (\mu K + P)\Delta\eta = (I + L(I - RA_0^{-1}L)^{-1}RA_0^{-1})|b\rangle(\Delta\theta_s + \varpi(\mu)) \\ \Delta\theta_i = \langle c| \Delta\eta \end{cases} \quad (\text{A-19})$$

Il suffit encore de modifier $|b\rangle$, et alors encore de décliner en ses composantes pour avoir l'impact de l'extra sur les gains étudiés. Toute décomposition de A_x donnera de possibles rétroactions (SVD ou autres).

A noter finalement que dans tous ces cas la réponse $\rho = \langle c| A^{-1}|b\rangle \varpi$ reste la même, de même que ses composantes, bien qu'apparemment la perturbation semble exciter le système via $|b\rangle$ originel ou modifié.

Essai d'une nouvelle rétroaction Ce problème s'apparente à celui que traitais Cacuci de la sensibilité à un mécanisme non-encore intégré dans un modèle. On prend ainsi comme matrice de base $A^\dagger = \mu K + P - A + |x\rangle\langle c| - |x\rangle\langle c|$, et on trouve un gain exclusif correspondant à ce nouveau mécanisme $g_x = -\langle c| D^{-1}|x\rangle$ où la matrice D diffère de A_0 par la présence de $|x\rangle\langle c|$. On applique une formule de changement pour retrouver A_0 , ce qui donne :

$$g_x = -\frac{\langle c| A_0^{-1}|x\rangle}{1 - \langle c| A_0^{-1}|x\rangle}, \quad (\text{A-20})$$

ce qui fait prendre à ce gain externe la forme d'une réponse. Ce résultat se généralise avec l'intervention d'un mécanisme plus élaboré en suivant les formes précédemment données.

Annexe B

La grande bavure¹ liée à la définition partielle de $A = \sum_j |b_j\rangle\langle c|$, on va dire $A^b = 0$, apparaît dans le fait que les rétroactions ne font pas réagir entre-elles les $n - 1$ couches supérieures. Et si on prend alternativement $\mu K + P - A^b$ comme système de base (à rétros climatos nulles), on s'éloigne de la rétro Planck — y compris à l'équilibre final. On peut a priori penser que l'irruption tempestive du Lapse-Rate dans le modèle aura au moins pour effet de faire réagir toutes ces couches, et d'exhiber une correction au L-R constant.

Comment écrire un modèle avec irruption du Lapse-Rate? Il faut bien définir $\Delta\theta^* = \Delta\theta - |1\rangle \Delta\theta_s$ et changer les variables², avec ce vecteur $|1\rangle$ de composantes l'unité.

¹30/12/08 je laisse, mais cette annexe devrait être dépassée par le modèle détaillé du $\Delta\theta^*$.

²c'est ce que font les Cess et Zhang *et al*, cf Zhang JGR-94

Alors, comme tout dépend de la perturbation de $\Delta\theta_s$ on peut déterminer ces nouvelles variables $\Delta\theta^* \equiv |r\rangle \Delta\theta_s$ et reporter dans le système des $\Delta\theta$, ce qui devrait expliciter une rétroaction de L-R, non ?

Par changement de variable et pour $\Delta\theta_s$ donné, le système des $\Delta\theta^*$ s'écrit

$$\begin{cases} (\mu K + P) (\Delta\theta^* + |1\rangle \Delta\theta_s) = A (\Delta\theta^* + |1\rangle \Delta\theta_s) \\ \Delta\theta_s = \langle c | (\Delta\theta^* + |1\rangle \Delta\theta_s) \end{cases}$$

Bien évidemment, la dernière équation confirme que la $n^{\text{ième}}$ composante de $\Delta\theta^*$ est nulle ($\langle c | 1 \rangle = 1$). Reste le système dans \mathfrak{R}^{n-1} :

$$(\mu\check{K} + \check{P} - \check{A}^b)\Delta\theta^* \equiv |\bar{a} - \mu\bar{k} - \bar{p}\rangle \Delta\theta_s, \quad (\text{B-1})$$

système qui fait apparaître un opérateur-colonne $|\bar{a} - \mu\bar{k} - \bar{p}\rangle$ exprimant le cumul des sensibilités de chaque couche à toutes les températures de la colonne (exprimé par ce $\bar{\cdot}$).

Il reste à reporter dans le système initial où on peut conserver le modèle de base :

$$\begin{cases} (\mu K + P)\Delta\theta \equiv |\check{r}\rangle \Delta\theta_s + |\bar{a}\rangle \Delta\theta_s \\ \Delta\theta_s = \langle c | \Delta\theta \end{cases} \quad (\text{B-2})$$

où on a noté $|\check{r}\rangle \Delta\theta_s$ ce groupe $A \begin{bmatrix} |\bar{r}\rangle \Delta\theta_s \\ 0 \end{bmatrix}$ et où on a donc que la $n^{\text{ème}}$ composante de $|\check{r}\rangle$ est nulle.

À présent, il est clair que le système est complet, que les rétroactions standards cellées dans $|\bar{a}\rangle \rightarrow \sum_j |b_j\rangle$ ont profondément changé (mais dans le bon sens puisqu'alors toutes les colonnes de A sont impliquées), et enfin que l'on peut définir ce mécanisme lié au L-R par $|\check{r}\rangle$.

Me semble qu'on voit plus, en rapport avec ce que montrent de manière différente L&C : c'est que cette irruption du L-R est tirée par les cheveux, ce qui se montre ici, bien que caché par le formalisme symbolique, dans la fonction de μ alambiquée constituant $|\check{r}\rangle$.

On va donc reformuler le problème en suivant la proposition de

Annexe C

On a rassemblé ici les résultats utiles de l'analyse de Floquet.