

# Le Formalisme d'Evolution par Transferts : une introduction au découpage de modèle et à l'analyse de rétro-actions

La Collaboration TEF-ZOOM  
(CIRED\*, LE<sup>†</sup>, LMD<sup>‡</sup>)

22 septembre 2004

La modélisation des systèmes est généralement conçue dans la perspective de simulation numérique. Notre collaboration s'efforce d'y associer des outils permettant de faciliter la compréhension du fonctionnement des systèmes. Une sorte d'idéal serait que la modélisation, pour la réalité, joue un rôle semblable à celui des "expériences par la pensée" pour la théorie.

De même que l'expérimentation procède par découpage de la réalité suivi d'analyse de la réponse d'un système quasi-isolé à des sollicitations contrôlées, le découpage d'un système en éléments plus simples autorise un questionnement nécessaire à son intelligibilité. Quel rôle tel élément joue-t-il dans le système global? Quel effet le reste du système a-t-il sur un élément? Ce questionnement renvoie à une pratique de la physique : l'analyse de couplage, de sensibilité, de rétroaction, que la modélisation devrait permettre d'explicitier et d'exploiter.

Le Formalisme d'Evolution par Transferts (TEF<sup>1</sup>) a pour but la mise en œuvre mathématique de cette approche de l'analyse dynamique de systèmes.

## 1 Découpage-raccordement de système par le TEF : cellules et transferts.

La modélisation d'un système se construit par découpage-raccordement de sous-systèmes choisis en fonction d'un questionnement. Ce découpage se fait de façon récursive, les sous-systèmes pouvant eux-mêmes être repartitionnés. On arrête l'opération de découpage lorsque les éléments restants correspondent à des modèles satisfaisant le niveau d'analyse souhaité. Une bonne pratique consiste à considérer un objet élémentaire

---

\*Centre International de Recherche sur l'Environnement et le Développement , Paris

†Laboratoire d'Énergétique, Université Paul Sabatier, Toulouse et son antenne de Tarbes

‡Laboratoire de Météorologie Dynamique, Paris

<sup>1</sup>pour Transfer Evolution Formalism, l'acronyme FET renverrait à Finite Element

comme soumis à une procédure expérimentale, c'est-à-dire quasi-isolé et sollicité par un ensemble de forçages le liant physiquement au reste du système.

On part de la définition d'un système global par son équation d'évolution sous forme d'état<sup>1</sup> :

$$\frac{d\vec{\eta}}{dt} = \vec{G}(\vec{\eta}, \vec{\psi}, t) \quad (1)$$

A conditions initiales  $\vec{\eta}(t_0)$  données, et avec des conditions limites et forçages connus  $\vec{\psi}(t)$ , la trajectoire du système est déterminée<sup>2</sup> : on dit que le problème est "bien posé".

Le **découpage** consiste à partitionner l'espace vectoriel  $\{\vec{\eta}\}$ , ce qui aboutit à la définition d'équations d'état pour chaque sous-espace  $\{\vec{\eta}_\alpha\}$  :

$$\frac{d\vec{\eta}_\alpha}{dt} = \vec{G}(\vec{\eta}_\alpha, \vec{\varphi}, \vec{\psi}, t) \quad (2)$$

où on remarque l'adjonction de conditions limites supplémentaires  $\vec{\varphi}$ . Le TEF exige en effet que chaque élément  $\alpha$  du système partitionné corresponde à un problème bien posé. Cela a deux conséquences :

- a) chaque élément, dénommé "cellule", ne doit explicitement pas dépendre de l'état d'un autre élément ;
- b) l'interface introduit par le découpage avec les autres cellules représente de nouvelles conditions aux limites (C.L.) dépendantes.

Si ces nouvelles C.L. sont connues, alors chaque cellule va suivre une trajectoire dite "découplée". Pour que les cellules suivent leur trajectoires d'ensemble, déterminée par le système global, il faut donc que ces conditions d'interface soient contraintes par le reste du système, ce qui se fait par l'introduction de modèles d'interface, dénommés "transferts" :

$$\vec{\varphi} = \vec{f}(\vec{\eta}, \vec{\varphi}, t) \quad (3)$$

L'équation (3) exprime que les transferts sont à tout instant déterminés par les états, et n'ajoutent donc pas de conditions initiales supplémentaires. La définition de ces transferts correspond ainsi à la notion de **raccordement**. Ces nouvelles variables, "les transferts", induites par le découpage, introduisent des modèles de couplage entre des éléments-cellules. Ils représentent couramment des contraintes de continuité, ou des flux et des forces dans les modèles physiques, des échanges, des répartitions et des informations dans les modèles macro-économiques.

Mathématiquement, la solution du système (2, 3) fournit la même trajectoire que (1). C'est de cette manière que le TEF met en œuvre la notion de découpage-raccordement. On aboutit en résumé à deux classes distinctes de modèles, et aux deux types de variables associés. Les **cellules** sont représentées par leur état et définies par des équations d'état, c'est-à-dire donnant leur évolution, alors que les **transferts** sont des équations de contrainte statique<sup>3</sup>.

---

<sup>1</sup>on utilisera l'appellation "d'équation d'état" ce type d'équation, selon l'usage actuel, par proximité avec la forme anglaise "state equation" de la théorie des systèmes dynamiques

<sup>2</sup>entre les éventuelles singularités

<sup>3</sup>on peut préférer les qualifier d'instantannées, le terme de "statique" étant utilisé en théorie de la commande

Les équations de cellule restent semblables à un problème aux limites. Cependant la présence de transferts, qui sont des conditions aux limites variant au cours du temps, exige et permet une analyse dynamique du couplage. Il faut ainsi connaître à la fois la trajectoire de chaque cellule soumise aux conditions dépendantes d'interface, mais également pouvoir expliciter la variation de cette trajectoire à un changement des conditions limites.

L'expression de la sensibilité de l'état de chaque cellule vis-à-vis des transferts permettra de caractériser le comportement dynamique global du système. Mathématiquement, c'est par linéarisation du système (2, 3) que nous allons exprimer ces sensibilités et résoudre le problème.

## 2 Linéarisation, analyse des éléments du TEF et résolution

L'étude des relations entre sous-systèmes est excessivement complexe si on regarde le système complet non-linéaire. Toute l'étude va donc se faire sur le système linéarisé sur une portion de la trajectoire. Le système linéaire obtenu dépend encore continuellement du temps, et dans un deuxième temps ce système linéaire est discrétisé.

L'ensemble de ces transformations permet d'avoir, à un instant donné, un système algébrique équivalent au système complet. Les éléments de ce système peuvent être interprétés en fonction de la problématique du découpage raccordement du TEF. Ce système permet également de déterminer la trajectoire à l'instant suivant.

### 2.1 Linéarisation

On considère le système (2, 3), non linéaire, sur une petite section de sa trajectoire (soit entre  $t_0$  et  $t_0 + \delta t$ ), et on détermine l'accroissement  $\vec{\delta\eta}$  de  $\vec{\eta}$  et  $\vec{\delta\varphi}$  de  $\vec{\varphi}$  par développement de Taylor :

$$\frac{\partial \vec{\delta\eta}}{\partial t}(\tau) = \vec{G}\Big|_{t_0} + \overline{\frac{\partial \vec{G}}{\partial \eta}}\Big|_{t_0} \vec{\delta\eta}(\tau) + \overline{\frac{\partial \vec{G}}{\partial \varphi}}\Big|_{t_0} \vec{\delta\varphi}(\tau) + \frac{\partial \vec{G}}{\partial t}\Big|_{t_0} \tau \quad (4)$$

$$\vec{\delta\varphi}(\tau) = \overline{\frac{\partial \vec{f}}{\partial \eta}}\Big|_{t_0} \vec{\delta\eta}(\tau) + \overline{\frac{\partial \vec{f}}{\partial \varphi}}\Big|_{t_0} \vec{\delta\varphi}(\tau) + \frac{\partial \vec{f}}{\partial t}\Big|_{t_0} \tau \quad (5)$$

On obtient un système d'Equations aux Dérivées Partielles (EDP) baptisé Système Linéarisé Tangent (SLT) en une portion de la trajectoire, avec  $\tau \in [t, t + \delta t[$  paramétrisant la trajectoire.

### 2.2 Discrétisation temporelle

La résolution de ce système linéaire est classique et peut être effectuée, soit en introduisant un schéma temporel, soit par transformation symbolique (Laplace, Fourier,

Borel ...). On considère l'application d'un schéma temporel, qui permettra de définir la trajectoire par morceaux. Nous verrons plus loin qu'une transformation symbolique donnerait le même résultat.

L'application du schéma de Crank Nicolson au système (4,5) fournit le système algébrique suivant :

$$\begin{cases} \overline{A}\vec{\delta\eta} + \overline{B}\vec{\delta\varphi} = \vec{\Gamma}\delta t \\ \overline{C^+}\vec{\delta\eta} - (\mathbb{I} + \overline{D})\vec{\delta\varphi} = \vec{\Omega}\delta t \end{cases} \quad (6)$$

avec les matrices et vecteurs introduits définis par :

$$\begin{cases} \overline{A} = \mathbb{I} - \frac{\delta t}{2} \left. \frac{\partial \overline{G}}{\partial \eta} \right|_{t_0} \\ \overline{B} = -\frac{\delta t}{2} \left. \frac{\partial \overline{G}}{\partial \varphi} \right|_{t_0} \\ \vec{\Gamma} = \vec{G} \Big|_{t_0} + \frac{\delta t}{2} \left. \frac{\partial \vec{G}}{\partial t} \right|_{t_0} \\ \overline{C^+} = \left. \frac{\partial \overline{f}}{\partial \eta} \right|_{t_0} \\ \overline{D} = -\left. \frac{\partial \overline{f}}{\partial \varphi} \right|_{t_0} \\ \vec{\Omega} = -\left. \frac{\partial \overline{f}}{\partial t} \right|_{t_0} \end{cases} \quad (7)$$

La matrice  $(\mathbb{I} + \overline{D})$  provient de la partition effectuée sur l'ensemble des transferts, qui introduit des contraintes statiques entre les "objets transferts" du TEF.

Cette formulation répond à notre programme, comme nous allons maintenant le montrer.

## 2.3 Interprétation des éléments du TEF

Une ultime transformation de (6) permet d'obtenir un système permettant de définir et d'interpréter les éléments fondamentaux du TEF, en éliminant  $\vec{\delta\eta}$  de la deuxième équation :

$$\begin{cases} \vec{\delta\eta} = \vec{\delta\eta}_{dec} + \overline{F}\vec{\delta\varphi} \\ (\mathbb{I} + \overline{C}_{(\delta t)})\vec{\delta\varphi} = \vec{\delta\varphi}_{ins} \end{cases} \quad (8)$$

Les matrices jacobiennes de la cellule fournissent  $\overline{F} = -\overline{A^{-1}B}$ . Cette matrice exprime la sensibilité des cellules aux conditions limites dépendantes  $\vec{\varphi}$ . Lors qu'elle est nulle, ou lorsque  $\vec{\delta\varphi} = 0$ , on a  $\vec{\delta\eta} = \vec{\delta\eta}_{dec}$ , qui représente l'évolution d'une cellule à conditions d'interface figées. C'est ce que nous avons appelé "l'évolution découplée" de la cellule (le long du SLT, sur un pas de temps<sup>1</sup>) :

$$\vec{\delta\eta}_{dec} = \overline{A^{-1}}\vec{\Gamma}\delta t$$

<sup>1</sup>plus rigoureusement, dans la variété différentielle du SLT correspondant à ce pas de temps

De même,  $\overline{\overline{C^+}}$  de (6) détermine l'évolution des transferts pendant un pas de temps lorsque les cellules évoluent. Si on élimine  $\overrightarrow{\delta\eta}$  de l'équation de transferts, ce qui est possible par construction<sup>1</sup>, on obtient la deuxième ligne de (8), avec :

$$\overline{\overline{C_{(\delta t)}}} = \overline{\overline{D}} + \overline{\overline{C^+}} \overline{\overline{A^{-1}}} \overline{\overline{B}}$$

et

$$\overrightarrow{\delta\varphi}_{ins} = \overline{\overline{C^+}} \overrightarrow{\delta\eta}_{dec} - \overrightarrow{\Omega} \delta t$$

$\overline{\overline{C_{(\delta t)}}}$  est ce qu'on appelle une **matrice de couplage** entre les transferts. Sous cette forme, elle est donc dépendante de  $\delta t$ . Nous reviendrons ultérieurement à l'intérêt de l'analyse de cette matrice du point de vue de la compréhension du système.

$\overrightarrow{\delta\varphi}_{ins}$  représente l'évolution des transferts lorsque  $\overline{\overline{B}} = 0$ .  $\overrightarrow{\delta\varphi}_{ins}$  est ainsi dénommé "évolution insensible" des transferts (les cellules suivent leurs trajectoires découplées). Dans ce cas, on remarque que  $\overline{\overline{C_{(\delta t)}}} = \overline{\overline{D}}$ , c'est-à-dire que les cellules ne couplent plus les transferts entre eux.

En résumé, l'utilisation du SLT localement sur la trajectoire donne accès à une formulation exhibant toute la dynamique du système, en déclinant les inter-influences entre les objets élémentaires du TEF. Cette formulation permet également de déterminer un segment de la trajectoire, par résolution d'un système algébrique linéaire.

## 2.4 Structure matricielle du système et résolution algébrique

Symboliquement la structure matricielle du système (6) est la suivante :

$$\begin{bmatrix} \overline{\overline{A}} & \overline{\overline{B}} \\ -\overline{\overline{C^+}} & \mathbb{I} + \overline{\overline{D}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overrightarrow{\delta\eta} \\ \overrightarrow{\delta\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma \delta t \\ -\Omega \delta t \end{bmatrix}$$

La résolution est conduite en éliminant d'abord les variables d'état, en utilisant la procédure qui permet également d'obtenir (8) :

$$\overrightarrow{\delta\eta} = -\overline{\overline{A^{-1}}} \overline{\overline{B}} \overrightarrow{\delta\varphi} + \overline{\overline{A^{-1}}} \overrightarrow{\Gamma} \delta t$$

$\overrightarrow{\delta\eta}$  est introduite dans la seconde équation :

$$\overline{\overline{C^+}} \left( -\overline{\overline{A^{-1}}} \overline{\overline{B}} \overrightarrow{\delta\varphi} + \overline{\overline{A^{-1}}} \overrightarrow{\Gamma} \delta t \right) - \left( \mathbb{I} + \overline{\overline{D}} \right) \overrightarrow{\delta\varphi} = \overrightarrow{\Omega} \delta t$$

$$\left( \mathbb{I} + \overline{\overline{D}} + \overline{\overline{C^+}} \overline{\overline{A^{-1}}} \overline{\overline{B}} \right) \overrightarrow{\delta\varphi} = \overline{\overline{C^+}} \overline{\overline{A^{-1}}} \overrightarrow{\Gamma} \delta t - \overrightarrow{\Omega} \delta t$$

Cette équation linéaire est classiquement résolue et donne  $\overrightarrow{\delta\varphi}$ . On peut alors résoudre chaque équation d'état où tout est connu sauf  $\overrightarrow{\delta\eta}$ .

---

<sup>1</sup>le problème est bien posé donc  $\overline{\overline{A}}$  est régulière

## 2.5 Résolution numérique

Nous avons ainsi donné les grandes lignes de la résolution d'un système par le TEF. En réalité, le traitement des matrices jacobienues soulève des difficultés. Explicitons le système obtenu pour un système de trois cellules  $(\alpha, \beta, \gamma)$  et l'ensemble des transferts rassemblés dans un seul vecteur  $\vec{\varphi}_u$  :

$$\begin{matrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ u \end{matrix} \begin{pmatrix} \overline{\overline{A}}_{\alpha\alpha} & 0 & 0 & \overline{\overline{B}}_{\alpha u} \\ 0 & \overline{\overline{A}}_{\beta\beta} & 0 & \overline{\overline{B}}_{\beta u} \\ 0 & 0 & \overline{\overline{A}}_{\gamma\gamma} & \overline{\overline{B}}_{\gamma u} \\ -\overline{\overline{C}}^+_{u\alpha} & -\overline{\overline{C}}^+_{u\beta} & -\overline{\overline{C}}^+_{u\gamma} & \mathbb{I} + \overline{\overline{D}} \end{pmatrix}$$

On conçoit que pour un système de forte dimension, la matrice complète est à la fois énorme et très creuse. La résolution d'un tel problème fait appel à une gestion par blocs des matrices élémentaires et la recherche de structures de filiation entre blocs et super blocs.

La structure choisie pour résoudre un système sous TEF est introduite via une procédure de découpage. Des "familles" regroupent des cellules, elles mêmes regroupées en super-familles etc. On obtient un arbre de familles dont les feuilles sont les cellules. Une structure des transferts s'en déduit, qui associe automatiquement chaque famille à un ensemble de transferts. On peut montrer qu'il existe un isomorphisme entre cet arbre et la structure matricielle du système. Cet isomorphisme est utilisé pour la résolution en suivant une méthode de type hyper-frontale<sup>1</sup>.

Avant de passer aux applications du TEF pour l'analyse des systèmes, il est utile d'introduire un outil mathématique d'analyse du SLT dans le paragraphe suivant, en revenant sur une méthode symbolique de résolution du système linéaire et en montrant l'équivalence avec la méthode déjà présentée au 2.2.

## 2.6 La transformée de Borel du SLT

Nous avons mentionné que les éléments du TEF (matrices et vecteurs) étaient dépendants de  $\delta t$  lorsque l'on utilise un schéma temporel pour la résolution. Pour restituer la dynamique de la réponse du SLT, nous utiliserons ici classiquement le passage en espace symbolique. Mais au lieu de la transformée de Laplace qui oblige à travailler dans le corps des complexes, nous utilisons la transformée de Borel, définie par

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{B}} \mathcal{B}[f](\tau) = \frac{1}{\tau} \int_0^\infty e^{-t/\tau} f(t) dt = \frac{1}{\tau} \tilde{f}\left(\frac{1}{\tau}\right) \quad (9)$$

où  $\tilde{f}(p)$  est la transformée de Laplace de  $f(t)$ . On voit que, contrairement à celle de Laplace, la variable de Borel  $\tau$  est réelle et homogène au temps.

En appliquant cette transformation au système (4,5), on a

---

<sup>1</sup>ou plus précisément une méthode *hyper multi-frontale à noeuds super-relaxés*, selon une nomenclature de la SIAM due à J.Liu, cf sources en fin d'article.

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{B}[\vec{\delta\eta}_\alpha] = \overbrace{\left[ 1 - \tau \frac{\overline{\partial G_\alpha}}{\partial \eta_\alpha} \Big|_{t_n} \right]^{-1}}^{\mathcal{B}[\vec{\delta\eta}_{\alpha,dec}]} \tau \mathbf{G}_\alpha|_{t_n} + \tau \overbrace{\left[ 1 - \tau \frac{\overline{\partial G_\alpha}}{\partial \eta_\alpha} \Big|_{t_n} \right]^{-1} \frac{\overline{\partial G_\alpha}}{\partial \varphi} \Big|_{t_n}}^{\overline{\mathcal{F}}} \mathcal{B}[\vec{\delta\varphi}] \\ \mathcal{B}[\vec{\delta\varphi}] = \sum_\beta \frac{\overline{\partial f}}{\partial \eta_\beta} \Big|_{t_n} \mathcal{B}[\vec{\delta\eta}_\beta] + \frac{\overline{\partial f}}{\partial \varphi} \Big|_{t_n} \mathcal{B}[\vec{\delta\varphi}] \end{array} \right. \quad (10)$$

en effet, il suffit de remarquer que :  $\mathcal{B}[\partial f/\partial t] = (1/\tau)\mathcal{B}[f]$ . En éliminant les variables de cellules de la première équation dans la seconde, on obtient le système équivalent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{B}[\vec{\delta\eta}] = \mathcal{B}[\vec{\delta\eta}_{dec}] + \overline{\mathcal{F}} \mathcal{B}[\vec{\delta\varphi}] \\ [1 + \overline{\mathcal{C}}] \mathcal{B}[\vec{\delta\varphi}] = \mathcal{B}[\vec{\delta\varphi}_{ins}] \end{array} \right. \quad (11)$$

le système obtenu est ainsi comparable à (8), si ce n'est que cette fois-ci, la variable dynamique est  $\tau$  au lieu de  $\delta t$ . C'est cette propriété que nous allons exploiter.

Quant au lien entre les deux systèmes (8) et (11), il est obtenu grâce à une propriété du schéma de Crank-Nicolson, car on peut montrer que pour  $t$  petit :

$$\delta\eta(t) \sim 2 \cdot \mathcal{B}(\delta\eta) \left( \frac{t}{2} \right) \quad (12)$$

Ainsi, la résolution numérique du SLT, conduite par accroissements  $\delta t$ , est identifiable formellement à la transformée de Borel locale du SLT. Autrement dit, les éléments du TEF sont fonctions de  $\tau$  et solutions exactes du SLT. Simplement, le calcul de la trajectoire s'effectue en ne considérant que des faibles valeurs de la variable de Borel. Dans la suite, on ne distinguera donc plus entre les deux formulations équivalentes.

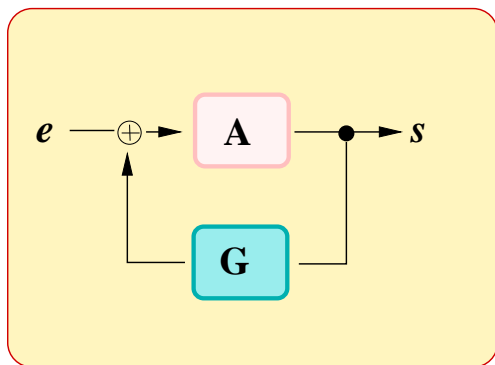
Nous allons maintenant examiner de manière simplifiée comment cette structure apporte les éléments de réponse à notre recherche de compréhension du fonctionnement d'un système formulé avec le TEF.

### 3 Analyse de système et TEF

Le problème de la restitution d'une certaine intelligibilité des modèles numériques est à l'origine de vaillants efforts en mécanique des fluides numérique et en modélisation numérique du climat par exemple. Ainsi, les traitements postopérateurs des résultats deviennent quasiment aussi complexes que la simulation elle-même<sup>1</sup>. Laissant de côté l'aspect de recherche des structures spatiales dans les modèles maillés, nous reprendrons tout d'abord une tendance à caractériser un système par la manière dont il régule, absorbe, ou au contraire fait diverger une grandeur soumise à perturbation. Le concept de **gain de rétroaction** est aujourd'hui mis à l'épreuve pour tenter de comprendre

<sup>1</sup>Note de rédaction : bien que la méthode ait été développée historiquement pour les Sciences de l'Ingénieur, ce texte était destiné à une collaboration européenne concernant les sciences du climat et de l'économie.

le climat par exemple. Une telle tentative pose un problème théorique considérable, car elle se situe dans un contexte largement en dehors du cadre de sa définition originelle. Au départ, il s'agit de circuits électriques linéaires et de leur analyse symbolique



$$s(p) = H(p)e(p) = \frac{A(p)}{1 - A(p)G(p)}e(p) \quad (13)$$

FIG. 1 – Boucle de rétroaction élémentaire et sa fonction de transfert

(en transformée de Laplace ou Fourier). Considérant le circuit entrée–sortie Fig. 1, la dérivation par  $G$  lie la sortie  $s$  amplifiée par  $A$  de l'entrée, lui fait subir un traitement  $G$ , qui est ajouté à l'entrée  $e$ . La fonction de transfert  $H$  donne directement la sortie en fonction du signal d'entrée (13).  $G$  est appelé gain de rétroaction. Il permet de réguler la sortie, de mettre en forme un signal, de diminuer le bruit etc. Il s'agit donc au départ de commande active. Les électriciens considèrent aussi ce circuit comme un véritable élément de systèmes plus complexes, que l'on peut analyser en combinant des circuits élémentaires de rétroaction comme celui de la figure 1.

Au contraire, dans la tentative d'extension de l'application du concept, il s'agit d'une analyse conceptuelle plaquée sur un système difficilement décomposable, voire non-linéaire. Cette tentative montre donc essentiellement la nécessité ressentie de construire des outils d'analyse supplémentaires à la simulation numérique des trajectoires. Le TEF permet de définir rigoureusement le gain de rétroaction dans un cadre très général des systèmes numériques, c'est ce que nous allons maintenant illustrer.

## Gain de rétroaction avec le TEF

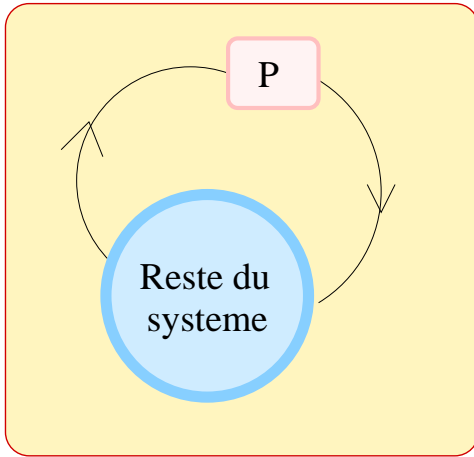
Pour fixer les idées, nous prenons l'exemple d'un modèle macro-économique, celui d'IMACLIM-PROJ (cf sources). Sans rentrer dans les détails inutiles ici, ce modèle réduit le système entrée-sortie de la comptabilité nationale à six secteurs (pétrole, transport, énergie, habitat, commerce et composite). Un modèle de comportement des consommateurs y est ajouté. Globalement, le modèle donne la réponse du système économique à une croissance (exogène) du prix du pétrole. Le modèle est censé reproduire les macro-équilibres entre consommation, production, emploi et prix. La dynamique du système est conduite par le niveau et le choix des consommations autorisés par les prix et les salaires d'une part, et par la possibilité de substitution entre branches via une matrice d'échange<sup>1</sup>. Ainsi, lorsque le prix d'un produit s'élève, les branches peuvent lui substituer un produit moins cher pour optimiser leur efficacité économique.

<sup>1</sup>ou matrice de Leontieff.



Un modèle macro-économique plus général est très rapidement complexe, car le nombre de branches et produits atteint la centaine dans la comptabilité nationale de chaque pays. De plus certains modèles, comme celui de la dynamique des acteurs économiques, sont non-linéaires. Ainsi, si l'analyse des trajectoires après simulation permet de vérifier un certain réalisme du modèle, celui-ci reste cependant opaque à la compréhension de son comportement, surtout dès qu'on l'interroge dans des situations de chocs. D'où la nécessité d'outils d'analyse complémentaire.

Le gain de rétroaction est un premier outil de ce genre. Il considère une seule variable séparée du reste du système, ce qui avec le TEF est équivalent à séparer un processus associé à la variable considérée du reste. Cette séparation doit être liée à une boucle de rétroaction, de manière à ce que le gain mesure l'effet d'une fermeture de cette boucle sur la réponse à une perturbation, comme le suggère la figure :



$$\begin{cases} \delta p + \mathbf{C}_{px} \vec{\delta x} = \delta p_{ins} \\ \mathbf{C}_{xp} \delta p + (1 + \mathbf{C}_{xx}) \vec{\delta x} = \vec{\delta x}_{ins} \end{cases} \quad (14)$$

FIG. 2 – boucle fermée : système avec une seule variable non éliminée ( $p$ ).

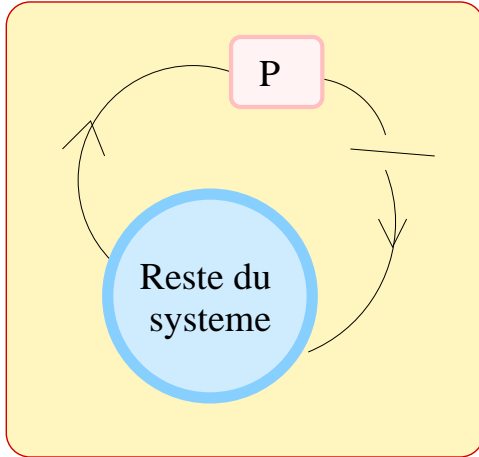
où on examine l'effet du système sur le prix du secteur des transports, l'un des six secteurs retenus dans le modèle. Ce schéma correspond au système d'équations (14). Dans ce système,  $\vec{x}$  représente l'ensemble des variables du système à l'exception de  $p$  le prix transport. La matrice  $\mathbf{C}_{px}$  est un vecteur ligne, et  $\mathbf{C}_{xp}$  est un vecteur colonne. On peut noter que la première équation est le modèle associé au transfert des prix lorsque  $\vec{x}$  représente toutes les autres variables. Explicitons l'effet de l'ouverture de la boucle formellement, pour arriver à une définition du gain de rétroaction associé à cette boucle :

$$[\text{Prix du transport } p] \rightarrow [\text{Reste du système}] \rightarrow [\text{Prix du transport } p]$$

On élimine donc la variables  $\vec{\delta x}$  de l'équation du prix  $p$  :

$$(1 - \mathbf{C}_{px}(\mathbf{1} + \mathbf{C}_{xx})^{-1}\mathbf{C}_{xp}) \delta p = \delta p_{ins} - \mathbf{C}_{px}(\mathbf{1} + \mathbf{C}_{xx})^{-1}\vec{\delta x}_{ins} \quad (15)$$

boucle ouverte : la boucle est coupée après le transfert  $p$ , qui ne fait plus réagir le système complet, ce qui s'effectue en imposant que toutes la matrice ligne  $\mathbb{C}_{xp}$  soient nulle (le système est insensible aux variations de  $p$ ).



Le système en boucle ouverte est obtenu en annulant toutes les matrices qui font réagir le système à une variation de  $p$  dans l'équation (15).

FIG. 3 – Système en boucle ouverte.

On remarque que le terme de droite de l'équation (15),  $\mathbb{C}_{px}(1 + \mathbb{C}_{xx})^{-1}\overrightarrow{\delta x_{ins}}$  reste inchangé dans la coupure de la boucle. Alors, la fermeture de la boucle de rétroaction rétablit l'équation dépendante :

$$(1 - g)\delta p = \delta \dot{p}_{ins}$$

avec  $g = \mathbb{C}_{px}(1 + \mathbb{C}_{xx})^{-1}\mathbb{C}_{xp}$ , et  $\delta \dot{p}_{ins} = \delta p_{ins} - \mathbb{C}_{px}(1 + \mathbb{C}_{xx})^{-1}\overrightarrow{\delta x_{ins}}$ . On peut montrer que cette grandeur est indépendante des manipulations algébriques effectuées pour éliminer les variables associées au reste du système.

Le terme  $g$  est appelé "gain de rétroaction" du système au prix du transport. Sa dépendance du temps (ou de  $\tau$ ) caractérise donc la réponse linéaire du système à une perturbation imposée de l'extérieur à ce prix. Dans l'exemple à six secteurs évoqué, on a trouvé un gain annuel de 15 % ( $\tau=1$  an), ce qui signifie que la rétroaction (positive) du système a pour effet d'amplifier l'augmentation imposée du prix sur un an.

Un autre exemple a été traité en prenant cette fois les salaires du secteur composite. La rétroaction du système est trouvée de 50 % par an. Ainsi, une injection d'une unité aux salaires provoque apparemment un accroissement d'activité telle qu'il se retrouvent augmentés de 1.50 unité à la fin de l'année (on peut dire que le modèle est Keynesien). On voit comment ce concept de gain de rétroaction fournit des informations permettant de caractériser le fonctionnement global du système construit. La question qui se pose directement alors, c'est pourquoi tel système réagit ainsi, et pour reprendre le dernier exemple, comment expliciter ce fonctionnement Keynesien du modèle. On peut alors considérer la variation du gain quand on fige une cellule ou un transfert, ce qui permet

d'induire quels sont les objets du systèmes qui contribuent au gain. Une autre possibilité concerne l'analyse de couplage, qui généralise la notion de gain de rétroaction.

En résumé de cette partie, par rapport au gain de rétroaction des électriciens, on a obtenu un outil d'analyse où le gain est obtenu par un modèle numérique, aussi complexe soit-il, à condition qu'il ait été formalisé par le TEF, puisque le calcul est basé sur la composition de dérivées partielles des variables entre-elles (SLT et élimination). De façon un peu plus compliquée, l'analyse de couplage reprend la technique précédente en remplaçant la variable scalaire  $p$  extraite du système par plusieurs variables.

## Aspects informatiques du logiciel ZOOM

### Généralités

ZOOM (Zone Organised Optimal Modelling) est l'acronyme d'un environnement de modélisation dédié aux applications du TEF. Il permet d'une part de calculer la trajectoire d'un système partitionné en familles, cellules et transferts, mais aussi de calculer les transformées de Borel des éléments d'analyse autorisée par l'utilisation du TEF<sup>1</sup>.

La programmation d'un modèle s'effectue selon deux étapes principales :

(1) Une première étape consiste à définir les modèles élémentaires de cellules et de transferts, qui sont dénommés "processeurs" (de cellule ou de transfert). La programmation utilise un langage spécifique en pseudo-Fortran, qui permet de gérer les connections entre objets. Ces processeurs sont réutilisables d'un modèle à un autre et de nombreux processeurs sont disponibles dans la communauté TEF-ZOOM, ce qui facilite la tâche de création d'un nouveau modèle.

(2) La deuxième étape consiste à entrer la structure du système en connectant les objets élémentaires de type cellules par des transferts. Il est aussi possible de rassembler à ce stade ces objets en familles, super-familles etc. Un langage spécifique est alors utilisé pour :

- (a) créer un objet et lui associer un processeur ;
- (b) effectuer des connections entre objets ;
- (c) regrouper des objets en familles et en super-familles en formant une structure arborescente (l'arbre ZOOM) ;

De manière plus classique, il faut initialiser les variables d'états, fournir des valeurs aux paramètres pour instancier les processeurs, etc, définir des sorties graphiques particulières - les sorties standards étant automatiquement fournies. Nous renvoyons aux manuels d'utilisateur pour de nombreuses autres facilités.

Lorsque ZOOM est alors lancé, il effectue la connection entre objets, réserve des blocs de mémoire pour toutes les matrices et vecteurs, appelle chaque processeur associé aux objets avec les bons paramètres, puis effectue la résolution pas par pas pour calculer

---

<sup>1</sup>un logiciel simplifié suivant les mêmes principes est également disponible, cf papier *Mini\_Ker et Adjoint : un résumé*

une trajectoire. Les sorties graphiques sont accessibles pour chaque variable du système complet, rangées dans la même structure arborescente que celle qui a été choisie en entrée. Un logiciel graphique (VIZU) utilisant celui du CERN (PAW) permet leur visualisation. De plus, les coefficients de couplage et de gain entre parties choisies du système sont accessibles et traitées post-calcu.

## les Processeurs

Les processeurs (de cellules et de transferts) ont pour objet de déterminer les éléments du TEF caractérisant chaque objet élémentaire (matrices et vecteurs), à chaque pas de temps.

### Processeur de Cellule :

L'évolution de l'état d'une cellule pour un pas de temps donné s'écrit :

$$\vec{\delta\eta} = \vec{\delta\eta}_{dec} + \overline{\overline{F}}\vec{\delta\varphi}$$

où le vecteur  $\vec{\delta\varphi}$  représente un ensemble de transferts connectés à cette cellule ( $\alpha$ ). La connection fournit leur valeur au début du pas de temps. Le processeur peut calculer  $\vec{\delta\eta}_{dec}$ , ainsi que la matrice  $\overline{\overline{F}}$ .

- En entrée, on a :
  - la valeur de l'intervalle  $\delta t$ ,
  - la valeur initiale de l'état de la cellule, celle des transferts connectés, et les conditions limites éventuelles ( $\vec{\phi}_0$ ).
- En sortie, on obtient :
  - le vecteur évolution découplée de la cellule  $\vec{\delta\eta}_{\alpha dec}$
  - ainsi que la matrice  $\overline{\overline{F}}$  qui représente l'effet sur la cellule de l'évolution de son environnement.

### Processeur de Transfert :

Les variables de transfert sont associées à des équations de contrainte statique qui les lient aux cellules auxquelles ils sont connectés. Contrairement aux cellules, ils sont éventuellement connectés à d'autres transferts (restreints cependant à l'ensemble des transferts connectés aux cellules de leur environnement).

$$\vec{\phi} = \vec{f}(\vec{\eta}_{\alpha 0}, \vec{\phi}_0)$$

Le processeur de transfert calcule la matrice  $\overline{\overline{C^+}}$  qui, de façon analogue aux cellules, représente l'effet de l'environnement sur l'évolution du transfert à l'horizon du pas de temps.

- En entrée on a :
  - la valeur de l'intervalle  $\delta t$ ,
  - les valeurs initiales des objets connectés :  $\vec{\eta}_0$  pour les cellules,  $\vec{\phi}_0$  pour les transferts éventuels.

- En sortie, il fournit
  - le vecteur des variables de transfert
  - et les matrices  $\overline{C^+}$  et  $\overline{D}$ .

On peut remarquer que l'interdépendance entre les transferts a pour conséquence l'obtention d'un système implicite à résoudre à chaque pas de temps (qui est effectué par ZOOM au début de chaque intervalle temporel).

# CONCLUSIONS

Dans la construction de modèle par le TEF, l'opération de découpage-raccordement a pour objet de construire une structure entre des objets élémentaires bien définis (les cellules). Le système ainsi modélisé peut alors être analysé en terme d'inter-influence entre objets de façon rigoureuse. Tout modèle représentant un objet doit fournir les éléments du TEF (matrices et vecteurs) qui s'interprètent en terme d'évolution découplée pour les cellules, d'évolution insensible pour les transferts, qui expriment une tendance intrinsèque de ces objets. Les matrices Jacobiennes fournies par chaque modèle donnent en complément la sensibilité locale des cellules aux variables d'interface, et réciproquement des transferts aux cellules qu'ils connectent entre elles.

On voit ainsi comment le programme que nous nous étions fixé est accompli : les base de l'analyse des inter-influence sont calculées pour chaque objet du TEF. Dès lors, la résolution numérique du système en suivant la structure arborescente des familles met en œuvre une manipulation algébrique qui combine les matrices Jacobiennes en reconstituant la chaîne des dérivations partielles itérées de fonctions de fonctions. C'est ainsi que les variables de systèmes itérativement réduits exhibent tous les couplages effectués par les variables éliminées. Tous les ingrédients de l'analyse de couplage et rétroaction, de sensibilité et propagation d'erreur ou de bruit sont ainsi présents. Leur exploitation soulève bien évidemment quelques difficultés, en particulier pour les systèmes non-linéaires. Nous avons montré que l'exploration du SLT local permet une analyse en transformée de Borel qui caractérise rigoureusement la dynamique du système. De façon plus générale, l'expression du modèle par matrices Jacobiennes donne automatiquement accès au modèle adjoint et ainsi à de nombreuses méthodes classiques d'optimalisation et de calcul de sensibilité des systèmes non-linéaires.

Nous explorons ces diverses techniques sur des problèmes thématiquement assez diversifiés (Sciences pour l'Ingénieur, Économie et Climat principalement, bientôt peut-être en Biologie). Divers articles et documents de travail seront progressivement mis sur ce site.

---

## Sources :

- sur Borel : article ClimSI (2004)
- sur un modèle macro-éco et gain : rapport d'avancement ZOOM-ProjTES (2002)
- Séminaire TEF-ZOOM Volume 1, TEF, EDH, L'Agelonde, 21-25 octobre 1991.
- sur l'utilisation du TEF-ZOOM en modélisation : Thèses de Vincent PLatel, Stéphane Blanco, Olivier Fudym, Richard Fournier.
- sur les fondements du TEF : thèse de Jean-Louis Joly.
- sur l'arbre ZOOM : Liu J.W.H. 1992 : The multifrontal method for sparse matrix solution : Theory and Practice. *Society for Industrial and Applied Mathematics Review*, **34**, 82-109. Voir aussi manuel EDH. *in documents*