

Gains et Lotka–Volterra

Mars 2006

Application de la Boreleig de Mini_ker à l'étude d'un modèle avec transition statique–dynamique.

1 Introduction au modèle prédateur–proie

On étudie le modèle aux variables réduites

$$\begin{cases} \partial_t x = ax - a\varphi \\ \partial_t y = -cy + c\varphi \\ \varphi = xy \end{cases} \quad (1)$$

où x représente la population servant de viande à y ¹. En l'absence de prédateur, la proie prolifère indéfiniment, alors que le prédateur sans viande dépérit (et peut être amené à se couvrir de ridicule). Une rencontre se traduit par une perte pour l'un et un gain pour l'autre.

Ce système possède un seul point d'équilibre non trivial en $(1, 1)$. Sinon, il reste sur une trajectoire périodique en forme d'œuf. Dans le modèle de Mini_ker, on a introduit un transfert des rencontres $\varphi = xy$. On étudie le système des gains et réponses associé à ce transfert en exploitant la technique Boreleig (cf papier Effluents). On reprend d'abord des résultats anciens ayant permis de vérifier l'intégration numérique des propagateurs dans Mini_ker, en parallèle à la résolution analytique dans le cas de l'équilibre – où le système est linéaire à coefficients constants. On passe ensuite à l'analyse du cas non-linéaire.

2 L–V au point d'équilibre

Dans ce cas, la matrice d'avance est à coefficients constants :

$$A^{spha} = \begin{bmatrix} 0 & -a \\ c & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

et la décomposition en éléments propres amène au calcul du propagateur d'état :

$$\Phi(t) = \frac{1}{2i\omega} \begin{bmatrix} \sqrt{a} & \sqrt{a} \\ -i\sqrt{c} & i\sqrt{c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \exp i\omega t & 0 \\ 0 & \exp -i\omega t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i\sqrt{c} & -\sqrt{a} \\ i\sqrt{c} & \sqrt{a} \end{bmatrix} \quad (3)$$

¹Toute ressemblance avec des acteurs de la vie politique française ne peut être que fortuite, ndlr (A11, insecte de l'unsecte).

avec $\omega = \sqrt{ac}$, qui donne finalement

$$\Phi(t, 0) = \begin{bmatrix} \cos \omega t & -\frac{a}{\omega} \sin \omega t \\ \frac{c}{\omega} \sin \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix} \quad (4)$$

L'intégration du SLT dans Mini_ker est effectuée comme dite dans la texte sur les Propagateurs, et est bien sûr parfaite, on donne ici un point de vue graphique en portant l'œuf de V-L à différentes C.I. perturbées par rapport à (1, 1), comparées à leur propagation par $\Phi(t, 0)$. On constate que le propagateur permet encore de

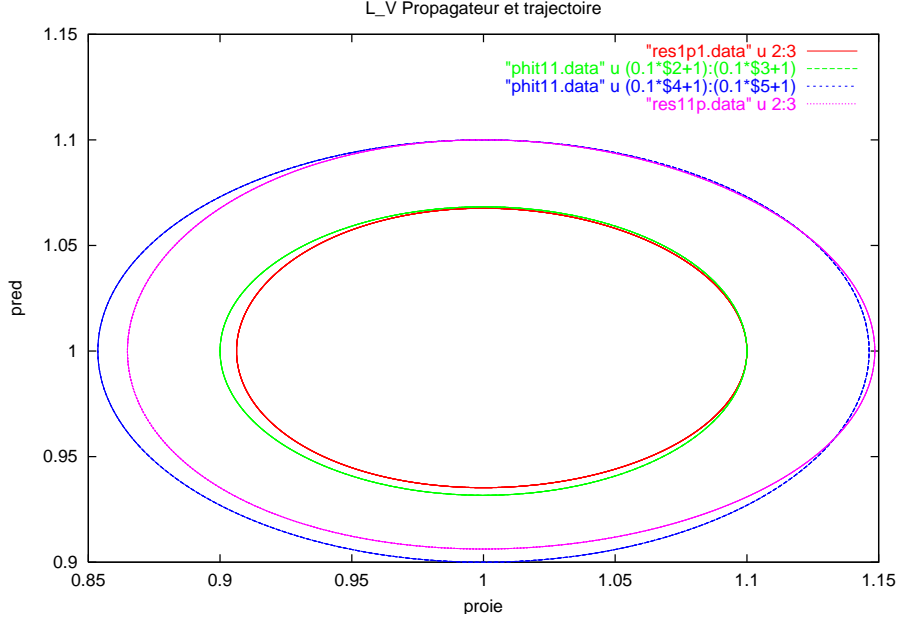


FIG. 1 – Trajectoires directes et propagées. Intérieur (1.1,1), extérieur (1,1.1).

suivre qualitativement une perturbation de 10%.

Dans le cas linéaire, on a intégré le système $(92/\text{eff})^1$ donnant la réponse de type $\frac{g}{1-g}$, et l'adjointe au transfert avec réponse intégrale, pour obtenir la fig. 2. On peut ainsi constater la validité numérique de la correspondance entre réponse de la variable à un step (Ψ_t) et réponse de son intégrale à un pulse $(w_{adj})^2$.

On a aussi déjà montré que l'on a

$$\tilde{\sigma}(\mu) = \sum_{i=1}^n \frac{\langle c^\dagger | e_i \rangle \langle b | f_i \rangle}{\mu - \lambda_i} \tilde{u}(\mu) \quad (5)$$

où μ est la variable de Laplace, que l'on obtient par développement sur les éléments propres de la matrice A^{spha} . Cette décomposition est exploitée par Mini_ker dans la routine *Boreleig* qui fournit alors :

```
gain(tau)=-1.5*tau/(1.-1.5*tau)+7.E-01*tau/(1.-(-7.E-01*tau))
```

```
gain(t)=-1.*(1.-exp(1.5*t))+1.*(1.-exp(-7.E-01*t))
```

¹toutes les références externes concernent le papier Effluents.

²la réponse $\Psi_t \leftrightarrow \frac{g}{1-g}$ alors que $w_{adj} \leftrightarrow \frac{1}{1-g}$.

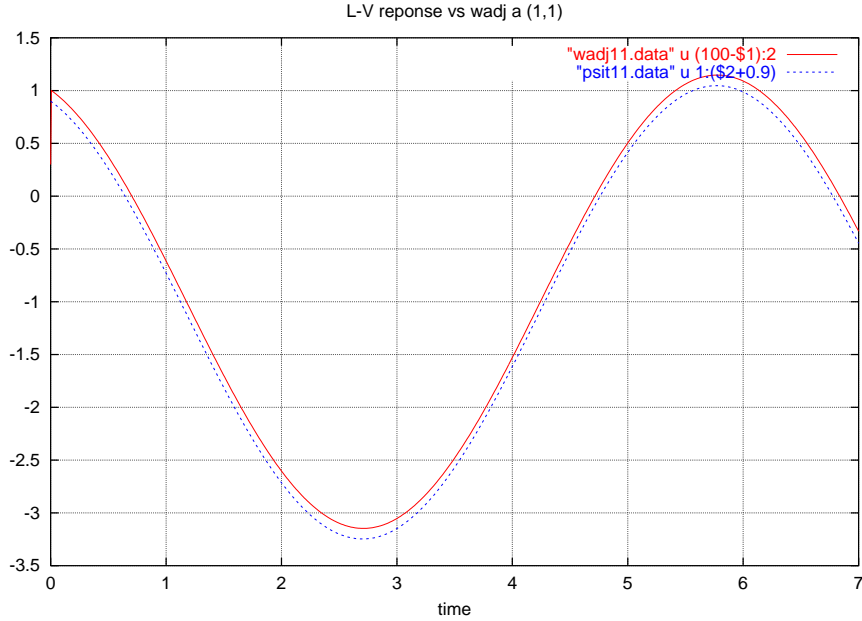


FIG. 2 – Réponse et variable adjointe décalées pour visualiser l'écart.

$$\text{rep}(\tau) = \tau * (-8.E-1 * (1. - 0.*\tau) - 2.1*\tau) / ((1. - 0.*\tau)**2 + (1.024695*\tau)**2)$$

$$\text{rep}(t) = (2.*\cos(1.024695*t) - 7.807201E-01*\sin(1.024695*t)) * \exp(0.*t) - 2.$$

où τ est la variable de Borel (on a un peu tronqué les printouts verbeux des formules). La fonction de gain possède ainsi deux pôles simples (\pm), alors que la réponse est oscillante avec sa paire non amortie¹. Ce résultat peut surprendre et on peut retenir que le gain semble un composant élémentaire de la réponse. En effet, la série infinie $g + g^2 + g^3 + \dots$ constituant in fine la réponse $\frac{g}{1-g}$, s'obtient en ré-injectant en boucle ouverte la perturbation du transfert ad infinitum. Cette interprétation sera à revoir dans le cas non-statique.

Les valeurs numériques sont conformes à la solution analytique, avec $a = 1.5$ et $c = 0.7$ qui donnent $\omega = 1.024695$. Par ailleurs, les formules fournissent la même réponse que les fig.2.

3 Le cas hors d'équilibre

Le système hors d'équilibre (fig. 3) parcourt son œuf et les coefficients des matrices jacobiennes cessent d'être constants (ils sont cependant périodiques). ON a aussi tracé le nouveau $\Phi(1, 1)$, les autres composantes variant de manière semblable. Sur la courbe avec les boites, on part de (1.5, 1.5). On a normalisé Φ pour représenter (en (1.5, 1.5)) les variations de C.I. de $\pm 5\%$ – ici, donc, en x seulement. La trajectoire est parcourue dans le sens horaire, et alors chaque boite représente la position du point central dans la limite de cette perturbation initiale. Chaque boite donne donc la variation de la trajectoire mais uniquement en ce qui concerne le nombre de lapins quand on a modifié cette population initialement ($\leftrightarrow \Phi(1, 1)$).

¹ne pas confondre avec celle de Danton, que les plus jeunes demandent aux autres.

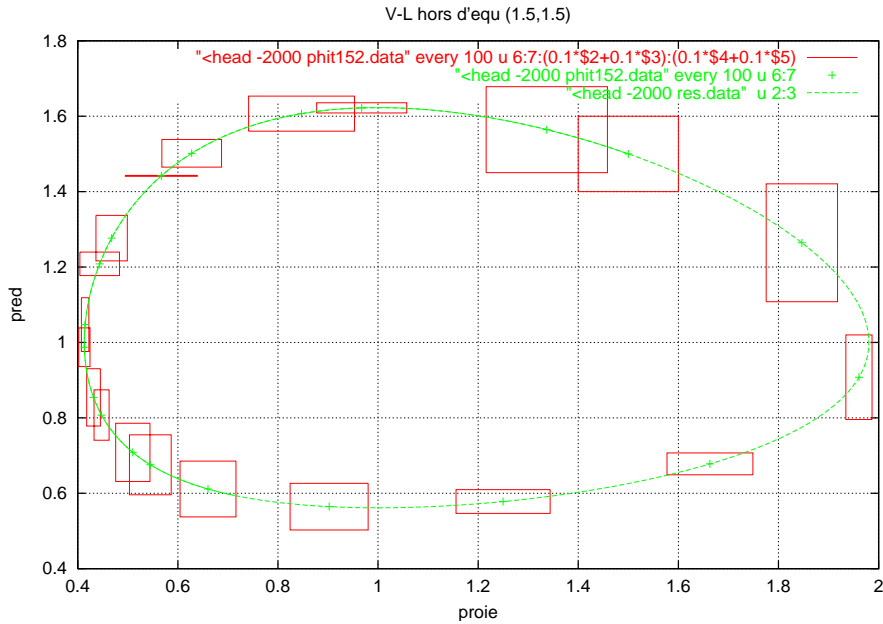


FIG. 3 – Un cycle en 20 points avec propagateur d'état boxed.

Au fil du temps, on constate que $\Phi(1,1)$ croit en oscillant (fig. 4). Comment concevoir cette divergence alors que de nouvelles C.I. donnent encore un œuf? Par le fait que ce cycle “perturbé” est parcouru avec une vitesse différente, et que le propagateur ne donne pas une distance entre deux œufs mais l'écart entre deux points courants, qui va en effet constamment augmenter. On verra une illustration de ce point en analysant les Lyapunov du système.

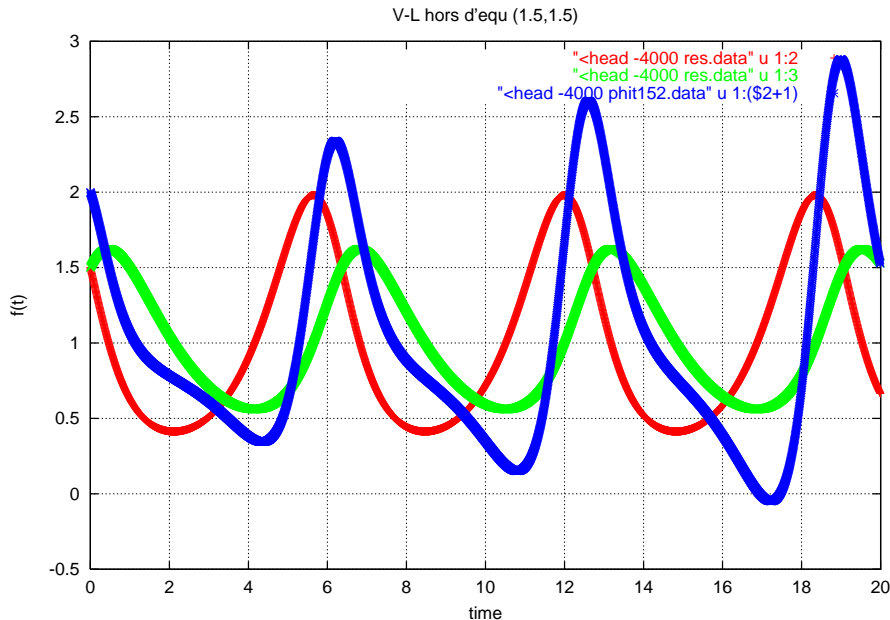


FIG. 4 – Trajectoire et propagateur.

Le gain SLT (par *Boreleig*) est intéressant : les deux pôles réels restent en $a = 1.5$ et $-c = -0.7$, seules les amplitudes oscillent (fig. 5). Il est peut-être utile de bien visualiser ce qui se passe :

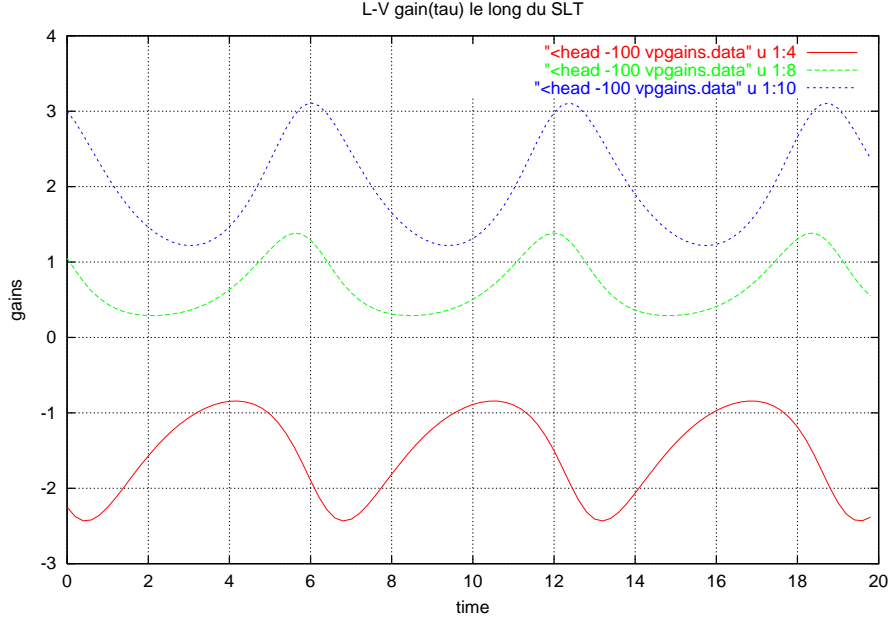


FIG. 5 – Amplitudes sur les deux pôles du gain(τ) et gain statique ($\mu = 0$ in (3)).

$$\begin{aligned}
 \text{gain}(t) &= -(+1.500000\text{E}+00*(1.-\exp(1.5*t)) + 1.500000\text{E}+00*(1.-\exp(-7.0\text{E}-01*t))) \\
 \text{gain}(t) &= -(+1.613501\text{E}+00*(1.-\exp(1.5*t)) + 8.815604\text{E}-01*(1.-\exp(-7.0\text{E}-01*t))) \\
 \text{gain}(t) &= -(+1.416833\text{E}+00*(1.-\exp(1.5*t)) + 5.467418\text{E}-01*(1.-\exp(-7.0\text{E}-01*t))) \\
 \text{gain}(t) &= -(+1.135938\text{E}+00*(1.-\exp(1.5*t)) + 4.262787\text{E}-01*(1.-\exp(-7.0\text{E}-01*t))) \\
 \text{gain}(t) &= -(+8.892381\text{E}-01*(1.-\exp(1.5*t)) + 4.233493\text{E}-01*(1.-\exp(-7.0\text{E}-01*t))) \\
 \text{gain}(t) &= -(+7.085236\text{E}-01*(1.-\exp(1.5*t)) + 5.100104\text{E}-01*(1.-\exp(-7.0\text{E}-01*t))) \\
 \text{gain}(t) &= -(+5.977758\text{E}-01*(1.-\exp(1.5*t)) + 7.005600\text{E}-01*(1.-\exp(-7.0\text{E}-01*t))) \\
 \text{gain}(t) &= -(+5.617340\text{E}-01*(1.-\exp(1.5*t)) + 1.028866\text{E}+00*(1.-\exp(-7.0\text{E}-01*t))) \\
 \text{gain}(t) &= -(+6.250628\text{E}-01*(1.-\exp(1.5*t)) + 1.497227\text{E}+00*(1.-\exp(-7.0\text{E}-01*t))) \\
 \text{gain}(t) &= -(+8.497537\text{E}-01*(1.-\exp(1.5*t)) + 1.925245\text{E}+00*(1.-\exp(-7.0\text{E}-01*t))) \\
 \text{gain}(t) &= -(+1.113561\text{E}+00*(1.-\exp(1.5*t)) + 1.954280\text{E}+00*(1.-\exp(-7.0\text{E}-01*t)))
 \end{aligned}$$

avec les fonctions du temps qui évoluent, caractérisant le SLT par le gain statique courant de la fig 6. On constate que le pôle positif l'emporte dès le démarrage et que le gain reste positif. Comment interpréter ce gain ? On perturbe le système en jetant des poignées de lapins sur les renards en continu, et on regarde comment change la rencontre sans que ce changement se répercute. En tout point de la trajectoire cette procédure mène à disparition des lapins sans compensation non-L. On doit pouvoir dire que le SLT est partout instable (?).

Gain et réponse non-L

On peut remarquer que le modèle analysé nous fait revisiter les notions de gain et réponse sur un système non dissipatif, et nous fait sortir de l'approche log-Borel traditionnelle à l'unsecte. On a choisi ce système dans ce but d'étudier une dynamique "dynamique", dont les caractéristiques sont profondément modifiées le long d'un cycle. Il est clair que l'approche d'un tel système est mieux ciblée par celle de Floquet, que nous aborderons plus loin. Oubliant donc à ce moment l'aspect périodique, on a un système général dont la réponse de la variable test φ à la fonction

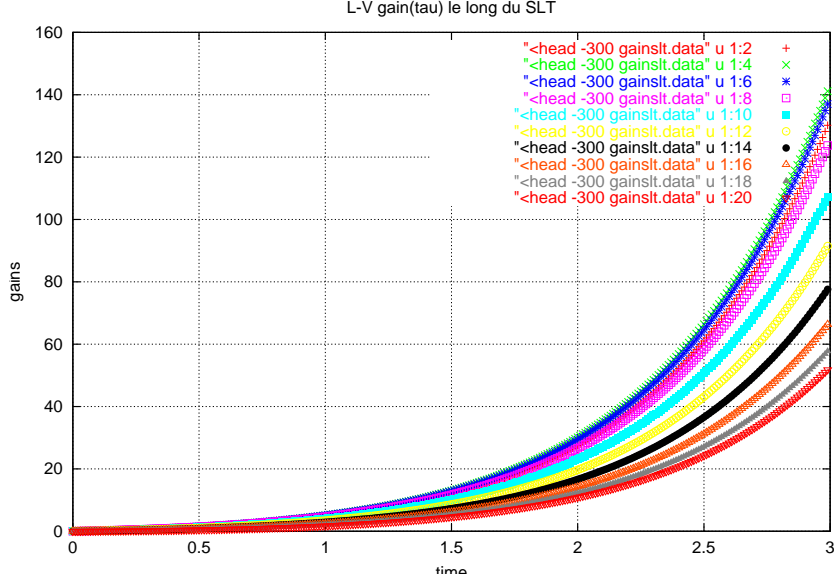


FIG. 6 – Gains SLT le long d’un cycle.

perturbatrice $u(t)$, appliquée en $t = 0$, est

$$\sigma(t, 0) = \langle c^\dagger(t) | \int_0^t \Phi(t, \tau) | b(\tau) \rangle u(\tau) d\tau \quad (6)$$

Cette fonction σ est ainsi à la fois la réponse de φ à la fonction perturbatrice $u(t)$, et la définition d’une “sensibilité canonique de rétroaction” lorsque $u = \Upsilon(t - 0^+)$. Cette sensibilité est particulière par le fait que la variable d’observation est celle qui est directement perturbée, ce qui correspond à la notion de rétroaction. La réponse des états est donnée par

$$s(t, 0) = \int_0^t \Phi(t, \tau) | b(\tau) \rangle u(\tau) d\tau \quad (7)$$

On obtient ces fonctions par intégration le long de la trajectoire fiduciaire en dérivant les équations précédentes par rapport au temps. On obtient ainsi, soit :

$$\begin{aligned} \partial_t s(t) &= A s(t) + | b \rangle \sigma(t); & s(0) &= 0; \\ \sigma(t) &= \langle c^\dagger | s(t) + u(t) \end{aligned} \quad (8)$$

soit avec un choix différent de σ :

$$\begin{aligned} \partial_t s(t) &= A s(t) + | b \rangle \sigma(t) + | b \rangle u(t); & s(0) &= 0; \\ \sigma^\Delta(t) &= \langle c^\dagger | s(t) \end{aligned} \quad (9)$$

On peut remarquer que la réponse asymptotique s’obtient en prenant $\mu = 0^1$, et que son amplitude dépend de TOUS les pôles, y compris les plus rapides.

Qu’en est-il du gain non-L dans notre L-V? Merde, on l’a pas encore à disposition. Regardons donc une réponse SLTC, fig. 7.

¹d’après le théorème central limite $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{\mu=0} \mu \tilde{f}(\mu)$, avec $u(t) = \Upsilon(t - 0^+) \sqsupseteq \frac{1}{\mu}$.

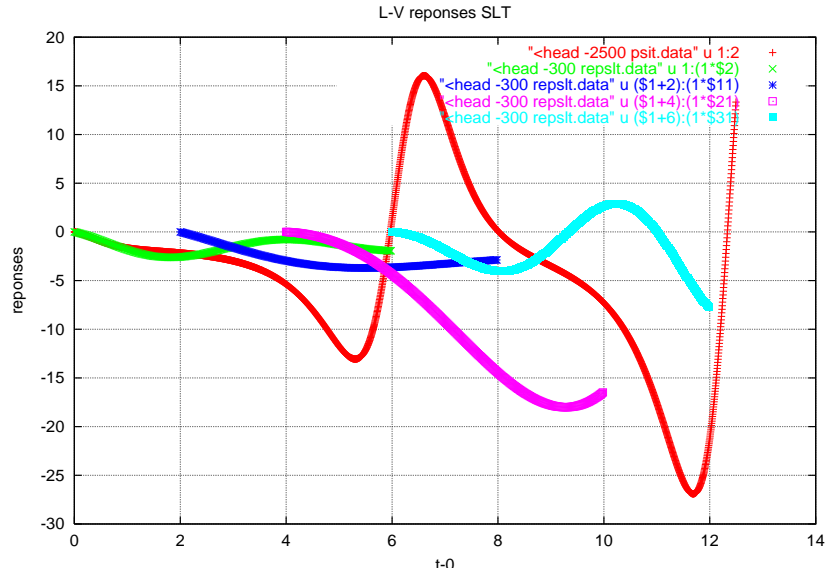


FIG. 7 – Réponse non-L avec quelques unes SLT en leur point de démarrage.

Sur cette figure, on a la réponse non-L¹, avec quelques réponses-SLT démarrant à leur point (pour elles initial) de la trajectoire. On peut s’étonner de la différence au point ($t = 6$) entre la réponse non-L provenant de zéro et la L locale, beaucoup plus calme. Il sera nécessaire d’explorer en commun le sens de ce genre de résultat que donne L-V, qui ressemble ici à une accumulation d’énergie potentielle accumulée avant $t = 6$, que ne peux déclencher la réponse 6.

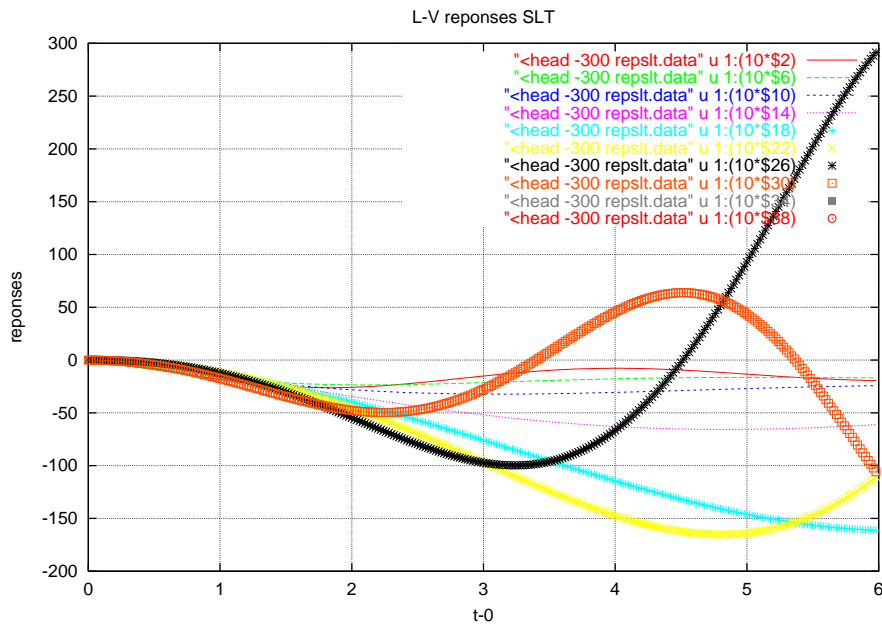


FIG. 8 – Série de réponses-SLT.

La Figure 8 montre un spectre plus large de réponses-SLT, qui montre qu’en effet le système passe par des modes d’instabilités très variés, suivant la crue et décrue du nombre de proies et prédateurs. On pourra tenter en assemblée l’interprétation de

¹de type $\frac{g}{1-g}$, que je propose d’appeler “effet en retour”.

ces caractéristiques du point de vue des éthologues. On voit la encore que la réponse L donne cet effet d'accumulation d'instabilité potentielle, nettement plus accusée qu'en non-L.

Et enfin disponible grâce à la diligence du 12 Janvier, on peut admirer une comparaison entre slt-gains et slt-eff(et-en-retour) le long de l'eff non-L sur la fig. 9. *ceci s'obtient à présent rapidement avec le patch gsrn, smod gsrn.*

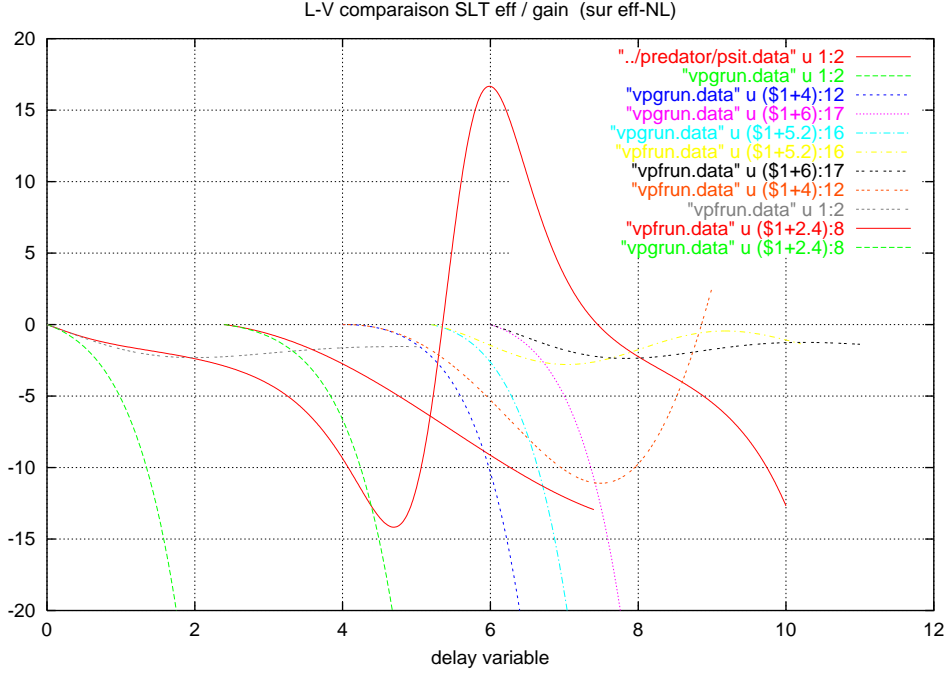


FIG. 9 – SLT-effet-en-retour($t, t + \tau$).

Il est à noter que l'eff sltc (non-L) n'est comparable qu'aux deux autres en zéro. Il apparaît alors très nettement que les deux eff collent beaucoup mieux plus longtemps que le gain, histoire de justifier le schéma d'intégration temporelle du TEF. En effet, ce schéma peut être vu en tant que propageant une perturbation $g(\eta(t), \varphi(t))$ appliquée aux états. Mais vu d'un transfert comme celui de la figure, le moteur de propagation des perturbations est le même.

**Comparaison fonctions-SLT et SLTC
vers une caractérisation de l'aspect non-L de stabilité?**

Remontrons quelques réponses-SLT le long du transfert "rencontres", fig. 10.

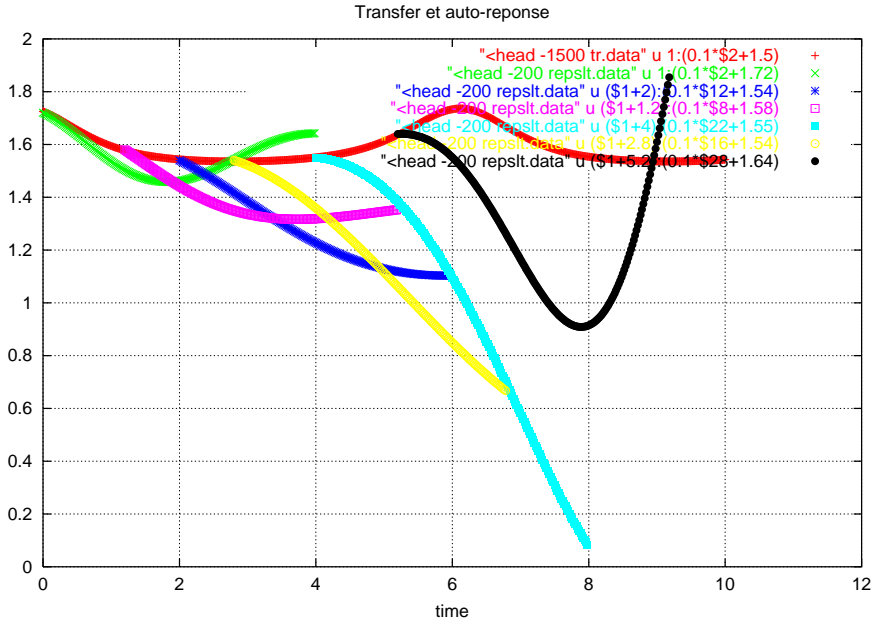


FIG. 10 – Série de réponses-SLT avec le transfert.

On montre aussi une comparaison des réponses non-L (SLTC) avec les réponses Borel (linéarisées ou SLT) en quelques points choisis du cycle (fig. 11). On a ainsi

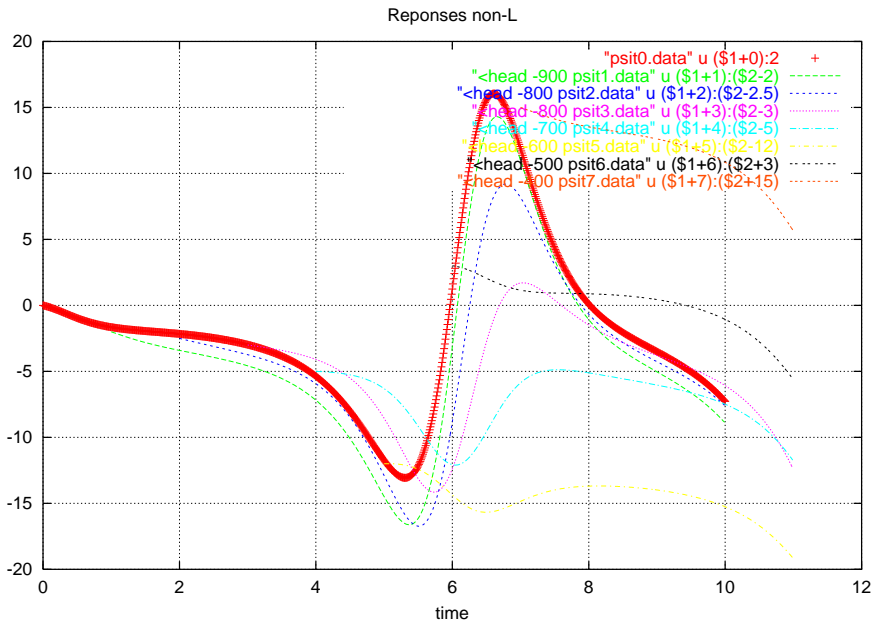


FIG. 11 – Série de réponses non-L (SLTC) en fonction du démarrage de la perturbation.

la variation de la réponse non-L en fonction du point initial du cycle, et par ailleurs

la variation de la réponse L. Peut-on dire au vu de ces figures que l'on illustre clairement les points où s'expriment la non linéarité, certainement, mais étais-ce bien utile? La non-L (concentrée ici dans le seul transfert) serait-elle plus finement signalée par une différence entre les deux types de réponse? On doit avoir le droit

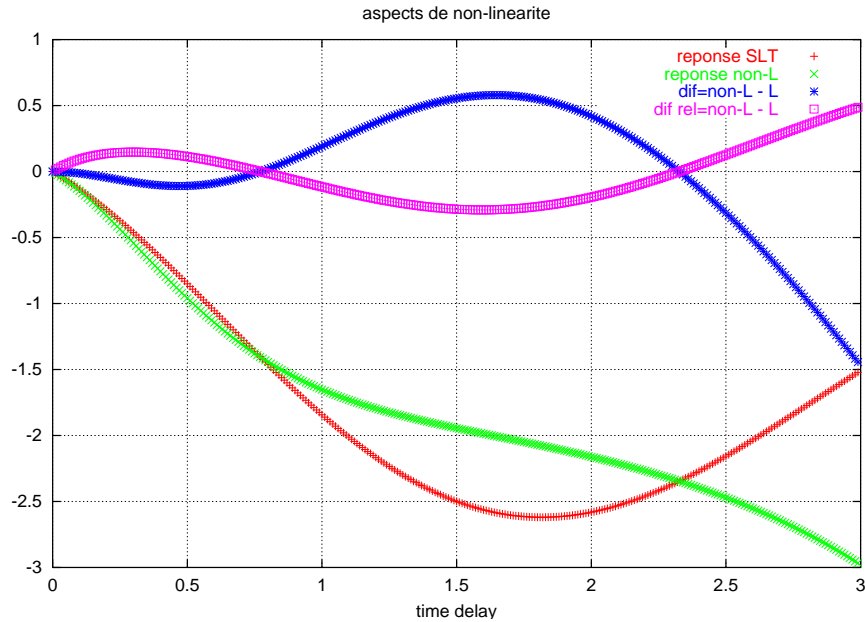


FIG. 12 – Différence entre réponse L et non-L.

de dire que l'écart relatif fournit un critère adéquat de non-linéarité de la réponse, comme dans la fig. 12 au point initial (1.5, 1.5). Alors, à 20% près, on en déduirait que les pôles décrivent correctement au premier ordre le système perturbé sur une petite moitié du cycle (la période est de l'ordre de 6.4)?

*N'est-ce pas, en dépit de son apparente insignifiance, une contribution majeure à la compréhension des systèmes non-L?*¹

¹mais qui peut me dire pourquoi j'ai l'impression de ramer dans la semoule?

Exposants de Lyapunov et réponse-eff non-L

Juste pour l'instant pour satisfaire les curieux, les deux Lyapunov à l'horizon asymptotique, fig 13, laissent deviner que le positif converge à zéro.

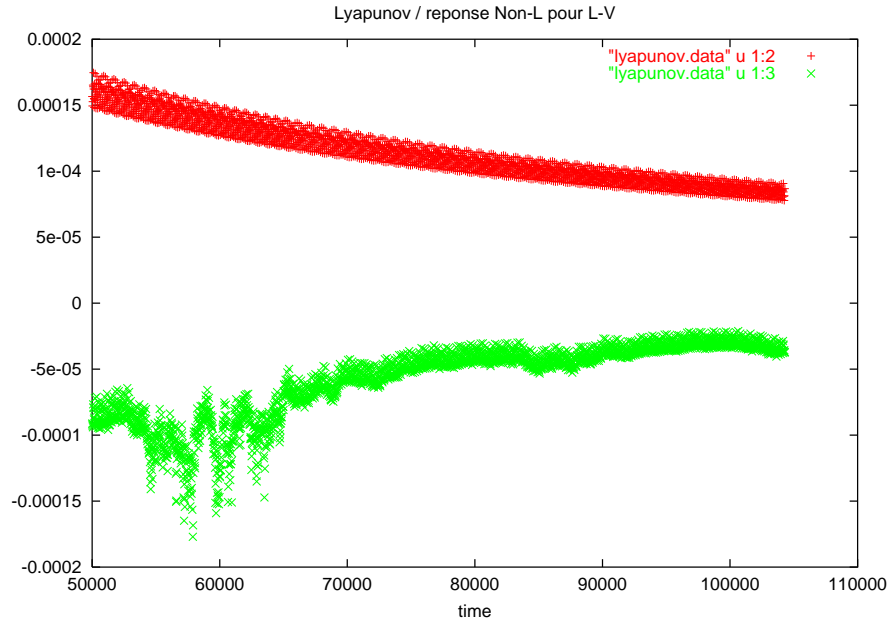


FIG. 13 – Les deux Lyapunov du système par SVD et $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log(w)$.

A voir la fig. 14, il semble bien que la croissance asymptotique devienne linéaire.

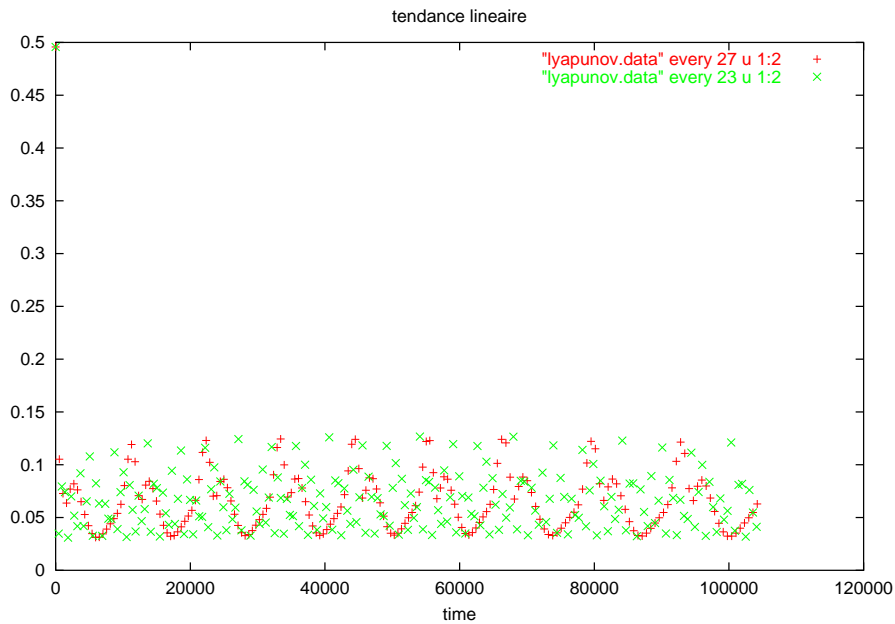


FIG. 14 – Le Lyapunov positif algébrique du système par $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{w}{t}$.

Cette tendance linéaire semble être en effet celle de l'enveloppe de la réponse non-L, fig.15. On a tracé des parties partielles (*every*) qui mettent en évidence des

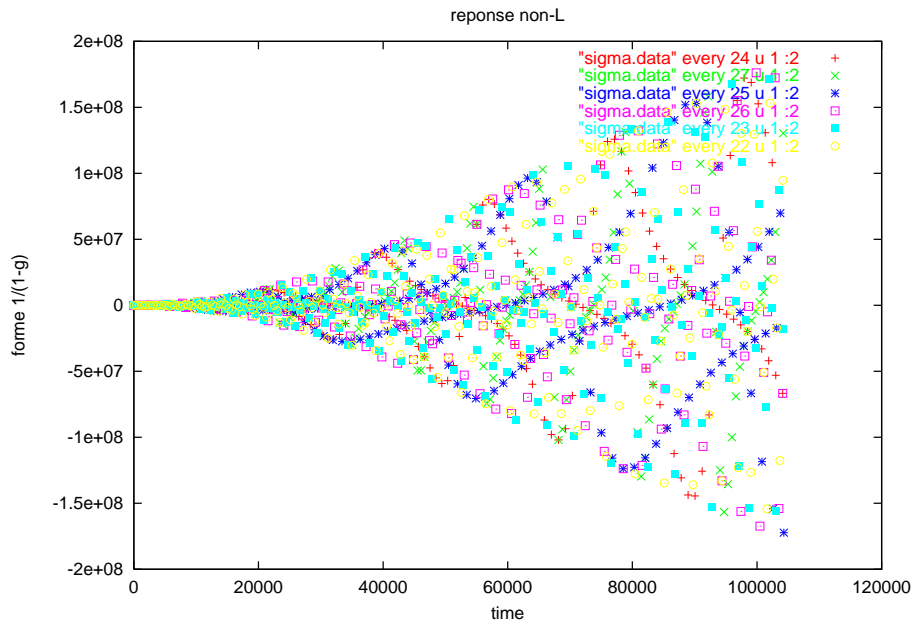


FIG. 15 – Réponse non-L de type $\frac{1}{1-g}$ chromatographiée.

sortes de trajectoires surfant sur des secteurs du cycle.