

---

## Modèle radiatif d'effet de serre

---

**Résumé :** *Ce rapport rend compte de l'élaboration d'un modèle numérique simplifié d'effet de serre. Le modèle radiatif est basé sur l'équation du transfert radiatif, résolue pour une colonne verticale atmosphérique dont on impose les profils de température et de concentrations en gaz à effet de serre (GES). Le modèle tient compte uniquement des deux principaux GES, à savoir l'eau et le CO<sub>2</sub>. En outre, le modèle cherche à exhiber la pertinence du concept d'altitude d'émission, et en particulier sa variation avec la concentration en CO<sub>2</sub> de l'atmosphère. Enfin, on se concentrera sur l'effet de la vapeur d'eau, en cherchant à quantifier le processus de rétroaction lié à la vapeur d'eau.*

**Mots clefs :** *climat, effet de serre, transfert radiatif, température d'émission*

Stage encadré par :

**Jean-Louis DUFRESNE**

[jean-louis.dufresne@lmd.ipsl.fr](mailto:jean-louis.dufresne@lmd.ipsl.fr) / tél. (33)1.44.27.50.14

Laboratoire de Météorologie Dynamique (LMD)

Université Pierre et Marie Curie 4, place Jussieu F-75252 Paris Cedex 5

<https://www.lmd.jussieu.fr/>



# Remerciements

Je tiens à remercier ici **Monsieur Jean-Louis Dufresne** pour m'avoir donné l'opportunité de réaliser ce stage à un moment où les laboratoires étaient peu réactifs compte tenu de la situation sanitaire. Nos entrevues hebdomadaires ont été certes courtes mais à chaque fois enrichissantes.

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Généralités sur le transfert radiatif et l'effet de serre</b>	<b>2</b>
1.1	Les principales grandeurs radiométriques . . . . .	2
1.2	Rayonnement du corps noir et loi de Kirchhoff . . . . .	2
1.3	L'équation du transfert radiatif . . . . .	4
1.4	Effet de serre et température d'émission . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Atmosphère uniquement composée de CO<sub>2</sub></b>	<b>7</b>
2.1	Description générale et hypothèses du modèle . . . . .	8
2.2	Calcul du flux et de la température d'émission . . . . .	8
2.3	Influence de la concentration en CO <sub>2</sub> de l'atmosphère . . . . .	13
2.4	Méthode "k-distribution" . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Action de la vapeur d'eau</b>	<b>17</b>
3.1	Différences avec l'atmosphère uniquement composée de CO <sub>2</sub> . . . . .	17
3.2	Calcul du flux . . . . .	18
3.3	Rétroaction due à la vapeur d'eau . . . . .	19
<b>4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>21</b>
<b>A</b>	<b>Annexe A</b>	
<b>B</b>	<b>Annexe B</b>	<b>i</b>
<b>C</b>	<b>Annexe C</b>	<b>ii</b>
<b>D</b>	<b>Annexe D</b>	<b>iii</b>
<b>E</b>	<b>Annexe E</b>	<b>iv</b>

## Introduction

Le présent travail a été réalisé lors d'un stage encadré par le Laboratoire de Météorologie Dynamique (LMD) à Paris. Il s'est presque entièrement déroulé en télétravail, et supervisé par l'intermédiaire de rendez-vous visioconférences réguliers (au moins une fois par semaine) avec Monsieur **Jean-Louis DUFRESNE**. L'objectif initial, très général, visait à développer un modèle numérique d'effet de serre.

L'effet de serre est le processus physique par lequel l'équilibre radiatif d'une planète est modifié par la présence de gaz particuliers au sein de son atmosphère (appelés gaz à effet de serre [GES] ) qui absorbent une partie du rayonnement émis par la surface. L'effet de serre contribue à réchauffer la terre, sans lui la température à sa surface serait beaucoup moindre (aux alentours de  $-18^{\circ}\text{C}$ ). La découverte de l'effet de serre est ancienne. En 1827, dans son *Mémoire sur les températures du globe et des espaces planétaires* [1], le physicien Joseph Fourier écrivait déjà "*c'est ainsi que la température [terrestre] est augmentée par l'interposition de l'atmosphère, parce que la chaleur trouve moins d'obstacle pour pénétrer l'air, étant à l'état de lumière [le flux solaire] qu'elle n'en trouve pour repasser dans l'air lorsqu'elle est convertie en chaleur obscure [le flux infra-rouge terrestre]*".

Près de 70 ans plus tard, le chimiste Suédois Arrhenius quantifie l'influence de la quantité de  $\text{CO}_2$  dans l'atmosphère sur la température terrestre. Il y voit même quelque chose de souhaitable : "*nous pouvons espérer jouir d'âges aux climats plus équitables et meilleurs, surtout en ce qui concerne les régions froides de la terre, des âges où la terre produira des récoltes beaucoup plus abondantes qu'à présent, au profit d'une population humaine qui se propage rapidement*".<sup>1</sup> Aujourd'hui le ton est plus pessimiste. Tenter de limiter le réchauffement climatique que subit actuellement notre planète est un des enjeux sociétaux majeurs du XXIème siècle. La contribution anthropique au réchauffement global de la Terre est très largement établie. Le GIEC (Groupe d'experts intergouvernemental sur l'évolution du climat) estimait dans son cinquième rapport qu'il "**est extrêmement probable que les émissions anthropiques de GES aient été la cause principale du réchauffement observé depuis le milieu du XXe siècle**"[2]. Ces préoccupations ont fait naître la nécessité de mieux comprendre les processus climatologiques qui sont à l'oeuvre sur terre et notamment celui de l'effet de serre.

L'objectif initial du stage, très général, visait à développer un modèle radiatif d'effet de serre en *Python*. Ce modèle se devait de rendre compte des mécanismes physiques à l'oeuvre dans l'atmosphère terrestre tout en restant simple. Le but n'est pas de chercher à atteindre la précision des meilleurs modèles de climat, mais plutôt de développer un modèle peu coûteux en calcul qui permet une meilleure compréhension de l'effet de serre, notamment en se concentrant sur le concept d'altitude d'émission et de son évolution avec les différentes variables du modèle. Enfin, Monsieur DUFRESNE n'a pas exclu la possibilité d'utiliser ce modèle à des visées éducatives puisqu'il donne régulièrement des cours sur ce sujet (dans le secondaire et l'enseignement supérieur). Le rapport est divisé en quatre parties. Dans un premier temps, on présentera les concepts théoriques nécessaires à la compréhension du sujet. Dans un deuxième temps, on retracera la construction du modèle pour une atmosphère uniquement composée de  $\text{CO}_2$ . Ensuite, on ajoutera au modèle précédent la présence d'eau afin de quantifier la rétroaction climatique liée à la vapeur d'eau. Enfin, une courte conclusion résumera les principaux résultats du modèle et les perspectives qui pourraient être explorées lors d'un travail futur.

---

1. Traduit de l'anglais de *Worlds in the Making*, Arrhenius : "*we may hope to enjoy ages with more equable and better climates, especially as regards the colder regions of the earth, ages when the earth will bring forth much more abundant crops than at present, for the benefit of rapidly propagating mankind.*"

# 1 Généralités sur le transfert radiatif et l'effet de serre

Le transfert radiatif est le domaine de la physique qui se concentre sur l'étude des interactions entre la matière et le rayonnement électromagnétique. C'est un champ vaste, dont une infime partie uniquement est nécessaire pour comprendre le modèle développé. Cette introduction se veut donc courte et épurée : l'objectif est d'arriver à l'établissement de l'équation du transfert radiatif, qui est au coeur du modèle, et de son application au bilan radiatif terrestre.

## 1.1 Les principales grandeurs radiométriques

Les grandeurs permettant de caractériser le rayonnement émis par une source sont appelées **grandeurs radiométriques**. Même s'il en existe un grand nombre, on restera ici le plus concis possible notamment car les différences entre certaines grandeurs ne sont pas d'une grande importance pour la suite.

### Luminance énergétique

On appelle *luminance énergétique* la puissance émise par une source par unité d'angle solide et par unité de surface normale à la direction d'émission. On se place en coordonnées sphériques où  $\theta$  et  $\varphi$  sont respectivement (comme conventionnellement) la colatitude et la longitude (voir figure-1). La luminance énergétique est notée  $L(\theta, \varphi)$ . Elle s'exprime en unité SI en  $W/m^2/sr$ . Une source dont la luminance énergétique est indépendante de la direction est dite *lambertienne*. Enfin, si l'on veut avoir de l'information sur l'évolution de la source avec le spectre, on utilisera la *luminance énergétique spectrale*  $L_\nu(\theta, \varphi)$  définie comme la luminance énergétique du spectre par unité de nombre d'onde i.e  $L(\theta, \varphi) = \int L_\nu(\theta, \varphi) d\nu$ . Dans tout ce rapport on notera  $\nu$  le nombre d'onde (inverse de la longueur d'onde), et il sera exprimé en  $cm^{-1}$  et donc  $L_\nu(\theta, \varphi)$  s'exprime en  $W/m^2/sr/cm^{-1}$ .

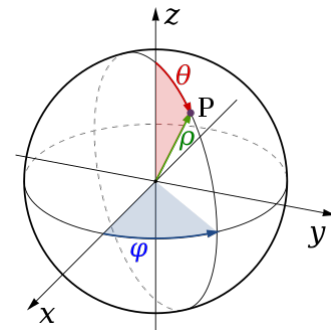


FIGURE 1 – Représentation des coordonnées sphériques (Tiré [https://fr.wikipedia.org/wiki/Coordonnées\\_sphériques](https://fr.wikipedia.org/wiki/Coordonnées_sphériques))

### Émittance énergétique

On appelle *émittance énergétique* et on note  $F_\Omega$  la puissance émise dans un angle solide  $\Omega$  par unité de surface réelle de la source. Elle s'exprime en  $W.m^{-2}$  et est liée à la luminance énergétique par  $F_\Omega = \int_\Omega L(\theta, \varphi) \cos(\theta) d\Omega$  où  $d\Omega = \sin(\theta) d\theta d\varphi$  est l'angle solide. Dans la suite, on s'intéressera toujours à l'émittance énergétique à travers l'hémisphère entier qu'on notera  $F$ . Dans le cas d'une source lambertienne, cette grandeur vaut  $F = \pi L$ . Similairement à la luminance spectrale, on peut définir l'*émittance spectrale* comme l'émittance par unité de nombre d'onde. Ainsi l'émittance hémisphérique spectrale (en  $W/m^2/cm^{-1}$ ) s'écrit  $F_\nu = \pi L_\nu$ .

**En général, il est plus commode de se référer aux unités des grandeurs. On comprendra qu'une grandeur est directionnelle par la présence d'un /sr et/ou qu'elle est spectrale par un /cm<sup>-1</sup>. À partir de la partie 2, on désignera indifféremment plusieurs grandeurs par "flux" et les unités des grandeurs seront suffisantes.**

## 1.2 Rayonnement du corps noir et loi de Kirchhoff

Tout corps à température non nulle émet un rayonnement qui est dû à l'agitation thermique des particules qui le composent. Le rayonnement thermique émis par un corps peut être comparé à celui d'un système physique idéal de même température qu'on appelle corps noir.

### Corps noir et loi de Planck

Le corps noir est un système physique idéalisé qui à tout nombre d'onde absorbe la totalité du rayonnement qu'il reçoit. Le rayonnement thermique émis par un corps noir ne dépend que de la température  $T$  et du nombre d'onde  $\nu$ , en particulier il est indépendant de la forme et de la nature du corps. Enfin, un corps noir est une source lambertienne, son rayonnement est isotrope. La luminance spectrale  $\mathcal{B}_\nu$  et l'émittance spectrale à travers un hémisphère du corps noir  $B_\nu$  sont données par la loi de Planck :

$$\mathcal{B}_\nu(T) = 2h\nu^3 c^2 \frac{1}{e^{\frac{ch\nu}{k_B T}} - 1} \quad (W/m^2/sr/cm^{-1}) \quad (1)$$

$$B_\nu(T) = \pi \mathcal{B}_\nu(T) \quad (W/m^2/cm^{-1}) \quad (2)$$

avec  $\begin{cases} h = 6,62607015 \times 10^{-34} \text{ m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-1} & \text{(constante de Planck)} \\ c = 299792458 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} & \text{(vitesse de la lumière dans le vide)} \\ k_B = 1,380649 \times 10^{-23} \text{ m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1} & \text{(constante de Boltzmann)} \end{cases}$

On verra par la suite que la terre est un bon corps noir c'est-à-dire que le rayonnement thermique tellurique est très bien approximé par la fonction de planck. On a représenté en figure-2 l'émittance spectrale du corps noir pour des températures que l'on peut retrouver à la surface de la terre ou dans son atmosphère. La terre émet essentiellement dans l'infra-rouge, pour des nombres d'onde allant de 100 à 2000  $cm^{-1}$  (ce qui correspond à des longueurs d'onde allant de  $5\mu m$  à  $100\mu m$ ).

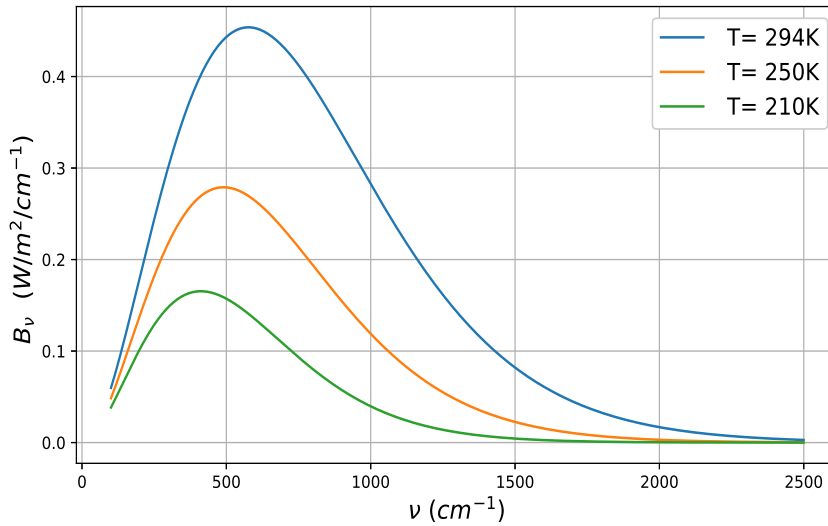


FIGURE 2 – Émittance spectrale du corps noir  $B_\nu$  pour différentes températures  $T$  que l'on peut retrouver à la surface de la terre ou dans son atmosphère. La terre émet essentiellement entre 100 et 2000  $cm^{-1}$  c'est-à-dire dans le domaine infra-rouge (IR).

### Loi de Kirchhoff

On appelle *absorptivité spectrale* d'un récepteur et on note  $\alpha_\nu$  la fraction du rayonnement incident de nombre d'onde  $\nu$  qui est absorbé par ce corps. Par définition, pour un corps noir on a  $\forall \nu, \alpha_\nu = 1$ .

On appelle *émissivité d'un corps*, le rapport de sa luminance spectrale à celle d'un corps noir à la même température :  $\varepsilon_\nu(\theta, \varphi) = \frac{L_\nu(\theta, \varphi)}{B_\nu(T)}$ . Puisque l'on traitera dans ce rapport uniquement le cas de sources lambertiennes, l'émissivité spectrale (et l'absorptivité) sera toujours indépendante de la direction et on peut définir l'émissivité spectrale comme le rapport des émittances plutôt que des luminances :

$$\varepsilon_\nu = \frac{F_\nu}{B_\nu(T)}$$

La loi de Kirchoff [3] établit que, pour un système quelconque à l'équilibre thermodynamique, l'émissivité spectrale et l'absorptivité spectrale sont égales :

$$\forall \nu, \varepsilon_\nu = \alpha_\nu$$

Physiquement, cette loi stipule que les systèmes qui absorbent beaucoup sont ceux qui émettent beaucoup : **"les bons récepteurs sont les bons émetteurs"**.

### 1.3 L'équation du transfert radiatif

Le but de cette section est d'établir l'équation du transfert radiatif. On a déjà vu deux phénomènes d'interaction rayonnement-matière : l'absorption et l'émission. Dans la partie théorique développée ici, on tient uniquement compte de ces deux phénomènes. En particulier on néglige la diffusion. Ces hypothèses seront justifiées dans la partie-2.1.

#### Équation radiative sans terme source

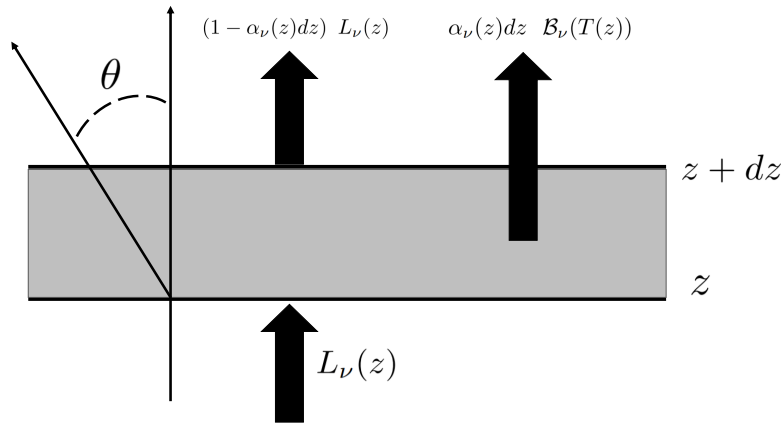


FIGURE 3 – Bilan radiatif avec terme source d'une couche d'absorptivité  $\alpha_\nu(z) dz$  pour un rayon vertical ( $\theta = 0$ ). La mésocouche : 1) transmet une partie du faisceau incident - 2) émet son propre rayonnement thermique.

Pour établir l'équation du transfert radiatif, on imagine qu'un rayonnement ascendant de luminance  $L_\nu$  traverse une substance absorbante d'absorptivité spectrale linéique  $\alpha_\nu$  ( $SI : m^{-1}$ ). De manière générale, le rayonnement est caractérisé par l'angle  $\theta$  qu'il fait avec l'axe vertical  $z$  mais dans un premier temps on considérera le cas  $\theta = 0$ . On cherche à faire le bilan radiatif d'une mésocouche d'épaisseur  $dz$  représentée figure-3. Par définition de  $\alpha_\nu$ , une partie  $\alpha_\nu(z)L_\nu(z)dz$  du rayonnement est absorbée :

$$L_\nu(z + dz) = L_\nu(z) - \alpha_\nu(z)L_\nu(z)dz$$

soit en intégrant entre l'altitude  $z_0$  et  $z$  :

$$L_\nu(z) = L_\nu(z_0)e^{-\int_{z_0}^z \alpha_\nu(u)du}$$

La loi exponentielle ci-dessus est connue sous le nom de **loi de Beer-Lambert**. La décroissance exponentielle est caractérisée par la grandeur :

$$\tau_\nu(z_0, z) = \int_{z_0}^z \alpha_\nu(u)du$$

qu'on appelle **épaisseur optique**. Enfin, on appelle **transmission spectrale** la grandeur :

$$\mathcal{T}_\nu(z_0, z) = e^{-\tau_\nu(z_0, z)} = \frac{L_\nu(z)}{L_\nu(z_0)}$$

et **absorption spectrale** la grandeur  $\mathcal{A}_\nu = 1 - \mathcal{T}_\nu$ .

### Équation radiative avec terme source

Maintenant, on réalise le même bilan en rajoutant le terme correspondant au rayonnement émis par la mésocouche. Par définition, sa luminance s'écrit  $\varepsilon_\nu \mathcal{B}_\nu(T)$  et, en utilisant la loi de kirchhoff (voir section-1.2), le bilan se réécrit :

$$L_\nu(z + dz) = L_\nu(z) - \alpha_\nu(z)L_\nu(z)dz + \alpha_\nu(z)\mathcal{B}_\nu(z)dz$$

Enfin, si on ne considère plus un rayon parfaitement vertical mais un faisceau faisant un angle  $\theta$  avec la verticale, la situation reste inchangée outre le fait que le rayonnement ne traverse plus une épaisseur  $dz$  mais une épaisseur  $\frac{dz}{\cos(\theta)}$ . On peut résumer toutes ces informations par :

$$\frac{d}{dz}L_\nu(z, \theta) = -\frac{\alpha_\nu(z)}{\cos(\theta)} [L_\nu(z, \theta) - \mathcal{B}_\nu(T(z))]$$

Sous l'hypothèse que le terme source  $\mathcal{B}_\nu$  permet au rayonnement de rester isotrope, on peut intégrer cette équation sur l'hémisphère supérieur [4] afin d'obtenir une relation pour l'émittance spectrale ascendante  $F_\nu^\uparrow$  ( $W/m^2/cm^{-1}$ ) :

$$\frac{d}{dz}F_\nu^\uparrow(z) = -\alpha_\nu(z) [F_\nu^\uparrow - B_\nu(T(z))]$$

dont la solution est :

$$F_\nu^\uparrow(z) = F_\nu^\uparrow(z_0)e^{-\tau_\nu(z_0, z)} + \int_{z_0}^z B_\nu(T(u))e^{-\tau_\nu(u, z)} du \quad (3)$$

$$= F_\nu^\uparrow(z_0)\mathcal{T}_\nu(z_0, z) + \int_{z_0}^z B_\nu(T(u))\mathcal{T}_\nu(u, z)du \quad (4)$$

## 1.4 Effet de serre et température d'émission

### Définition de l'effet de serre

Appliquons ces résultats théoriques au cas de la terre. On suppose que la terre est un corps noir à la température  $T_s$  qui est surplomblé d'une atmosphère de hauteur  $z_t$  caractérisée par son coefficient de transmission  $\mathcal{T}_\nu(\infty) = \mathcal{T}_\nu(0, z_t)$ . De plus on appelle  $F_\nu^\uparrow = F_\nu^\uparrow(z_t)$  le flux émis par la terre vers l'espace au niveau du sommet de l'atmosphère. L'équation-4 nous dit que ce flux résulte de la somme de deux termes :

$$F_\nu^\uparrow = \underbrace{\mathcal{T}_\nu(\infty)B_\nu(T_s)}_{F_\nu^s} + \underbrace{\int_0^{z_t} B_\nu(T(u))\mathcal{T}_\nu(u, z_t) du}_{F_\nu^a} \quad (W/m^2/cm^{-1}) \quad (5)$$

où le flux  $F_{\nu}^s$  est directement émis par la surface de la terre alors que  $F_{\nu}^a$  est la contribution apportée par l'atmosphère. On définit **l'effet de serre** comme étant le flux émis par la terre à sa surface moins le flux que l'on retrouve émis vers l'espace au sommet de l'atmosphère :

$$G_{\nu} = B_{\nu}(T_s) - F_{\nu}^{\uparrow} \tag{6}$$

### Paradoxe de l'absorption du CO2

C'est un fait connu de tous qu'une augmentation de la concentration en  $CO_2$  dans l'atmosphère résulte en une augmentation de l'effet de serre. Cependant, ce résultat est plus subtil qu'on ne le croit. Supposons que, comme le laisse entendre le terme d' "effet de serre", l'atmosphère soit une paroi d'épaisseur négligeable englobant la surface de la terre. Si l'effet de serre croît, c'est qu'une augmentation de la concentration en  $CO_2$  doit augmenter le pouvoir absorbant de cette paroi. Or comme le montre la figure-4, l'absorption de l'atmosphère ne varie presque pas avec sa concentration en  $CO_2$ . C'est ce qu'on appelle l'effet de **saturation de l'absorption du  $CO_2$** . Le modèle d'atmosphère à une couche ne permet pas de comprendre l'effet de la concentration en  $CO_2$  sur l'effet de serre.

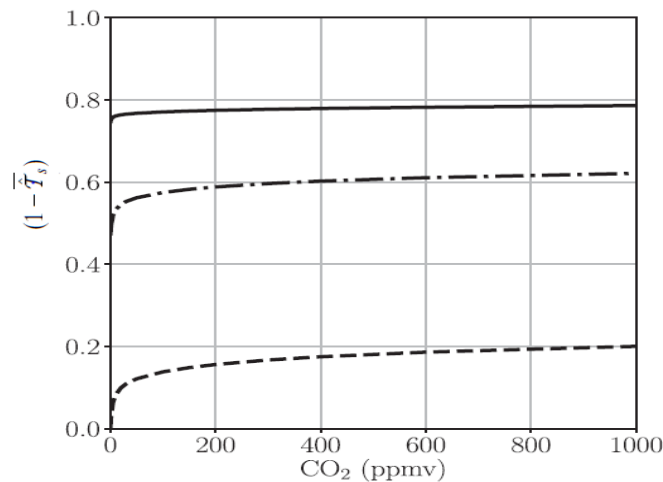


FIGURE 4 – Évolution du coefficient d'absorption en fonction de la concentration en  $CO_2$  en partie par million en volume. **De haut en bas** : 1) atmosphère standard - 2) atmosphère où la concentration en eau est divisée par 10 - 3) atmosphère sans eau. L'effet de saturation est renforcé par la présence d'eau. (Tiré de [5])

### Altitude d'émission

Pour comprendre l'effet de serre, il est nécessaire de considérer l'étendue verticale de l'atmosphère et d'introduire le concept **d'altitude d'émission**. Le mécanisme à l'oeuvre est décrit en détail sur la figure-5. Lorsqu'on augmente la concentration de  $CO_2$ , la transmission totale de l'atmosphère ne varie pas, mais le flux émis par l'atmosphère est rayonné à une altitude moyenne plus élevée. En effet, si l'atmosphère est optiquement transparente, il est possible que des photons émis depuis les couches basses de l'atmosphère la traversent entièrement sans être absorbés. A contrario, si l'atmosphère est optiquement épaisse, ce scénario est très peu probable, ces photons seront presque tous absorbés par les couches supérieures de l'atmosphère. Dans ce cas, la majorité des photons que l'on retrouvera au sommet de l'atmosphère auront été émis dans les couches hautes de l'atmosphère. Donc plus il y a de  $CO_2$  plus l'altitude moyenne à laquelle les photons auront été émis, appelée **altitude d'émission**, sera grande. Une altitude d'émission plus élevée correspond à une **température d'émission** plus froide. La



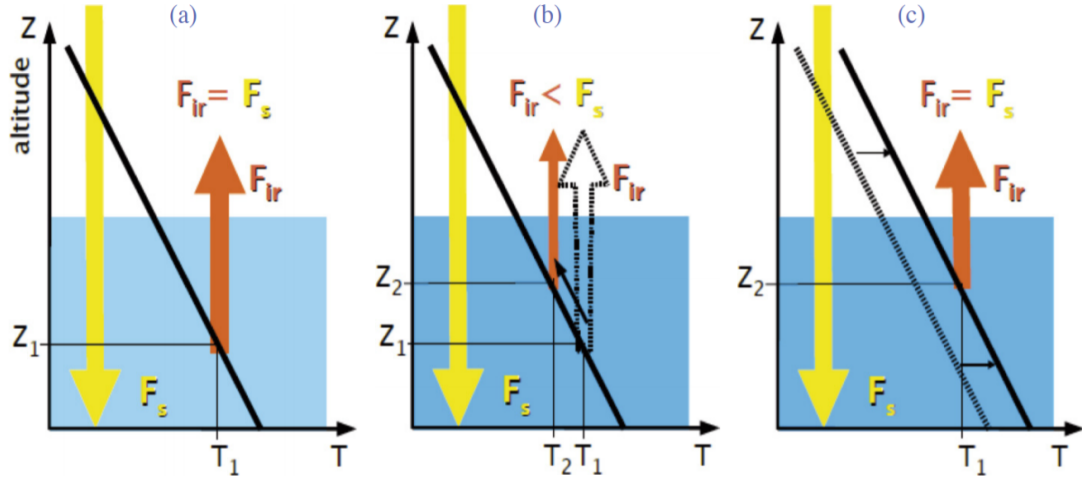


FIGURE 5 – Illustration de l’effet d’une augmentation de la concentration en  $CO_2$  sur la température de la terre. a) Équilibre initial : le flux reçu par la terre  $F_s$  vaut le flux émis  $F_{ir}$ . b) Perturbation de l’équilibre : une augmentation de la concentration en  $CO_2$  résulte en une altitude d’émission plus élevée donc en une température d’émission plus faible.  $F_{ir}$  diminue et devient plus faible que  $F_s$ . L’écart entre les deux flux est appelé **forçage radiatif**. c) Équilibre final : le gradient de température s’ajuste afin que le système retrouve à l’équilibre. La température du nouvel état d’équilibre est supérieure à celle de la situation initiale.

fonction de Planck étant décroissante avec la température, le rayonnement émis par l’atmosphère est plus faible. Pour retourner à l’état d’équilibre thermodynamique, la terre doit chauffer son atmosphère.

Pour mettre en évidence le concept de température d’émission, on peut réécrire le terme  $F_\nu^a$  provenant de l’atmosphère. Si l’atmosphère était un corps homogène à une température unique  $T$ , en vertu de la loi de kirchhoff (voir section 1.2) le flux qu’il émettrait vers l’espace vaudrait  $F_\nu^a = \varepsilon_\nu B_\nu(T) = (1 - \mathcal{T}_\nu(\infty)) B_\nu(T)$ . On cherche donc à réécrire l’équation-5 de la manière suivante :

$$F_\nu^\uparrow = \underbrace{\mathcal{T}_\nu(\infty) B_\nu(T_s)}_{F_\nu^s} + \underbrace{(1 - \mathcal{T}_\nu(\infty)) B_\nu(T_{e,\nu})}_{F_\nu^a} \quad (W/m^2/cm^{-1}) \quad (7)$$

Par définition, la température d’émission est la température  $T_{e,\nu}$  qui vérifie l’égalité-7. À température de surface  $T_s$  fixée, le flux en sortie de l’atmosphère dépend uniquement de 2 paramètres :  $\mathcal{T}_\nu(\infty)$  la transmission totale de l’atmosphère et  $T_{e,\nu}$  la température d’émission. D’ailleurs en combinant les équations-6 et 7 on peut observer l’effet de chacun de ces termes sur l’effet de serre :

$$G_\nu = (1 - \mathcal{T}_\nu(\infty)) [B_\nu(T_s) - B_\nu(T_e)] \quad (8)$$

## 2 Atmosphère uniquement composée de $CO_2$

Dans cette partie, on exposera l’élaboration du modèle pour une atmosphère dont le seul gaz à effet de serre (GES) est le  $CO_2$ . L’objectif est de développer un modèle numérique simple capable de calculer le flux ascendant émis par la terre en sortie de l’atmosphère. Dans un premier temps, on présentera les hypothèses de travail. Puis, après avoir montré les résultats obtenus pour le calcul flux au sommet de l’atmosphère et de la température d’émission, on se concentrera sur la variation de ces grandeurs avec la concentration en  $CO_2$ . Enfin, on verra dans une dernière partie une méthode permettant de simplifier grandement les calculs numériques.

## 2.1 Description générale et hypothèses du modèle

Le modèle présenté ici consiste en la résolution de l'équation de transfert radiatif 5 pour une colonne d'atmosphère verticale. Pour établir l'équation de transfert radiatif (voir section-1.3), on a fait deux hypothèses que l'on réutilise ici : 1) hypothèse *plan parallèle* : on néglige la rotondité de la terre et toutes les grandeurs sont fonction d'une seule coordonnée d'espace, l'altitude  $z$ .- 2) on néglige la diffusion. Si dans le domaine UV-visible du rayonnement solaire, la diffusion est importante, elle l'est beaucoup pour le rayonnement infra-rouge tellurique [3].

On fait aussi l'hypothèse d'une atmosphère au repos mécanique, l'invariant de la statique des fluides  $dP = -\rho g dz$  ( avec  $P$  la pression,  $\rho$  la masse volumique de l'air,  $g$  la pesanteur) est vérifié. **Dans une telle atmosphère, il y a une correspondance univoque entre l'altitude et la pression. On verra par la suite qu'il sera plus judicieux d'utiliser  $P$  comme coordonnée verticale.**

De plus, on considère la terre comme un corps noir c'est-à-dire que l'on prend son émissivité  $\varepsilon = 1$ . En réalité, l'émissivité moyenne des continents est de 0.95 et celle des océans de 0.94. L'atmosphère est divisé en 65 paliers d'altitude dont la température et la pression sont connus. Sa hauteur totale est de  $z_t = 100 \text{ km}$ . La température de surface de la terre  $T_s$  est fixée à  $294K$ , les gradients de pression et de température utilisés sont représentés figure-6. La concentration en  $CO_2$  est fixée à 435 partie par million en masse (ppm) [1ppm = 1 $\mu$ g/1g] sur toute la hauteur de l'atmosphère [6]. Le  $CO_2$  est considéré comme étant la seule substance absorbante.

Enfin, il faut souligner que le modèle n'est qu'un modèle radiatif et n'intègre pas de composante thermodynamique. La température de la surface, la température et la pression de l'atmosphère sont des variables exogènes : il n'y a pas de rétroaction du flux émis sur la valeur de ces grandeurs.

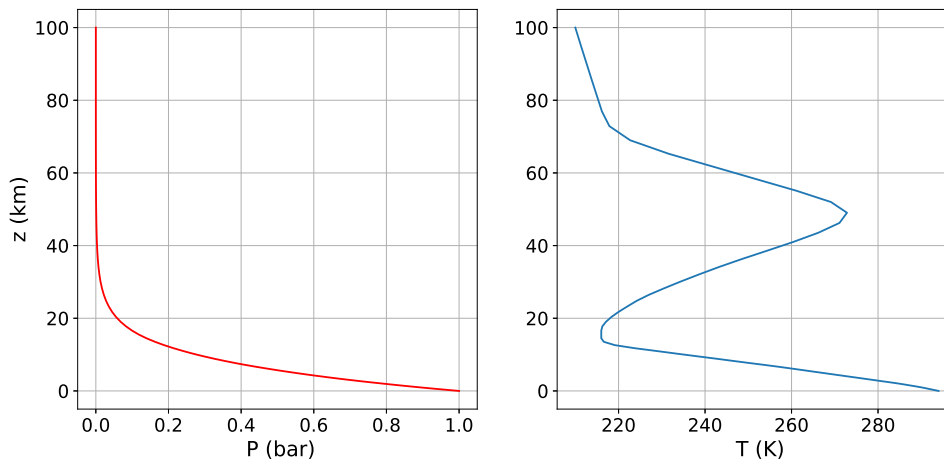


FIGURE 6 – Évolution de la pression et de la température avec l'altitude. La majorité des phénomènes météorologiques se déroulent dans la **troposphère**. Dans cette couche située entre le sol et environ 15km d'altitude, la température décroît avec l'altitude. À partir du sommet de la troposphère, la température devient pour un moment croissante avec l'altitude. Cette inversion aura une influence que l'on discutera par la suite.

## 2.2 Calcul du flux et de la température d'émission

### Retour sur le paradoxe de l'absorption du $CO_2$

En plus des données thermodynamiques, on dispose de l'épaisseur optique totale de l'atmosphère  $\tau_\nu(\infty)$  et donc, après passage à l'exponentielle, du coefficient de transmission spectrale de l'atmosphère  $\mathcal{T}_\nu(\infty)$ . Ces deux grandeurs spectrales sont représentées figure-7. Le jeu de données fournit  $\tau_\nu(\infty)$  tous

les  $1 \text{ cm}^{-1}$  de  $100 \text{ cm}^{-1}$  jusqu'à  $2500 \text{ cm}^{-1}$ . Il s'agit en réalité de valeurs moyennées sur  $1 \text{ cm}^{-1}$  car il existe une variation spectrale de  $\tau_\nu(\infty)$  interne " au  $\text{cm}^{-1}$ ".

En dehors des deux bandes d'absorption vers  $600 \text{ cm}^{-1}$  et  $2300 \text{ cm}^{-1}$ , le  $\text{CO}_2$  absorbe très peu sur le domaine infra-rouge tellurique. La bande qui se situe vers  $2300 \text{ cm}^{-1}$  ne joue en réalité presque aucun rôle puisque le rayonnement tellurique dans ce domaine spectral est très faible (voir figure-2). On s'intéressera donc surtout à la bande vers  $600 \text{ cm}^{-1}$ , souvent appelée raie à  $\lambda = 15 \mu\text{m}$ . Comme on peut le voir figure-7, sur certaines plages spectrales l'absorption du  $\text{CO}_2$  est presque totale ( $\mathcal{T}_\nu(\infty) = 0$ ) et sur les autres, elle est presque strictement nulle ( $\mathcal{T}_\nu(\infty) = 1$ ). Cette forme "en créneaux" explique l'effet de saturation de l'absorption du  $\text{CO}_2$ . Sur les domaines où le  $\text{CO}_2$  n'absorbe presque rien, augmenter sa concentration n'a aucun effet. Sur les autres, l'absorption du  $\text{CO}_2$  est saturée et l'augmentation n'a aucun effet non plus.

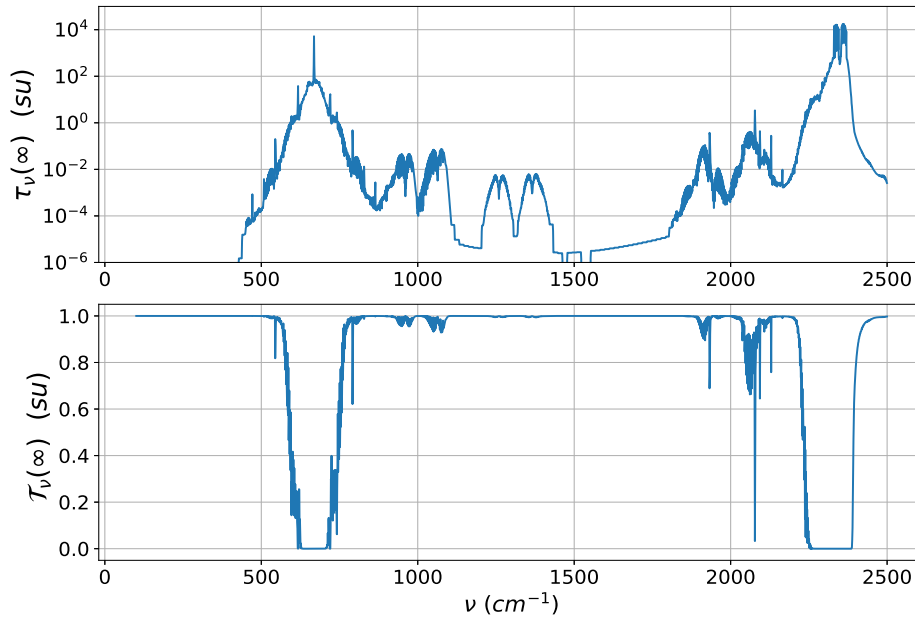


FIGURE 7 – Représentations spectrales de l'épaisseur optique totale de l'atmosphère  $\tau_\nu(\infty)$  et du coefficient de transmission correspondant  $\mathcal{T}_\nu(\infty)$ . En dehors des deux bandes d'absorption vers  $600 \text{ cm}^{-1}$  et  $2300 \text{ cm}^{-1}$ , le  $\text{CO}_2$  absorbe très peu sur le domaine infra-rouge tellurique.

### Calcul du flux au sommet de l'atmosphère

Pour résoudre l'équation du transfert radiatif, il faut connaître l'épaisseur optique de n'importe quelle portion de l'atmosphère. Or à ce stade, on ne dispose que de cette grandeur sur la totalité de l'atmosphère. L'épaisseur optique d'une couche d'atmosphère est proportionnelle à la quantité d'absorbant traversée :

$$\tau_\nu(z_1, z_2) = \int_{z_1}^{z_2} \mathcal{K}_\nu(z) \rho(z) dz = \int_{P_1}^{P_2} \mathcal{K}_\nu(P) \left(-\frac{dP}{g}\right)$$

avec  $\mathcal{K}_\nu(P)$  un coefficient d'absorptivité massique en  $(\text{m}^2/\text{kg})$  (N.B : par kg d'air), et où l'on a utilisé l'invariant de la statique des fluides. Dorénavant, on notera

$$\tau_\nu(P) = \int_{P_t}^P \mathcal{K}_\nu(U) \frac{dU}{g} \quad (9)$$

l'épaisseur optique de la couche située entre le sommet de l'atmosphère (de pression  $P_t$ ) et l'altitude de pression  $P$ . On note  $\mathcal{T}_\nu(P)$  le coefficient de transmission correspondant. Avec, pour coordonnée

verticale la pression, l'équation-5 se réécrit :

$$F_{\nu}^{\uparrow} = \mathcal{T}_{\nu}(\infty)B_{\nu}(T_s) + \int_{P_t}^{P_s} \frac{\partial \mathcal{T}_{\nu}(P)}{\partial P} B(P) dP \quad (10)$$

où l'intégrale parcourt l'atmosphère du sommet (pression  $P_t$ ) à sa base (pression  $P_s = 1$  bar). C'est cette équation qui sera utilisée numériquement pour calculer le flux au sommet de l'atmosphère. Comme le  $CO_2$  est le seul gaz absorbant on peut écrire  $\mathcal{K}_{\nu}$  sous la forme :

$$\mathcal{K}_{\nu}(P) = \kappa_{\nu,co_2}(P) q_{co_2}$$

où  $q_{co_2}$  est la fraction massique en  $CO_2$  de l'air, et  $\kappa_{\nu,co_2}$  le coefficient d'absorptivité massique spécifique du  $CO_2$  (en  $m^2/kg$ ) (N.B : par kg de  $CO_2$ ).

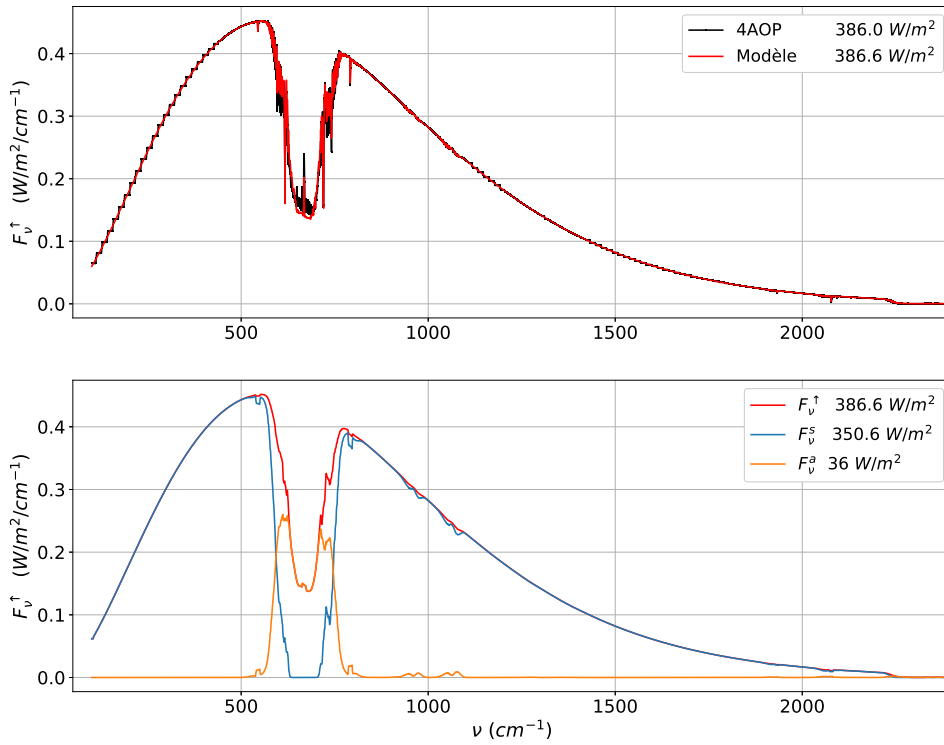


FIGURE 8 – **(En haut)** : Représentations spectrales des flux ascendants au sommet de l'atmosphère  $F_{\nu}^{\uparrow}$  calculés par le modèle et par le modèle 4AOP de référence ainsi que les valeurs des flux intégrés sur tout le spectre (en  $W/m^2$ ) correspondantes. **(En bas)** : Contributions relatives (calculées par le modèle) des flux atmosphériques  $F_{\nu}^a$  et issu de la surface  $F_{\nu}^s$  au flux total  $F_{\nu}^{\uparrow}$ . Les flux intégrés sur le spectre sont aussi indiqués. Les flux ont été moyennés sur une plage de  $10 \text{ cm}^{-1}$  (moyenne glissante).

La dépendance en  $P$  du coefficient  $\kappa_{\nu,co_2}$  est due au phénomène d'*élargissement collisionnel*. Au niveau microscopique, les collisions entre particules modifient à la fois la largeur (effet non étudié ici car l'ordre de grandeur des raies est inférieur au  $cm^{-1}$ ) mais aussi l'intensité des raies d'absorption. On postule une dépendance linéaire avec la pression [4, 5] :  $\kappa_{\nu,co_2}(P) = \Theta_{\nu,co_2} \frac{P}{P_s}$ . En intégrant l'équation-9 sur toute l'atmosphère on trouve la valeur de  $\Theta_{\nu,co_2}$  en fonction de  $\tau_{\nu}(\infty)$ . On obtient :

$$\tau_{\nu}(P) = \tau_{\nu}(\infty) \frac{P^2 - P_t^2}{P_s^2 - P_t^2} \quad (11)$$

On peut maintenant calculer numériquement le flux à l'aide de l'équation-10. Le calcul est réalisé sur *Python*. La dérivée dans 10 est exacte puisque l'on a l'expression analytique de  $\mathcal{T}_{\nu}(P)$ . L'intégrale

est calculée avec la fonction *integrate.simps* de la librairie *SciPy*. Le résultat obtenu, ainsi que le flux prévu par le modèle utilisé au LMD (appelé **4AOP**) sont représentés figure-8. On a également représenté les contributions relatives du flux qui provient directement de la surface et de celui émis par l'atmosphère.

L'écart relatif entre le flux spectral calculé et celui de référence est de 1.12%. Le flux surfacique  $F^\uparrow$  (intégré sur tout le spectre) calculé est de  $386.6 \text{ W/m}^2$  ce qui correspond à un écart relatif de 0.2% avec le modèle **4AOP**. En dehors de la bande d'absorption à  $15\mu\text{m}$ , le flux est dû essentiellement au rayonnement provenant directement de la surface terrestre  $F_\nu^a$  et on retrouve la forme de la loi de Planck. Le rayonnement atmosphérique  $F_\nu^a$ , lui, ne représente que 9.3% du flux surfacique total. En revanche, sa contribution est largement majoritaire dans la bande d'absorption à  $15\mu\text{m}$  du  $\text{CO}_2$ .

### Calcul de la température d'émission

Au vu de l'équation-10, la contribution d'une tranche d'atmosphère d'épaisseur  $dP$  et de pression  $P$  au flux atmosphérique  $F_\nu^\uparrow$  vaut :

$$\Omega_\nu(P)dP = \frac{\frac{\partial T_\nu(P)}{\partial P} \mathcal{B}_\nu(P)dP}{\int_{P_t}^{P_s} \frac{\partial T_\nu(U)}{\partial U} \mathcal{B}_\nu(U)dU} \quad (12)$$

avec  $\Omega_\nu(P)$  la loi de densité de probabilité qu'un photon s'échappant au sommet de l'atmosphère ait été émis à l'altitude de pression  $P$ . Comme expliqué en section-1.4, plus l'atmosphère est optiquement épaisse, plus cette densité de probabilité se déplace vers les hautes altitudes (basses pressions). Cela s'interprète physiquement en remarquant qu'il est de plus en plus improbable qu'un photon émis à faible altitude traverse entièrement l'atmosphère sans être absorbé si l'on augmente le pouvoir absorbant de l'atmosphère. Ce phénomène est représenté figure-9.

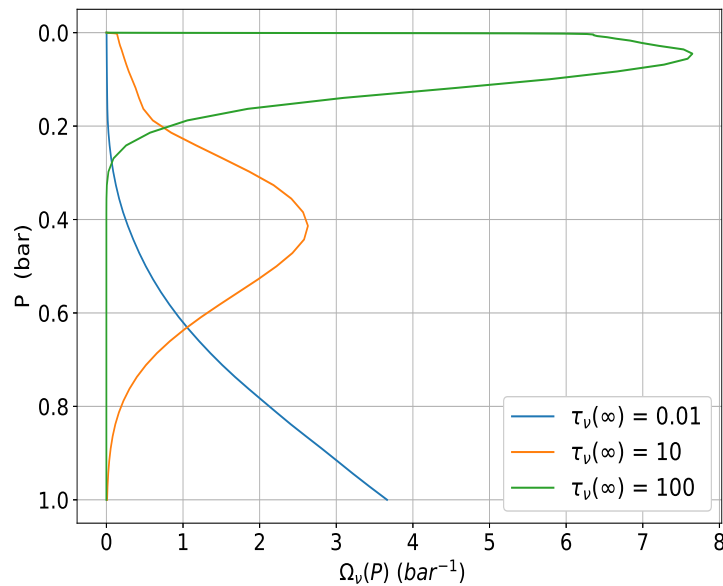


FIGURE 9 – Profils verticaux de  $\Omega_\nu(P)$  pour différentes valeurs d'épaisseurs optiques  $\tau_\nu(\infty)$ . Plus l'épaisseur optique est grande, plus la densité de probabilité se déplace vers les hautes altitudes (zones de basses pressions).

Une fois que l'on a la densité de probabilité  $\Omega_\nu(P)$  qu'un photon ait été émis à un certain palier de pression, il suffit de faire une moyenne pondérée par  $\Omega_\nu(P)$  pour obtenir les grandeurs d'altitude

d'émission  $Z_{\nu,e}$ , de pression d'émission  $P_{\nu,e}$  et de température d'émission  $T_{\nu,e}$ . Par exemple pour la température :

$$T_{\nu,e} = \int_{P_t}^{P_s} T(P) \Omega_{\nu}(P) dP$$

On a représenté en figure-10 l'évolution spectrale des grandeurs d'altitude, de pression et de température d'émission pour la bande d'absorption à  $15\mu m$ . L'annexe A montre l'évolution des mêmes grandeurs sur la totalité du spectre infra-rouge tellurique. Ces graphes sont donnés à titre indicatif car, comme vu figure-8, seule la raie à  $15\mu m$  joue un rôle non-négligeable.

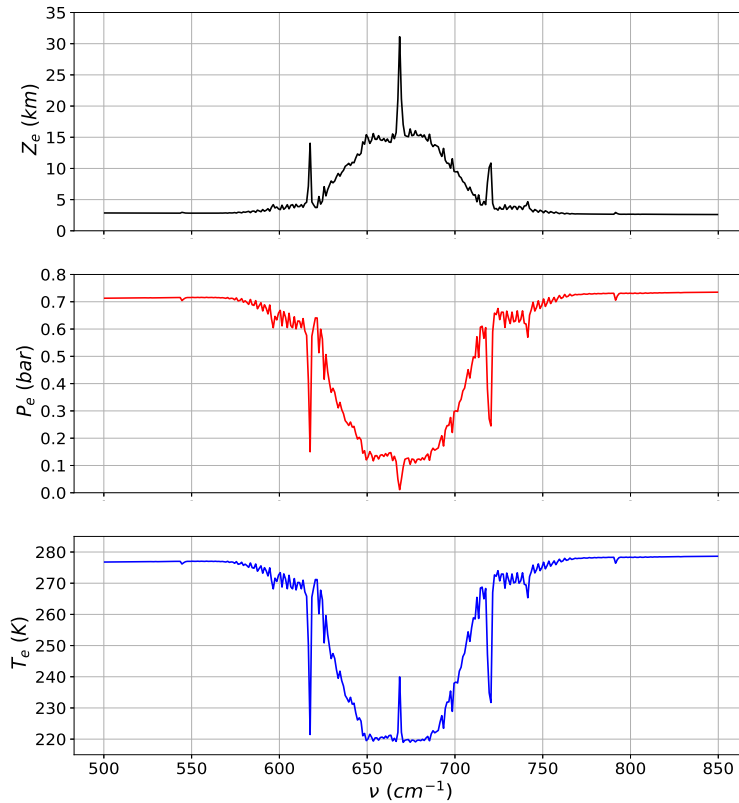


FIGURE 10 – Évolutions spectrales de l'altitude d'émission  $Z_{\nu,e}$  de la pression d'émission  $P_{\nu,e}$  et de la température d'émission  $T_{\nu,e}$  pour la bande d'absorption à  $15\mu m$  du  $CO_2$ .

Plus l'absorption du  $CO_2$  est grande, plus l'altitude d'émission est élevée. Hormis un pic très élevé à exactement  $668\text{ cm}^{-1}$ , l'altitude d'émission  $Z_{\nu,e}$  varie entre 5 et  $15\text{ km}$  sur la bande d'absorption. À ces altitudes, on se situe dans la **troposphère**. Comme admis jusqu'à présent, la température y est décroissante avec l'altitude (voir figure-6). Puisque la pression est une fonction décroissante de l'altitude, les variations de la pression d'émission  $P_{\nu,e}$  sont parfaitement opposées à celle de  $Z_{\nu,e}$  :  $P_{\nu,e}$  décroît sur la bande d'absorption. Les deux graphes se ressemblent grandement. Pour la température d'émission  $T_{\nu,e}$ , elle, semble varier presque exactement comme  $P_{\nu,e}$  à l'exception notable du pic à  $668\text{ cm}^{-1}$ . À  $668\text{ cm}^{-1}$ , l'altitude d'émission est d'environ  $30\text{ km}$  c'est-à-dire dans la **stratosphère**. Or dans la stratosphère, à la différence de la troposphère, la température est une fonction croissante de l'altitude. Contrairement au cas présenté en section-1.4, une augmentation de l'altitude d'émission résulte en une température plus chaude et donc un flux atmosphérique plus important. Dans ce cas

précis, une augmentation de la concentration en  $CO_2$  diminue l'effet de serre! On verra par la suite que l'effet de ce pic à  $668\text{cm}^{-1}$  sur l'effet de serre est négligeable par rapport au reste de la bande d'absorption. Comme la majorité de l'absorption se fait dans la troposphère, le mécanisme présenté en section-1.4 reste bien le principal mécanisme à l'oeuvre.

### 2.3 Influence de la concentration en $CO_2$ de l'atmosphère

Dans cette section, on s'intéresse à l'effet de la concentration en  $CO_2$  sur les grandeurs vues jusqu'à présent. Pour cela, on introduit un coefficient sans unité  $f$  qui donne la concentration en  $CO_2$ .  $f = 1$  signifie que la concentration en  $CO_2$  est celle utilisée jusqu'à présent à savoir  $435\text{ ppm}$ .  $f = 2$  signifie que l'on double la concentration en  $CO_2$ ,  $f = 0.5$  qu'on l'a diminuée de moitié etc... On étudiera surtout l'effet d'un doublement de la concentration ie  $f = 2$ . Les calculs sont rigoureusement les mêmes que ceux développés en section-2.2 à l'exception près que l'épaisseur optique est multipliée par un facteur  $f$ .

On a représenté en figure-11 l'effet d'un doublement de la concentration sur la transmission spectrale de l'atmosphère  $\mathcal{T}_\nu(\infty)$ , sur l'altitude d'émission  $Z_{\nu,e}$  et sur la température d'émission  $T_{\nu,e}$ . Ici aussi, seules les évolutions spectrales correspondant à la raie d'absorption à  $15\mu\text{m}$  sont représentées, le reste du spectre n'ayant que peu de variation ou d'effet sur le calcul du flux.

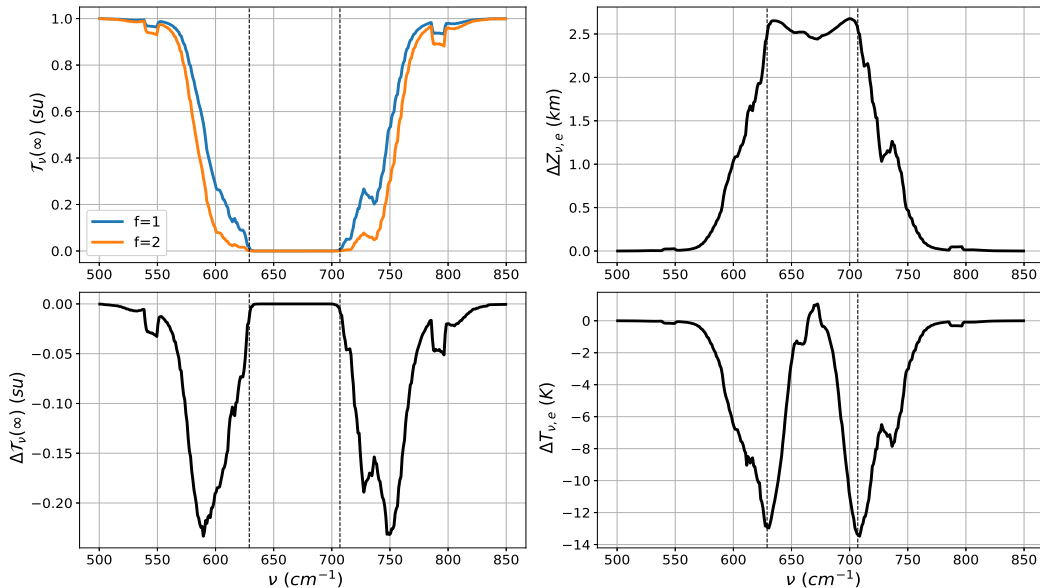


FIGURE 11 – Représentations spectrales de la transmission de l'atmosphère  $\mathcal{T}_\nu(\infty)$ , de sa variation  $\Delta\mathcal{T}_\nu(\infty)$ , de la variation d'altitude d'émission  $\Delta Z_{\nu,e}$  et de la variation de température d'émission  $\Delta T_{\nu,e}$  lorsque l'on double la concentration en  $CO_2$  de l'atmosphère. Les traits verticaux en pointillés délimitent la zone de saturation où  $\mathcal{T}_\nu(\infty) = 0$ .

Pour le coefficient de transmission, on peut distinguer trois domaines spectraux. Loin de la raie d'absorption, doubler le  $CO_2$  n'a aucun effet, la transmission reste sensiblement égale à 1. Au milieu de la raie (zone entre les deux droites verticales en pointillées), le changement de concentration n'a toujours pas d'effet. Comme expliqué en section-1.4, l'absorption de l'atmosphère y est saturée et  $\mathcal{T}_\nu(\infty)$  vaut 0. Il n'y a que l'intervalle compris entre les deux domaines précédents qui comporte un changement significatif. **En résumé, doubler la concentration de  $CO_2$  élargit la raie d'absorption sans changer son intensité maximale (le coefficient de transmission est borné par 0). On n'observe de changement que sur les bords de la raie.** Pour ce qui est de l'augmentation de l'altitude d'émission, elle varie de 0 à  $2.5\text{ km}$  sur les bords de la raie et stagne à une valeur de  $2.5\text{ km}$  dans la zone de saturation. **Donc plus l'atmosphère absorbe, plus la différence d'altitude d'émission est**

**grande.** Cependant, on remarque que l'augmentation de la température d'émission ne suit pas du tout celle de l'altitude d'émission. À l'inverse de  $\Delta Z_{\nu,e}$ ,  $\Delta T_{\nu,e}$  est plus grande (en valeur absolue) en dehors de la zone d'absorption. En réalité, on a vu (figure-10) que l'altitude d'émission était d'environ  $15km$  pour la zone de saturation. À  $15km$ , on se trouve dans une zone de transition entre la troposphère (en-dessous) et la stratosphère (au-dessus) qu'on appelle **tropopause**. Or dans la tropopause ( voir annexe B), la températures est quasi-constante avec l'altitude. Donc, dans la zone de saturation, même si l'altitude d'émission augmente beaucoup, cela ne se traduit pas par une variation de température importante. D'ailleurs, en regardant bien le centre de la zone d'absorption sur la figure-11, on voit que  $\Delta T_{\nu,e}$  devient même positive : on a atteint la stratosphère où la température croit avec l'altitude.

**Ainsi, une augmentation du taux de  $CO_2$  résulte forcément en une augmentation de l'altitude d'émission. Puis, en fonction du gradient de température, cette augmentation d'altitude se traduit par un réchauffement ou un refroidissement de la température d'émission. Puisque ,dans le cas du  $CO_2$ , l'altitude d'émission est presque exclusivement dans la troposphère, c'est surtout un refroidissement (et donc une augmentation de l'effet de serre) qu'on observe).**

On a vu l'influence de la concentration en  $CO_2$  sur  $\mathcal{T}_\nu(\infty)$  et  $T_{\nu,e}$ . Maintenant, on souhaite observer l'influence directe du taux de  $CO_2$  sur le flux ascendant en sortie de l'atmosphère  $F_\nu^\uparrow$  ou sur l'effet de serre  $G_\nu$  (d'après l'équation-6 cela revient au même).

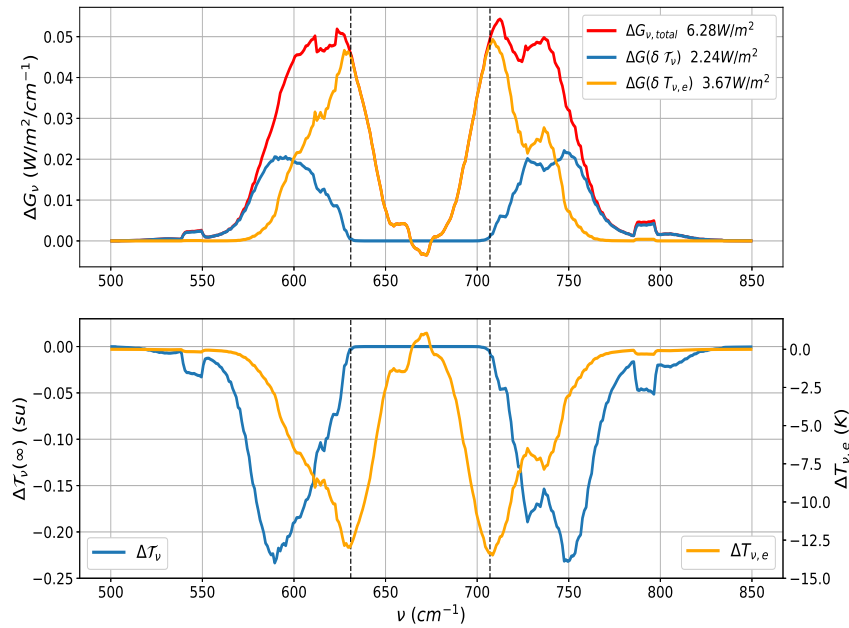


FIGURE 12 – **(En haut)** Variations spectrales, après avoir doublé le taux de  $CO_2$  dans l'atmosphère, de l'effet de serre totale  $\Delta G_{\nu,tot}$ , ainsi que des contributions relatives de  $\Delta G(\delta\mathcal{T}_\nu)$  et  $\Delta G(\delta T_{\nu,e})$  respectivement due à la variation du coefficient de transmission  $\Delta\mathcal{T}_\nu(\infty)$  et à celle de la température d'émission  $\Delta T_{\nu,e}$  (**représentées en bas**)

On rappelle que l'effet de serre est le produit de deux termes :

$$G_\nu = \underbrace{(1 - \mathcal{T}_\nu(\infty))}_a \underbrace{[B_\nu(T_s) - B_\nu(T_e)]}_b$$

où le premier, que l'on nomme  $a$  ne dépend que de  $\mathcal{T}_\nu(\infty)$  tandis que le second, que l'on nomme  $b$  ne



dépend que de  $T_{\nu,e}$ . Si l'on double la concentration de  $CO_2$ , la variation d'effet de serre s'écrit :

$$\Delta G_{\nu} = \underbrace{(\Delta a) b}_{\Delta G(\delta T_{\nu})} + \underbrace{a (\Delta b)}_{\Delta G(\delta T_{\nu,e})} + \underbrace{\Delta a \Delta b}_{\text{terme croisé}}$$

avec  $\Delta G(\delta T_{\nu})$  la variation d'effet de serre due à celle de  $T_{\nu}(\infty)$ ,  $\Delta G(\delta T_{\nu,e})$  la variation d'effet de serre due à celle de  $T_{\nu,e}$  et où le dernier terme croisé dépend à la fois de  $T_{\nu}(\infty)$  et de  $T_{\nu,e}$ . On a représenté en figure-12 la variation d'effet de serre totale, ainsi que les contributions relatives de  $\Delta G(\delta T_{\nu})$  et  $\Delta G(\delta T_{\nu,e})$  lorsque le taux de carbone est multiplié par 2. On a aussi montré les variations de transmission et de température d'émission pour bien montrer que le terme  $T_{\nu}(\infty)$  pilote  $\Delta G(\delta T_{\nu})$  et que  $T_{\nu,e}$  pilote  $\Delta G(\delta T_{\nu,e})$

La variation totale d'effet de serre (intégrée sur le spectre) est de  $6.28W/m^2$ . Elle est expliquée à 35% par la variation de  $T_{\nu}(\infty)$  ( $2.24W/m^2$ ) et à 58% par la variation de  $T_{\nu,e}$  ( $3.67W/m^2$ ). Les 7% restants proviennent du terme croisé. Si l'effet de la température d'émission reste majoritaire, on serait tenté de remettre en question la pertinence du "paradoxe de l'absorption du  $CO_2$ " puisque la variation d'absorption totale explique tout de même 35% du changement d'effet de serre. En réalité, dans une atmosphère qui en plus est saturée par la présence d'eau, cet effet descend à 10% uniquement et la température d'émission explique 90% de l'effet de serre. On remarque aussi que la contribution spectrale des deux termes n'est pas la même. Dans la zone de saturation, on a évidemment  $\Delta G(\delta T_{\nu}) = 0$  et c'est la variation de  $T_{\nu,e}$  qui explique l'effet de serre. En dehors de la zone de saturation, les deux termes contribuent.

### 2.4 Méthode "k-distribution"

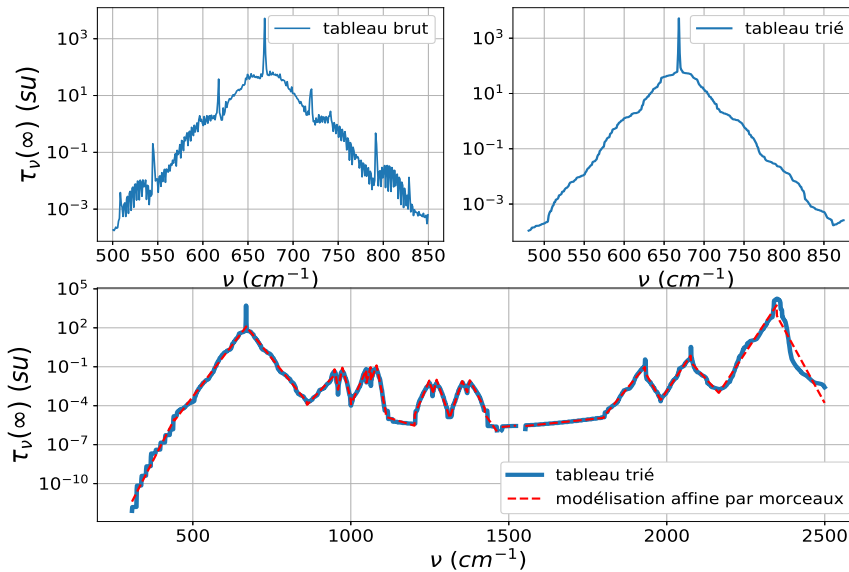


FIGURE 13 – Illustration de la méthode **k-distribution**. On utilise le logarithme de l'épaisseur optique  $\tau_{\nu}(\infty)$ . On divise le spectre en une succession de "pics". Pour chaque pic, on trie le tableau par ordre croissant jusqu'au sommet du pic, puis par ordre décroissant après le sommet. On obtient le tableau "trié". Enfin, on modélise par une succession de droites le tableau trié.

Les calculs réalisés jusqu'à présent sont relativement rapides : aucun n'a pris plus d'une dizaine de secondes. Premièrement, on a négligé de nombreux phénomènes ce qui simplifie grandement le calcul, deuxièmement, il arrive qu'on ait besoin de calculer ces flux de nombreuses fois en un minimum de

temps. C'est par exemple le cas lorsqu'on tente de modéliser les interactions entre océans et atmosphère. C'est pourquoi on présente ici une méthode, appelée **k-distribution** [7] qui permet de simplifier grandement les calculs numériques.

Ce qui est gourmand numériquement, c'est de tenir compte de la dépendance spectrale de l'épaisseur optique. À ce stade, on peut rappeler que dans ce travail on utilise un spectre d'épaisseur optique déjà moyenné sur  $1\text{cm}^{-1}$ . Le logarithme de l'épaisseur optique du au  $\text{CO}_2$  ( voir figure-7) varie de deux manières : - des variations lentes expliquent les pics d'absorption d'une largeur d'ordre de grandeur  $100\text{cm}^{-1}$  - des variations très rapides ( $1$  à  $10\text{cm}^{-1}$ ) expliquent l'aspect 'bruité' du spectre. L'idée pour simplifier les intégrations numériques est de "réorganiser" le spectre. Le processus est illustré figure-13.

On se concentre sur un "pic" d'épaisseur optique (en échelle log). À gauche du maximum du pic, on réarrange toutes les valeurs dans l'ordre croissant, à droite du maximum du pic, on réarrange toutes les valeurs dans l'ordre décroissant. On passe ainsi du tableau brut au tableau trié. Ensuite, on modélise le tableau trié par une succession de droites. En réarrangeant, on a attribué à chaque nombre d'onde une nouvelle valeur de  $\tau_\nu(\infty)$ . Mais comme cette redistribution ne se fait qu'à l'échelle d'un demi-pic ( $\approx 100\text{cm}^{-1}$ ) et que la fonction de planck varie assez peu sur cette échelle, le flux obtenu (voir annexe C) reste quand même une bonne approximation de celui de référence puisqu'on obtient en écart relatif de 1.8%

On cherche maintenant à simplifier les calculs lorsque l'on change le taux de  $\text{CO}_2$  dans l'atmosphère, c'est-à-dire le paramètre  $f$ . On a représenté en figure-14 la transmission et la pression d'émission pour différentes valeurs de  $f$  à la fois en utilisant le tableau brut d'épaisseur optique (**à gauche**) d'une part et le tableau modélisé par la méthode k-distribution d'autre part (**à droite**). Seule la raie à  $15\mu\text{m}$  est représentée.

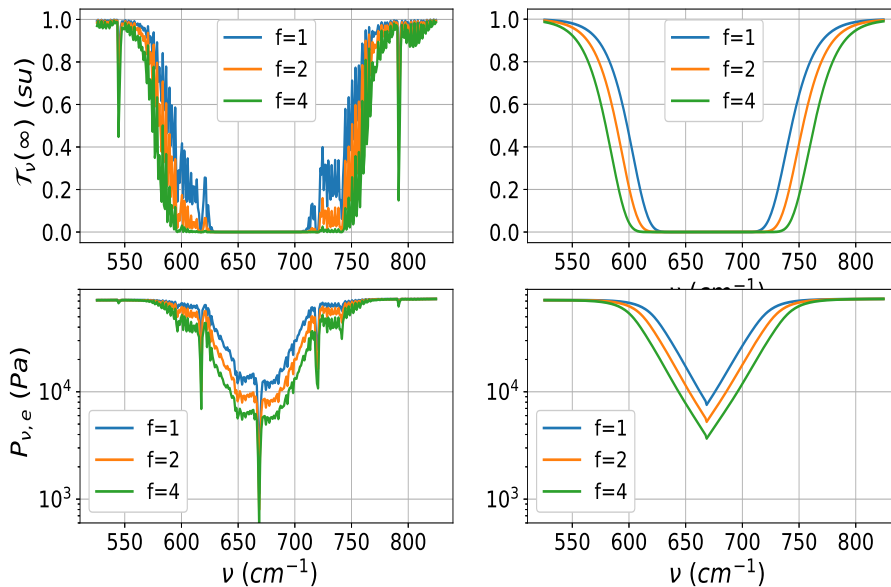


FIGURE 14 – Transmission  $\mathcal{T}_\nu(\infty)$  et pression d'émission  $P_{\nu,e}$  pour différentes valeurs de  $f$  à la fois en utilisant le tableau brut d'épaisseur optique (**à gauche**) et le tableau modélisé par la méthode k-distribution (**à droite**)

On se concentre dorénavant sur les figures issues du tableau modélisé. Premièrement, changer le taux de  $\text{CO}_2$  n'a aucun effet, ni sur  $\mathcal{T}_\nu(\infty)$  ni sur  $P_{\nu,e}$  en dehors des zones d'absorption donc le calcul pour  $f = 1$  suffit. Pour  $\mathcal{T}_\nu(\infty)$ , si  $f$  varie, seule la largeur de la bande est modifiée. Pour  $P_{\nu,e}$ , en échelle log on observe une succession de triangle inscrits, la hauteur et la largeur de ces triangles changent mais

de telle sorte que les proportions des triangles restent inchangées (l'angle au sommet est le même). Ainsi, une fois que l'on connaît le cas  $f = 1$ , chacun de ces triangles est entièrement déterminé par un seul paramètre, sa hauteur par exemple. Étudier de manière quantitative la variation de ces paramètres (largeur de la bande pour  $\mathcal{T}_\nu(\infty)$  et hauteur du triangle pour  $P_{\nu,e}$ ) avec le coefficient  $f$  permettrait d'obtenir les profils de  $\mathcal{T}_\nu(\infty)$  et de  $P_{\nu,e}$  pour une quelconque valeur de  $f$  sans avoir à faire le moindre calcul. Ce travail n'a pas été fait faute de temps. On a préféré se concentrer sur l'introduction de la vapeur d'eau dans le modèle.

### 3 Action de la vapeur d'eau

L'eau est, devant le  $CO_2$ , le principal gaz à effet de serre. Elle représente à elle seule 67% de l'effet de serre sur terre contre 32% pour le  $CO_2$ . Comprendre les effets de l'eau contenue dans l'atmosphère sur le climat est essentiel pour un modèle climatologique. Dans cette section, on travaillera dorénavant avec une atmosphère composée à la fois de  $CO_2$  et d'eau. Dans un premier temps, on se penchera sur les principales différences avec le cas du  $CO_2$  développé dans la partie 2. Dans une seconde partie, on se concentrera sur le calcul et l'interprétation du flux obtenu avant de discuter dans une dernière partie du phénomène de **rétroaction due à la vapeur d'eau**.

#### 3.1 Différences avec l'atmosphère uniquement composée de $CO_2$

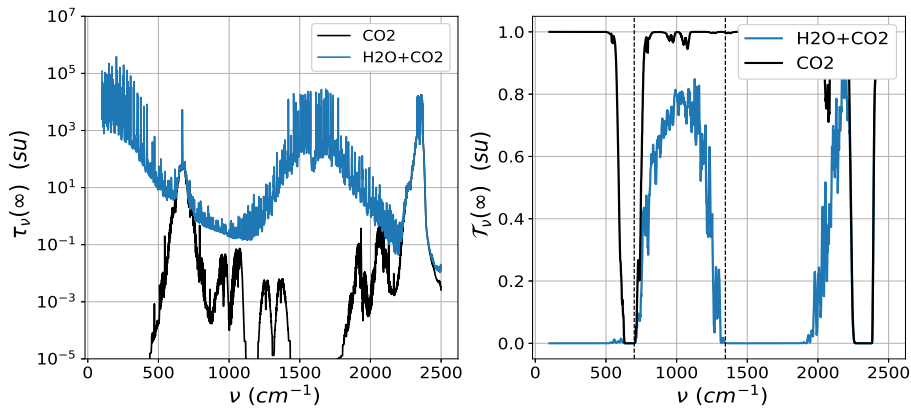


FIGURE 15 – Épaisseurs optiques (à gauche) et transmissions (à droite) pour une atmosphère contenant du  $CO_2$  uniquement et une atmosphère mixte  $H_2O + CO_2$ . La fenêtre optique (entre les droites verticales en pointillées) représente la zone où l'atmosphère mixte n'est pas saturée.

Notre nouvelle atmosphère répond aux mêmes hypothèses simplificatrices qu'évoquées en section 2.1 : on considère une colonne d'atmosphère au repos de hauteur  $z_t = 100 \text{ km}$  divisée en 65 paliers. On se place à une dimension i.e on fait l'hypothèse *plan-parallèle*. On néglige la diffraction et la terre rayonne comme un corps noir parfait.

Les gradients de pression et de température sont les mêmes que précédemment. Elle contient simplement en plus de l'eau. En réalité, l'eau se trouve sous deux formes dans l'atmosphère : sous forme de vapeur d'eau et dans les nuages. Ici, on ne tiendra pas compte des nuages bien qu'ils représentent 25% de l'effet total (donc 75% provient de la vapeur d'eau). À partir d'ici, par "eau", on entendra donc en réalité **vapeur d'eau**.

À la différence du  $CO_2$ , la concentration en eau dans l'atmosphère varie fortement avec l'altitude. Presque la totalité de l'eau contenue dans l'atmosphère se situe dans les 10 premiers kilomètres, c'est-à-dire dans la troposphère. Au-dessus, la quantité d'eau est quasiment nulle et reste constante avec l'altitude. Le gradient de vapeur d'eau utilisé est représenté en annexe D.

Comme le montre la figure-15, où l'on a représenté l'épaisseur optique et la transmission de deux atmosphères, la première avec du  $CO_2$  uniquement la deuxième mixte  $H_2O + CO_2$ , l'absorption dans une atmosphère standard est beaucoup plus le fait de la vapeur d'eau que celui du  $CO_2$ .

En effet, à part la raie d'absorption à  $15\mu m$ , le rôle du  $CO_2$  est parfaitement négligeable. Si le  $CO_2$  domine aussi vers  $2300\text{ cm}^{-1}$ , on rappelle que cela n'a aucun effet car le flux émis par la terre est quasiment dans cette portion du spectre. Dans le domaine qui nous importe (entre  $100$  et  $2000\text{ cm}^{-1}$  environ) l'atmosphère mixte ( $H_2O + CO_2$ ) est presque toujours saturée à l'exception d'une bande située entre  $700$  et  $1350\text{ cm}^{-1}$ . Appelée **fenêtre optique**, elle est délimitée par les deux droites pointillées sur la figure-15 et jouera un rôle important par la suite.

### 3.2 Calcul du flux

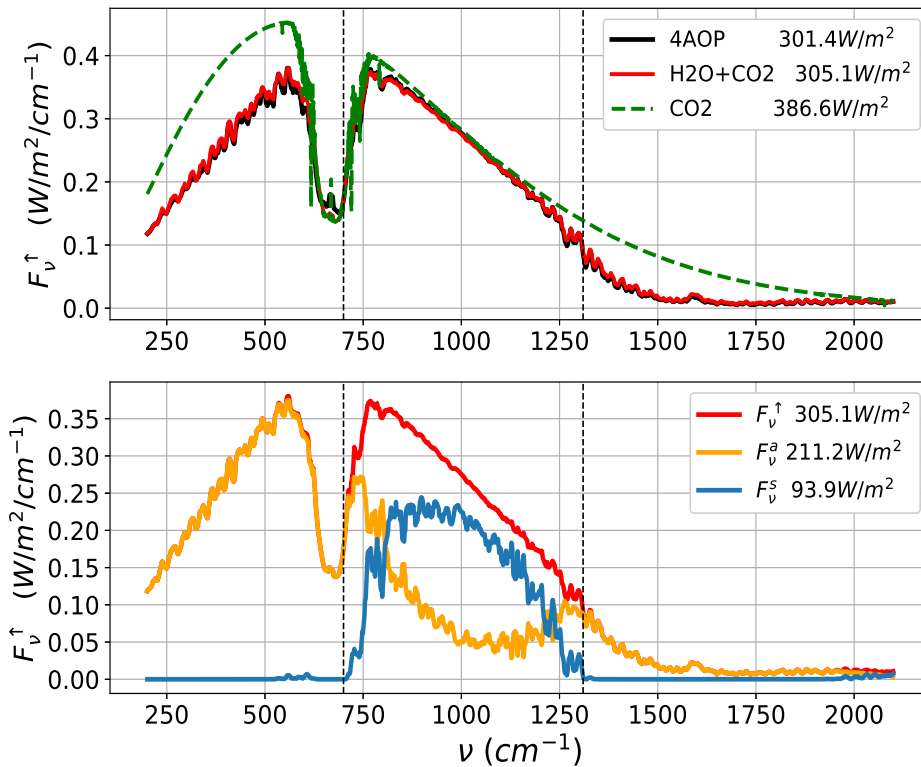


FIGURE 16 – (En haut) : Représentations spectrales des flux ascendants  $F_v^\uparrow$  au sommet de l’atmosphère mixte  $H_2O+CO_2$  calculés par le modèle et par le modèle 4AOP de référence ainsi que les valeurs des flux intégrés sur tout le spectre (en  $W/m^2$ ) correspondantes. On a aussi illustré le flux pour une atmosphère uniquement composée de  $CO_2$ . (En bas) : Contributions relatives (calculées par le modèle) des flux atmosphériques  $F_v^a$  et issu de la surface  $F_v^s$  au flux total  $F_v^\uparrow$  pour l’atmosphère mixte. Les flux intégrés sur le spectre sont aussi indiqués. Les flux ont été moyennés sur une plage de  $10\text{ cm}^{-1}$  (moyenne glissante).

Le calcul du flux ascendant en sortie de l’atmosphère suit les mêmes étapes que présentées en section-2.2. On dispose du tableau d’épaisseur optique totale  $\tau_{\nu,h_2o}(\infty)$  pour une atmosphère **uniquement** composée de vapeur d’eau. On cherche à exprimer l’épaisseur optique de n’importe quelle couche d’atmosphère  $\tau_{\nu,h_2o}(P)$  en fonction de  $\tau_{\nu,h_2o}(\infty)$ . L’épaisseur optique totale  $\tau_\nu(P)$  est obtenue en additionnant celle du  $CO_2$  et celle de l’eau. Comme pour le  $CO_2$ , l’effet de l’élargissement colis-

*sionnel* est pris linéaire avec la pression donc  $\kappa_{\nu,co2}$ , l'absorptivité massique de l'eau (en  $m^2/kg$ ) (N.B : par  $kg$  d'eau) vaut  $\kappa_{\nu,co2} = \Theta_{\nu,h2o} \frac{P}{P_s}$ . Cependant, à la différence du  $CO_2$ , la fraction massique  $q_{h2o}$  de la vapeur d'eau n'est pas constante avec l'altitude. On ne peut pas sortir  $q_{h2o}$  de l'intégrale 9 et l'équation-11 devient :

$$\tau_{\nu,h2o}(P) = \tau_{\nu,h2o}(\infty) \frac{\int_{P_t}^P U q_{H_2O}(U) dU}{\int_{P_t}^{P_s} U q_{H_2O}(U) dU} \quad (13)$$

Le flux  $F_{\nu}^{\uparrow}$  calculé par ce modèle, celui calculé par le modèle de référence **4AOP** ainsi que le flux calculé précédemment pour une atmosphère uniquement de  $CO_2$  sont représentés figure-16. On a aussi montré les contributions relatives du flux terrestre  $F_{\nu}^s$  et du flux atmosphérique  $F_{\nu}^a$ .

L'écart relatif avec le modèle est de 3.2%. C'est presque le triple de l'écart obtenu pour l'atmosphère contenant uniquement du  $CO_2$  (voir figure-8). L'introduction d'eau diminue grandement le flux au sommet de l'atmosphère : le flux intégré sur le spectre passe de  $386.6 W/m^2$  à  $305.1 W/m^2$ .

Sur la bande d'absorption du  $CO_2$ , la présence d'eau ne fait aucune différence puisque l'absorption est essentiellement due au  $CO_2$ . Sur la fenêtre optique (entre les deux droites en pointillées), comme l'atmosphère est presque complètement transparente, le flux provient surtout de la surface de la terre  $F_{\nu}^s$  et la vapeur d'eau dans l'atmosphère ne joue toujours pas d'effet notable. En revanche, pour le reste du spectre, l'atmosphère qui était transparente devient maintenant absorbante et l'atmosphère émet un flux beaucoup plus important. Alors que, pour l'atmosphère uniquement composée  $CO_2$ ,  $F_{\nu}^a$  représentait 9.3% du total, cette contribution est désormais de 69%. Ce phénomène explique l'erreur relative plus grande pour l'atmosphère mixte.  $F_{\nu}^s$  est, à un coefficient  $\mathcal{T}_{\nu}(\infty)$  près, donné par la loi de planck (voir équation-10) alors que  $F_{\nu}^a$  est plus délicat à calculer.

### 3.3 Rétroaction due à la vapeur d'eau

On a vu dans la section dédiée au carbone, l'effet d'un doublement du taux de  $CO_2$  sur notre modèle radiatif. Cette augmentation du taux de  $CO_2$ , à l'oeuvre aujourd'hui, est le fait de l'activité humaine. Pour la vapeur d'eau, il y a un autre phénomène qui rentre en jeu : c'est l'influence de la température sur la concentration en vapeur d'eau de l'atmosphère.

Si l'atmosphère se réchauffe (pour une raison quelconque) elle s'enrichit en eau et devient plus absorbante. Comme elle est plus absorbante, l'effet de serre augmente ce qui réchauffe la terre. L'effet amplifie la cause qui l'a produit : on parle de **rétroaction positive**. L'objectif de cette section est de quantifier cet effet.

On suppose que la température de l'atmosphère augmente, uniformément, d'une quantité  $\Delta T = 1K$ . Il en est de même pour la température de surface de la terre  $T_s$ . On fait l'hypothèse que le taux d'humidité relative  $HR(z)$  définie comme le rapport de la pression partielle en eau  $P_{h2o}(z)$  et de la pression de vapeur saturante  $P_{sat}(T(z))$  reste constant. Cette hypothèse donne, au premier ordre, une retranscription correcte du phénomène réellement observé [8]. Puisque la pression de vapeur saturante est une fonction croissante de la température, une augmentation de température à humidité relative constante résulte en une augmentation de la pression partielle en eau  $P_{h2o}(z) = HR(z)P_{sat}(T(z))$ .  $P_{h2o}$  est calculée à partir de  $q_{co2}$  en utilisant la loi des gaz parfaits et  $P_{sat}(T)$  est tiré de tables thermodynamiques. L'écart de flux  $\Delta F_{\nu}^{\uparrow}$  obtenu après ce réchauffement est appelé **sensibilité climatique**.

D'après l'équation-7, le flux au sommet de l'atmosphère est fonction de 3 paramètres :  $T_s$ ,  $\mathcal{T}_{\nu}(\infty)$  et  $T_{\nu,e}$ . La variation de  $F_{\nu}^{\uparrow}$  se décompose en trois termes :

$$\Delta F_{\nu}^{\uparrow} = \underbrace{\delta \mathcal{T}_{\nu} [B_{\nu}(T_s) - B(T_{\nu,e})]}_{\Delta F(\delta \mathcal{T}_{\nu})} + \underbrace{\mathcal{T}_{\nu} \Delta B_{\nu}(\delta T_s)}_{\Delta F(\delta T_s)} + \underbrace{[1 - \mathcal{T}_{\nu}] \Delta B(\delta T_{\nu,e})}_{\Delta F(\delta T_{\nu,e})} \quad (14)$$

Le premier terme apporte une contribution négative : augmenter la quantité d'eau augmente l'absorption et diminue la transmission donc  $\delta\mathcal{T}_\nu$  et  $\Delta F(\delta\mathcal{T}_\nu)$  sont négatifs. Le terme dû à la variation de la température de surface  $\mathcal{T}_\nu$   $\Delta B_\nu(\delta T_s)$  est positif car la fonction de planck est croissante avec la température. Le dernier terme est le plus difficile à décrire car le signe de  $\delta T_{\nu,e}$  n'est pas évident.

Une augmentation de la concentration en eau signifie forcément une altitude d'émission plus grande. Pour un gradient de température fixé, une augmentation d'altitude d'émission correspond à une diminution de la température d'émission (sauf dans la stratosphère). Mais puisque l'on a aussi modifié le gradient de température deux effet antagonistes s'opposent : d'un côté on se déplace en altitude vers les zones plus froides, de l'autre à une altitude donnée la température augmente.

La figure-17 montre les variations de transmission et de température d'émission pour un réchauffement uniforme de  $\Delta T = 1K$ , ainsi que la sensibilité climatique (et ses différentes contributions) correspondante. Comme attendu,  $\delta\mathcal{T}_\nu(\infty)$  est nulle là où l'atmosphère est saturée et est négative dans la fenêtre optique.  $\Delta T_{\nu,e}$  est positif sur tout le spectre : l'effet du réchauffement  $\Delta T = 1K$  est plus important que le refroidissement dû à la variation d'altitude d'émission  $\Delta Z_{\nu,e}$  et le terme  $\Delta F(\delta T_{\nu,e})$  est positif. Dans la fenêtre optique,  $\Delta T_{\nu,e} \approx 0.9K$ . La variation  $\Delta T_{\nu,e}$  est presque entièrement expliqué par  $\Delta T$  plutôt que par la variation de  $Z_{\nu,e}$ . On retrouve un résultat similaire à celui figure-11, à savoir que  $\Delta Z_{\nu,e}$  est la plus faible dans les domaines du spectre où l'atmosphère est transparente.

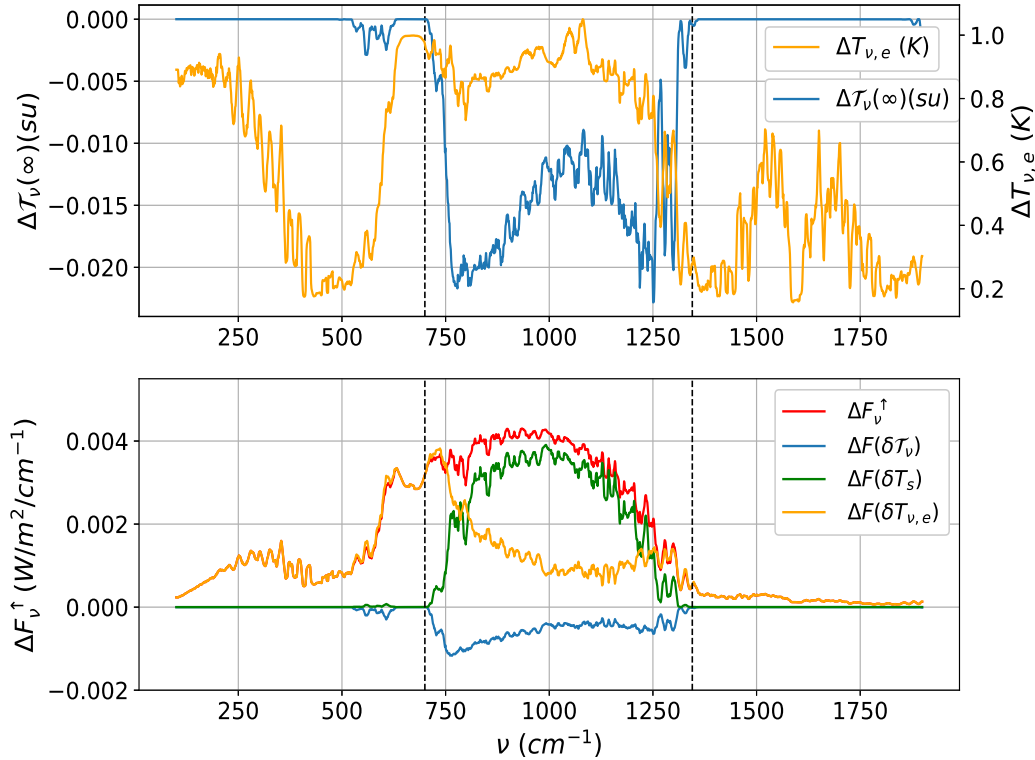


FIGURE 17 – (en haut) : Variations de la transmission  $\Delta\mathcal{T}_\nu(\infty)$  et de la température d'émission  $T_{\nu,e}$  d'une atmosphère mixte ( $H_2O + CO_2$ ) lorsque la température de l'atmosphère et de la surface augmente de 1 degré. (en bas) : Variation du flux en sortie de l'atmosphère (ainsi que de ses différentes contributions) lors de cet échauffement.

Pour la sensibilité climatique  $\Delta F(\nu)^\dagger$ , elle est positive sur tout le spectre : une augmentation uniforme de température donne une augmentation du flux ascendant à la sortie de l'atmosphère. La

sensibilité climatique intégrée sur le spectre est de  $3.05W/m^2$ . Dans la fenêtre optique, elle est surtout due à la variation de température de la terre  $\Delta F(\delta T_\nu)$  car c'est là que le flux directement émis par la surface de la terre intervient ( $1.58W/m^2$  sur tout le spectre). En-dehors, elle est expliquée par la variation de température d'émission. Le rôle de  $\Delta T_\nu$  est très faible dans la fenêtre optique, nul en-dehors (intégrale spectre  $-0.38W/m^2$ ).

En réalité, la sensibilité climatique est normalement définie comme étant la variation de flux lorsque la température de **surface**  $T_s$  varie d'un degré. Or quand  $T_s$  augmente de  $\Delta T_s$ , l'atmosphère ne se réchauffe pas exactement de manière uniforme de  $\Delta T_s$ . Si on prend en compte la véritable variation de température de l'atmosphère, on observe que la sensibilité climatique est nulle à l'extérieur de la fenêtre optique. Ce résultat est connu sous le nom de loi de *Simpson* [8].

Sur la figure-17,  $\Delta F(\nu)^\uparrow$  est bien nulle à droite de la fenêtre optique mais pas à gauche. Pour retrouver la loi de Simpson, il faudrait donc intégrer au modèle une composante thermodynamique pour savoir quel serait la réponse de la température de l'atmosphère à une augmentation de la surface de la terre.

On a décidé ici d'étudier la variation du flux  $\Delta F(\nu)^\uparrow$  mais on aurait pu aussi se concentrer, comme pour le  $CO_2$  (voir figure-12) sur la variation d'effet de serre correspondante. Cette variation est montrée en annexe E.

## 4 Conclusion

Le but du stage était de développer un modèle radiatif simplifié d'effet de serre. Le modèle développé consiste en la résolution de l'équation du transfert radiatif pour une colonne d'atmosphère au repos et pour des profils de température et de pression fixés. Il permet le calcul du flux en sortie d'atmosphère avec une bonne approximation pour une atmosphère composée uniquement de  $CO_2$  et une atmosphère mixte  $H_2O + CO_2$ . L'écart relatif avec le modèle **4AOP** obtenu est respectivement de 1.1% et de 3.2% pour l'atmosphère  $CO_2$  et l'atmosphère mixte.

Après avoir discuté du paradoxe d'absorption du  $CO_2$  et de la pertinence du concept de température d'émission, on a montré en partie 2 que l'augmentation d'effet de serre lorsque le taux de  $CO_2$  double est essentiellement due à la baisse de la température d'émission. On a également vu que la méthode **k-distribution** permettait de simplifier grandement les calculs numériques car elle permet d'utiliser une expression analytique de l'épaisseur optique plus "lisse".

La partie 3 se concentrait sur l'introduction de la vapeur d'eau dans le modèle. On a vu les modifications que cela apportait au flux en sortie d'atmosphère avant d'étudier le processus de rétroaction positive de la vapeur d'eau sur la température terrestre. Les tendances obtenues pour la variation de flux sont correctes mais il aurait été plus intéressant de tenir compte de la réponse réelle de la température de l'atmosphère à un changement de température de surface de manière à retrouver la **loi de simpson**.

Dans le présent travail, on supposait les grandeurs thermodynamiques fixées pour pouvoir calculer les flux radiatifs correspondants. Par la suite, il serait intéressant de coupler ce modèle radiatif à un modèle thermodynamique afin qu'il y ait rétroaction des flux sur les variables de pression, de température et de concentration en eau.



## Références

- [1] Joseph Fourier. Remarques générales sur les températures du globe terrestre et des espaces planétaires. In *Annales de Chimie et de Physique*, volume 27, pages 136–167, 1824.
- [2] Giec. Changements climatiques 2014 : Rapport de synthèse. contribution des groupes de travail i, ii et iii au cinquième rapport d'évaluation du groupe d'experts intergouvernemental sur l'évolution du climat. 2014.
- [3] Jacques Lefrere. *Cours Sorbonne Université : Rayonnement atmosphérique*. <http://wwens.aero.jussieu.fr/lefrere/master/mu4sca07/cours/cours-rayonnement-teledetection.pdf>, 2021.
- [4] Raymond T Pierrehumbert. *Principles of planetary climate*. Cambridge University Press, 2010.
- [5] Jean-Louis Dufresne, Vincent Eymet, Cyril Crevoisier, and Jean-Yves Grandpeix. Greenhouse effect : the relative contributions of emission height and total absorption. *Journal of Climate*, 33(9) :3827–3844, 2020.
- [6] Mohamadou Diallo, Bernard Legras, Eric Ray, Andreas Engel, and Juan A Añel. Global distribution of co 2 in the upper troposphere and stratosphere. *Atmospheric chemistry and physics*, 17(6) :3861–3878, 2017.
- [7] Andrew A Lacis and Valdar Oinas. A description of the correlated k distribution method for modeling nongray gaseous absorption, thermal emission, and multiple scattering in vertically inhomogeneous atmospheres. *Journal of Geophysical Research : Atmospheres*, 96(D5) :9027–9063, 1991.
- [8] Nadir Jeevanjee, Nicholas Lutsko, and Daniel Koll. Simpson's law and the spectral cancellation of climate feedbacks. *Earth and Space Science Open Archive ESSOAr*, 2021.



## A Annexe A

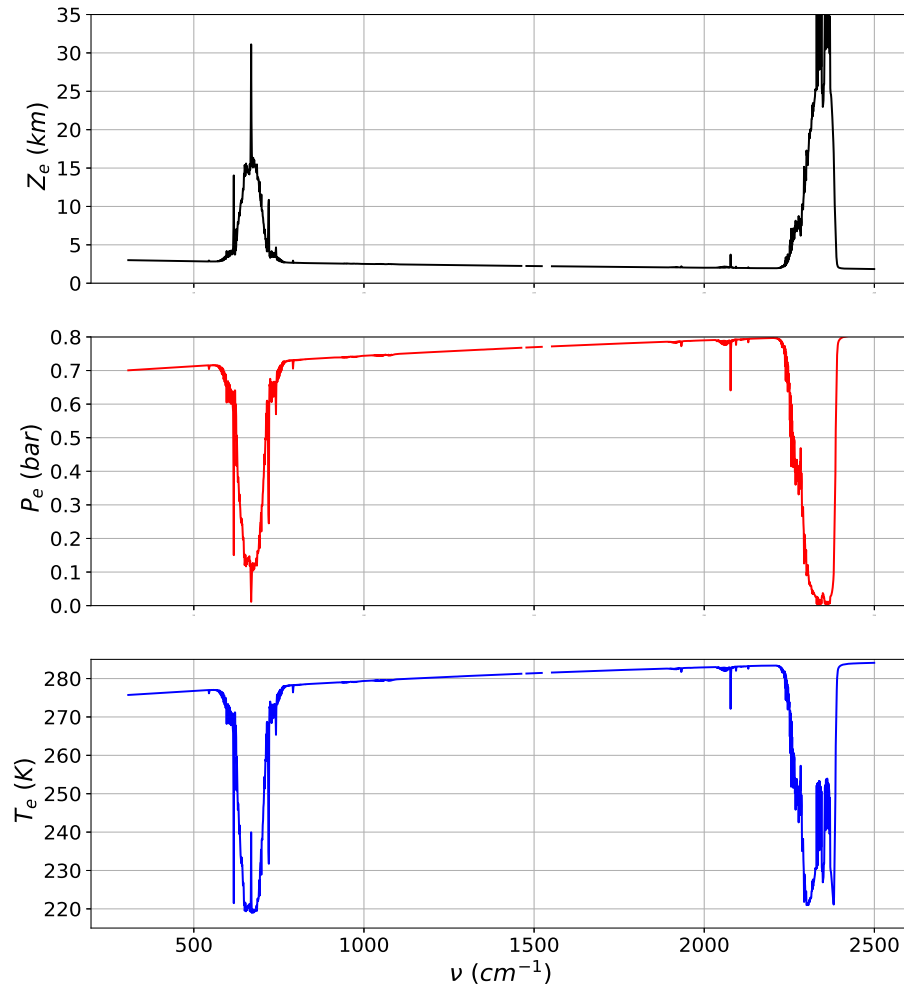


FIGURE 18 – Évolutions spectrales de l'altitude d'émission  $Z_{\nu,e}$  de la pression d'émission  $P_{\nu,e}$  et de la température d'émission  $T_{\nu,e}$  d'absorption pour une atmosphère uniquement composée de  $CO_2$ .

## B Annexe B

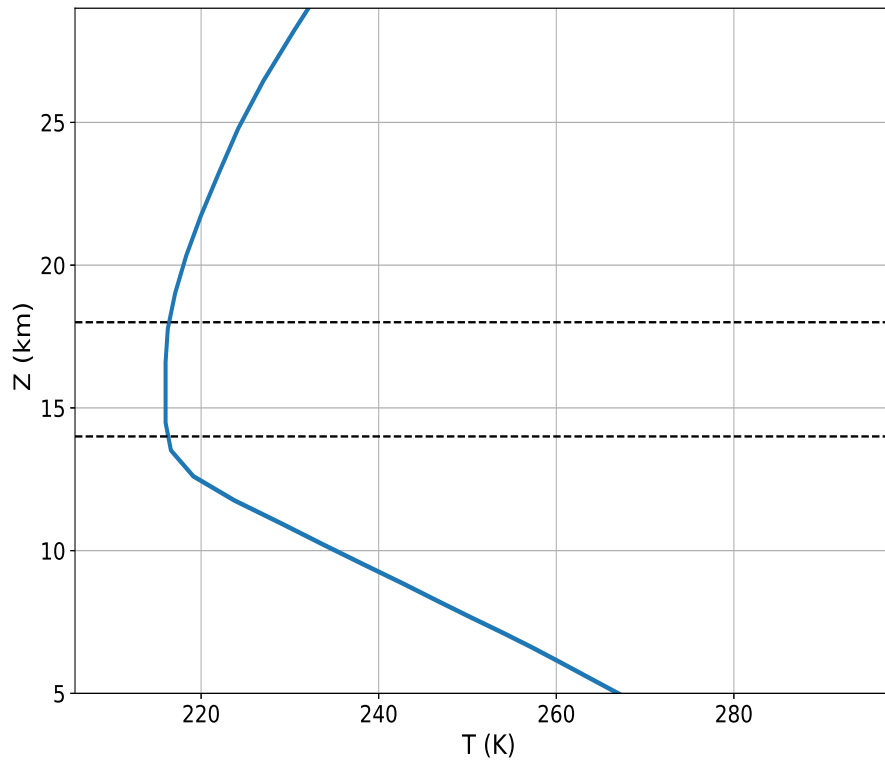


FIGURE 19 – Gradient de température utilisé tout le long du travail. Dans la **tropopause** (zone entre les pointillées) la température est quasi-constante avec l'altitude. En dessous, dans la **troposphère**, la température décroît avec l'altitude. Au-dessus, dans la **stratosphère**, la température croît avec l'altitude.

## C Annexe C

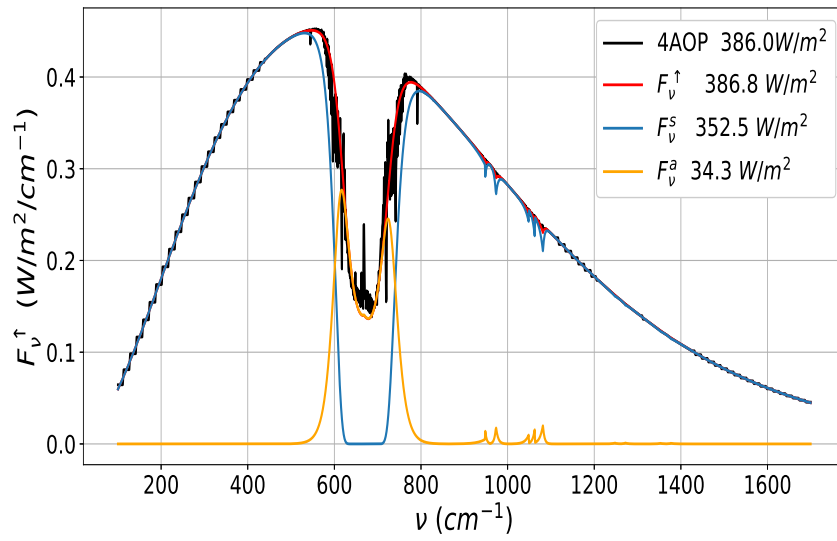


FIGURE 20 – Comparaison du flux  $F_\nu^\uparrow$  calculé avec la méthode k-distribution et du flux issu de **4AOP**. On a aussi représenté les contributions relatives du flux émis par la surface  $F_\nu^s$  et du flux atmosphérique  $F_\nu^a$ .

## D Annexe D

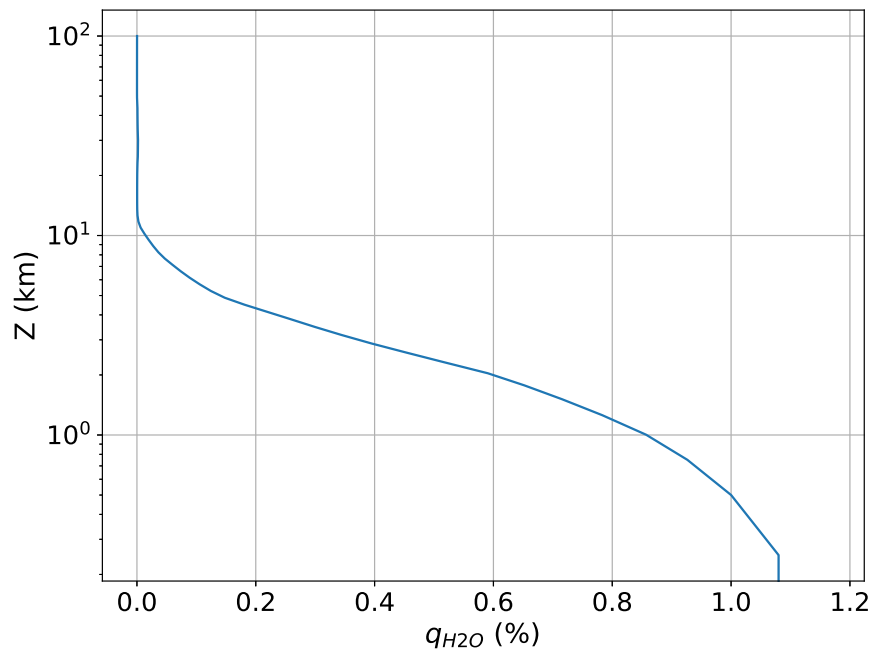


FIGURE 21 – Gradient de concentration en eau utilisé dans la partie 3. La fraction massique en eau  $q_{h_2o}$  est donnée en % et l'altitude est en échelle logarithmique.

## E Annexe E

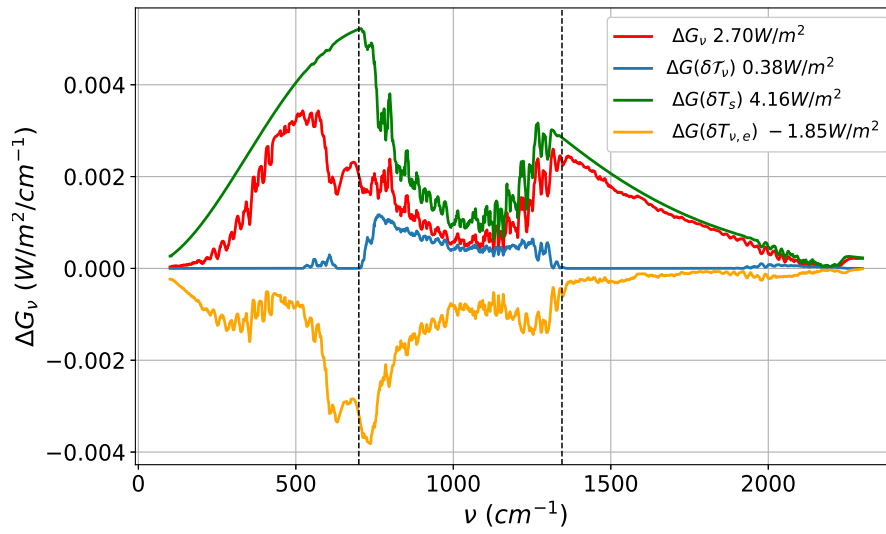


FIGURE 22 – Variation de l'effet de serre et de ses différentes contributions pour une atmosphère mixte ( $\text{H}_2\text{O} + \text{CO}_2$ ) lorsque la température de l'atmosphère et de la surface augmente de 1 degré.