

Profil vertical et thermodynamique de l'atmosphère

Jean-Louis Dufresne

jean-louis.dufresne@lmd.jussieu.fr

Laboratoire de Météorologie Dynamique (CNRS, UPMC, ENS, X)
Institut Pierre Simon Laplace.

Avec l'aide de mes collègues F. Codron et A. Spiga



École nationale supérieure des Mines de Rabat, 27 mars 2017

Équilibre hydrostatique

Parcelle d'air : volume d'air *suffisamment grand* pour pouvoir exprimer un équilibre thermodynamique, *suffisamment petit* pour pouvoir le supposer homogène.

On supposera les parcelles d'air *en équilibre mécanique* avec son environnement ($P_p = P_e$) mais pas forcément en équilibre thermique ($T_p \neq T_e$)

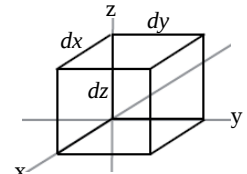
Bilan des forces verticales :

- Poids de module mg (avec $m = \rho dx dy dz$)
- Force de pression sur la face du dessous ($P(z) dx dy$) et du dessus ($P(z+dz) dx dy$)
- On néglige les forces de viscosités et l'accélération

$$-\rho g dx dy dz + P(z) dx dy - P(z + dz) dx dy = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g$$

$$\Delta P = P_2 - P_1 = -g \int_{z_1}^{z_2} \rho dz = -g \underbrace{\Delta M}_{\text{masse entre } z_1 \text{ et } z_2}$$



Un mélange de gaz parfaits

Air: mélange de gaz parfaits i

$$P_i V = n_i R^* T$$

$$P V = \left(\sum_i P_i \right) V = \left(\sum_i n_i \right) R^* T$$

Un mélange de gaz parfait est un gaz parfait

$$\frac{P}{\rho} = \frac{\sum_i n_i}{\sum_i n_i M_i} R^* T$$

$$P = \rho R T$$

V : volume

P_i : pression partiel de i

n_i : nombre de moles

$R^* = 8.31 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$

T : température

M_i : masse molaire de i

$\rho = m/V$

$$m = \left(\sum_i n_i M_i \right)$$

$$R = R^* / M$$

$$M = \frac{\sum_i n_i M_i}{\sum_i n_i}$$

Un mélange de gaz parfaits

Constituant	Masse molaire	Rapport de mélange
Azote (N_2)	28	78%
Oxygène (O_2)	32	21%
Argon (Ar)	40	0.93%
Vapeur d'eau (H_2O)	18	0-5%
Dioxyde de Carbone (CO_2)	44	380 ppmv
Néon (Ne)	20	18 ppmv
Hélium (He)	4	5 ppmv
Méthane (CH_4)	16	1.75 ppmv
Krypton (Kr)	84	1 ppmv
Hydrogène (H_2)	2	0.5 ppmv
Oxide nitreux (N_2O)	56	0.3 ppmv
Ozone (O_3)	48	0-0.1 ppmv

Principaux composants de l'air. Les gaz à effet de serre sont indiqués en gras.

La masse molaire de l'air est $M = 28.966 \text{ g mol}^{-1}$ ($M \approx 29 \text{ g mol}^{-1}$).

La constante de l'air sec est $R = 287 \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$.

Variation de la pression avec l'altitude

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \quad ; \quad P = \rho RT \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial z} = -g \frac{P}{RT}$$

Si P ne dépend que de z , on peut transformer les dérivées partielles en dérivées simples.

$$\frac{dP}{P} = -\frac{dz}{H(z)} \quad \text{avec} \quad H(z) = \frac{RT(z)}{g} \quad \text{H: échelle de hauteur}$$

Atmosphère isotherme

$$T(z) = T_c$$

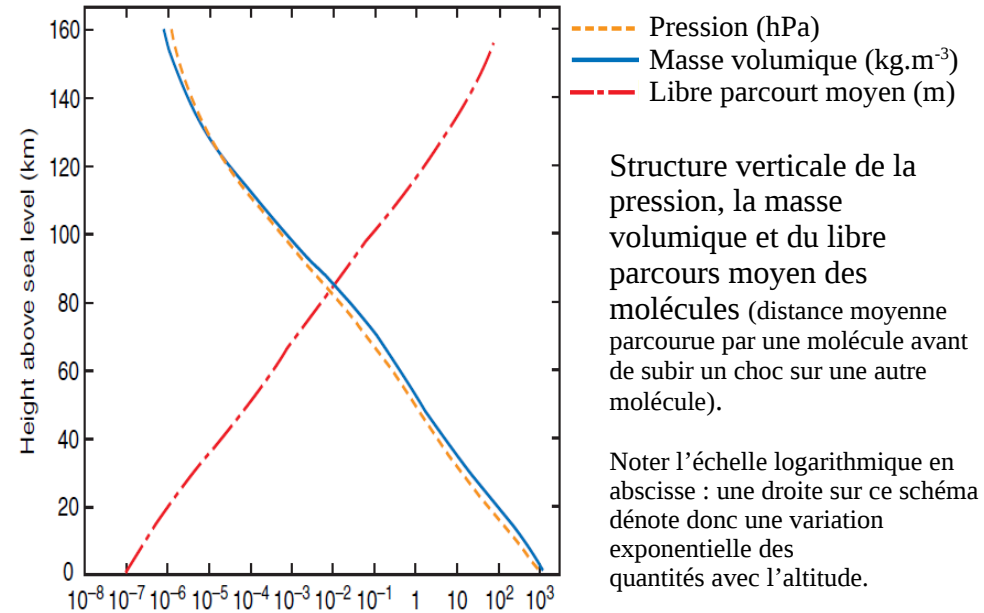
$$P(z) = P(0) e^{-z/H}$$

$$H = RT_c / g$$

Sur Terre, $H \approx 8$ km

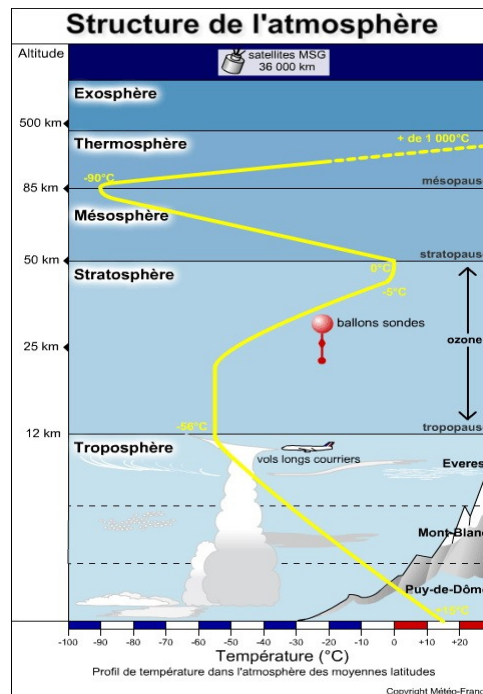
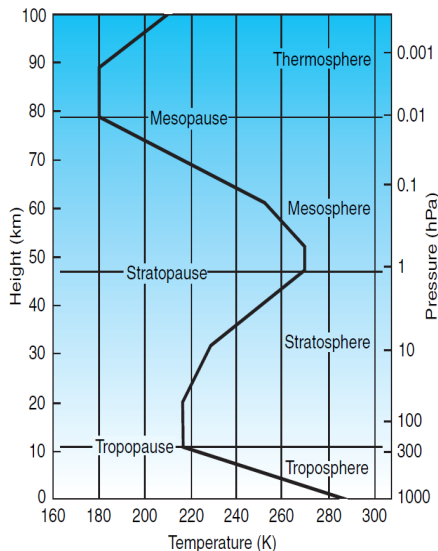
$$z = -H \ln\left(\frac{P(z)}{P(0)}\right)$$

Variation de la pression avec l'altitude



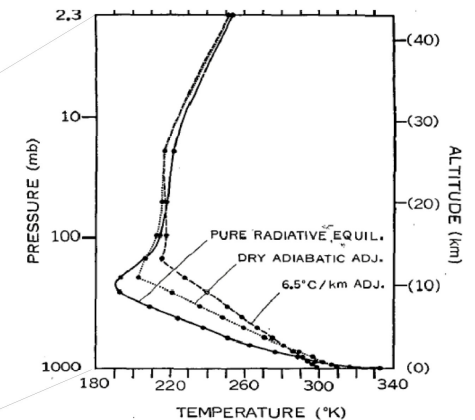
Variation de la température avec l'altitude

Représentation schématique du profil de température de l'atmosphère terrestre



Variation de la température avec l'altitude

Profil de température avec un équilibre purement radiatif ou avec aussi de la convection [Manabe and Strickler, 1964]



L'équilibre radiatif ne suffit pas pour expliquer le profil observé.

Thermodynamique de l'air sec

Énergie interne : $U = m \frac{\zeta RT}{2}$

ζ : nombre de degré de liberté des molécules
(5 pour un gaz diatomique)

$$\frac{dU}{dT} = m \frac{\zeta R}{2}$$

Premier principe:

$$dU = dW + dQ$$

Travail:

$$dW = -P dV$$

Chaleur massique à volume constant est défini par: $C_v = \frac{1}{m} \left(\frac{\partial Q}{\partial T} \right)_v$

Variation d'énergie thermique à volume constant:

$$dU = dQ = m C_v dT \Rightarrow C_v = \frac{1}{m} \frac{dU}{dT} = \frac{\zeta R}{2}$$

De façon générale, on a:

$$dU = m C_v dT$$

Thermodynamique de l'air sec

Enthalpie : $H = U + PV$

Lois des gaz parfaits: $d(PV) = m R dT$

$$dH = dU + d(PV) = m C_v dT + m R dT = m (C_v + R) dT$$

Chaleur massique à pression constante $C_p = \frac{1}{m} \left(\frac{\partial Q}{\partial T} \right)_p$

$$dH = dU + d(PV) = dQ + V dP$$

A pression constante: $dH = dQ = m C_p dT$

Comme: $dH = m (C_v + R) dT$

$$C_p = C_v + R = \frac{(\zeta + 2) R}{2}$$

$$dH = m C_p dT = dQ + V dP$$

Thermodynamique de l'air sec

Variation d'enthalpie: $dH = m C_p dT = dQ + V dP$

Par unité de masse: $d\dot{H} = C_p dT = d\dot{Q} + \frac{dP}{\rho}$

$$C_p dT = \frac{dP}{\rho} + d\dot{Q}$$

Variation énergie thermique = travail force de pression + terme diabatique

Expression du premier principe de la thermo très utile en météo.

Transformations adiabatiques

$$C_p dT = \frac{dP}{\rho} + d\dot{Q} \quad \text{Transformations adiabatiques : } d\dot{Q} = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \hookrightarrow dT = \frac{dP}{\rho C_p} \\ \text{gaz parfait} \hookrightarrow P = \rho R T \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{dT}{T} - \frac{R}{C_p} \frac{dP}{P} = 0$$

Après intégration:

$$T P^{-\kappa} = \text{constante} \quad \text{avec} \quad \kappa = R/C_p$$

Lorsqu'une parcelle subit une transformation adiabatique, sa température varie proportionnellement à $P^{-\kappa}$.

On définit la **température potentielle**: $\theta = T \left(\frac{P}{P_0} \right)^{-\kappa}$ P_0 : pression de référence 1000 hPa

θ a la dimension d'une température et est conservée au cours de transformations adiabatiques. θ est égale à la température d'une parcelle d'air ramenée de façon adiabatique à la pression P_0 .

Transformations adiabatiques

$$C_p dT = \frac{dP}{\rho} + d\dot{Q} \quad \text{Transformations adiabatiques : } d\dot{Q}=0$$

Equ. hydro-statique $\Rightarrow dP = -\rho g dz$

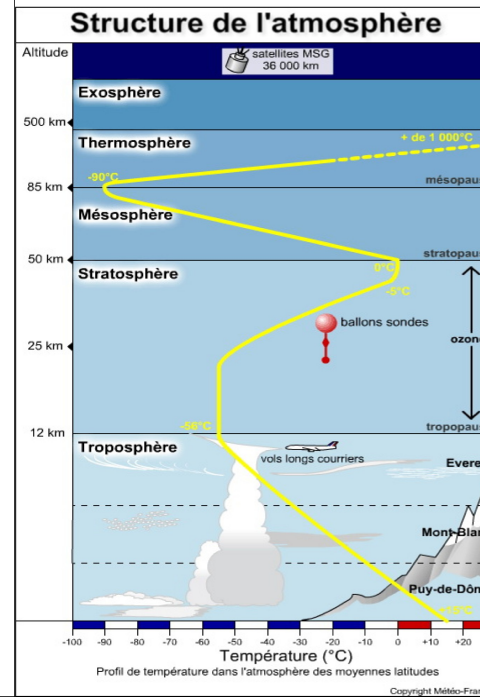
$$\left. \begin{aligned} & \hookrightarrow dT = \frac{dP}{\rho C_p} \\ & \Rightarrow dP = -\rho g dz \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\frac{dT}{dz} = -\frac{g}{C_p} = \Gamma_a}$$

Γ_a est le **gradient vertical adiabatique** de la température.
 $\Gamma_a \approx -10^{-2} \text{ K.m}^{-1}$. Une parcelle d'air se déplace de façon adiabatique se refroidit de 10K par km d'élévation.

On peut montrer que le gradient vertical de la **température potentielle** s'écrit:

$$\boxed{\frac{d\theta}{dz} = \left(\frac{dT}{dz} - \Gamma_a \right) \left(\frac{P}{P_0} \right)^{-\kappa}}$$

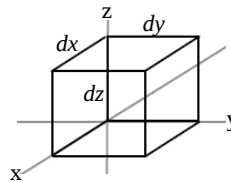
Variation de la température avec l'altitude



Le profil de température dans la troposphère diminue bien de façon quasi-linéaire avec l'altitude mais de moins de -10K/km... On verra pourquoi

Forces de flottabilité

On considère une parcelle d'air p dans un air environnement e . On néglige les forces de viscosité.



Bilan des forces de la parcelle : $F_p = -m_p g - \frac{\partial P}{\partial z} dx dy dz$

Bilan des forces par unité de masse : $\Rightarrow F_p/m_p = \overset{\circ}{F}_p = -g - \frac{1}{\rho_p} \frac{\partial P}{\partial z}$
 ρ_p : masse volumique de la parcelle

Équilibre hydrostatique : $\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho_e g \Rightarrow \overset{\circ}{F}_p = g \left(\frac{\rho_e}{\rho_p} - 1 \right)$
 ρ_e : masse volumique de l'environnement

Lois des gaz parfaits : $\rho = \frac{P}{RT} \Rightarrow \overset{\circ}{F}_p = g \left(\frac{T_p}{T_e} - 1 \right)$

Forces de flottabilité

En supposant qu'à l'altitude z_0 $T_p(z_0) = T_e(z_0)$, la force de flottabilité par unité de masse pour un petit déplacement vertical dz peut s'écrire (cf. TD) :

$$\boxed{\overset{\circ}{F}_p \approx g \left(\frac{\Gamma_a - \Gamma_e}{T_e} \right) dz}$$

Γ_e , gradient de l'air environnement
 Γ_a , gradient adiabatique

Ou encore, en utilisant la température potentielle θ :

$$\boxed{\overset{\circ}{F}_p = -\frac{g}{\theta} \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right) dz}$$

