Équations fondamentales en coordonnées d'altitude et de pression

Dans ce qui suit, z^* est l'altitude géométrique (altitude au sens courant) et z est l'altitude log-pression telle que

$$\frac{\mathrm{d}z}{H} = -\frac{\mathrm{d}P}{P}$$

avec H une constante appelée échelle de hauteur. La coordonnée d'altitude log-pression z est similaire à la coordonnée pression P et sa dérivée partielle s'exprime selon l'identité suivante qui découle de la définition

$$\frac{\partial}{\partial z} \equiv \frac{P}{H}\frac{\partial}{\partial P}$$

L'atmosphère est supposée respecter l'approximation hydrostatique formulée comme suit

$$\frac{\partial P}{\partial z^*} = -\rho\, g$$

1 Préambule mathématique

Les sections suivantes font usage d'identités mathématiques que l'on démontre ici en introduction.

Changement de coordonnée verticale (*chain rule*) Montrer la loi générale de changement de coordonnée verticale s pour tout champ physique $\mathcal{F}$ de coordonnée horizontale x et de coordonnée verticale initiale z

$$\left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}\right]_s = \left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}\right]_z + \left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z}\right]_x \left[\frac{\partial z}{\partial x}\right]_s$$

Dérivée d'un élément de volume Montrer la relation suivante permettant d'écrire la dérivée temporelle lagrangienne d'un élément de volume matériel (parcelle) $\delta V = \delta x\,\delta y\,\delta z^*$ en fonction de la divergence du champ de vitesse $\vec{v}$.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta V = \delta V\,\vec{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\vec{v}$$

2 Exploration du géopotentiel et ses dérivées

Le géopotentiel Φ est défini à partir de l'altitude géométrique comme l'énergie potentielle massique selon $\boxed{\mathrm{d}\Phi = g\,\mathrm{d}z^*}$

1. Montrer que les forces horizontales de pression en coordonnées altitude z^* s'écrivent simplement comme le gradient horizontal du géopotentiel Φ en coordonnées log-pression z.

$$\boxed{\vec{F}_{\mathrm{p}} = \frac{-1}{\rho}\vec{\boldsymbol{\nabla}}_{\mathrm{H}^*}P = -\vec{\boldsymbol{\nabla}}_{\mathrm{H}}\Phi} \qquad \text{avec la notation} \qquad \vec{\boldsymbol{\nabla}}_{\mathrm{H}}\mathcal{F} \equiv \left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}\right]_z \vec{x} + \left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}\right]_z \vec{y}$$

2. Montrer que la relation hydrostatique – équilibre entre force verticale de pression et force de gravité – s'écrit comme suit en coordonnée log-pression z.

$$\boxed{\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{R\,T}{H}}$$

3. Argumenter les propriétés avantageuses du géopotentiel Φ révélées par les deux questions précédentes.

3 Conservation de la masse

Démontrer que la conservation de la masse $\delta M = \rho\,\delta V = \rho\,\delta x\,\delta y\,\delta z^*$ d'un élément de volume matériel (parcelle) conduit aux relations de conservation suivantes

1. en coordonnées d'altitude z^*
$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho\,\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \vec{v} = 0$$
2. en coordonnées log-pression z
$$\boxed{\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \vec{v} = \frac{w}{H}} \qquad \text{avec} \qquad w = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

Expliquer en terme concret la signification de la relation encadrée et son application dans le cas hydrostatique où $\vec{\boldsymbol{\nabla}} \equiv \vec{\boldsymbol{\nabla}}_{\text{H}}$.

4 Équation de l'énergie

Soit une parcelle d'air, de volume δV tel que défini précédemment, de capacité calorifique massique à pression constante c_p (valant par exemple sur Terre 1004 J K^{-1} kg^{-1}). Cette parcelle reçoit des transferts thermiques diabatiques en raison de processus radiatifs, de conduction, de changements de phase ; le taux de chauffage résultant est noté $\mathcal{J}$ (unité: J s^{-1} kg^{-1}). La température potentielle θ de la parcelle correspond à la température T corrigée des effets de compression/détente adiabatique par normalisation à un niveau pression de référence P_{ref}. Elle est définie telle que

$$T\,P^{-\kappa} = \theta\,P_{\text{ref}}^{-\kappa} \qquad \text{avec} \qquad \kappa = R/c_p$$

La température potentielle θ est par construction conservée dans les mouvements adiabatiques (par exemple, en situation de mélange convectif atmosphérique).

1. Montrer que l'application du premier principe de la thermodynamique en coordonnées géométriques (x, y, z^*) à la parcelle conduit à
$$c_p\,\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} + \mathcal{J}$$
2. Démontrer la relation différentielle suivante entre température potentielle θ et température T
$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\theta} = \frac{1}{T}\left[\mathrm{d}T - \frac{1}{c_p}\frac{\mathrm{d}P}{\rho}\right]$$
Déduire alors de la relation 1 la relation suivante
$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathcal{J}}{c_p}\frac{\theta}{T}}$$
Expliquer pourquoi elle éclaire un lien profond entre température potentielle θ et entropie – les surfaces d'égale température potentielle étant d'ailleurs appelées isentropes.
3. Reprendre la relation 1 et démontrer qu'elle peut s'écrire en coordonnées log-pression z comme suit
$$\boxed{\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + \frac{\kappa\,w}{H}\,T = \frac{\mathcal{J}}{c_p}}$$
Interpréter physiquement cette équation
   a) pour une transformation adiabatique
   b) pour une situation stationnaire
4. La fréquence de Brunt-Väisälä N^2 se définit comme suit en coordonnées log-pression z
$$N^2 = \frac{g}{\theta_s}\frac{\partial\theta}{\partial z}$$
   a) Montrer que $N^2 = N^{*2}\,T/T_{\text{s}}$ (où T_{s} est la température constante sous-jacente au choix de l'échelle de hauteur H telle que $R\,T_{\text{s}} = g\,H$ et N^{*2} est la fréquence de Brunt-Väisälä en coordonnées altitude z^*).
   b) Obtenir la relation suivante entre fréquence de Brunt-Väisälä N^2 et géopotentiel Φ
$$\boxed{N^2 = \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} + \frac{\kappa}{H}\frac{\partial\Phi}{\partial z}}$$