

# Dynamique Atmosphérique 1

## Vent à l'équilibre

### 1 Introduction

On s'intéresse dans ce chapitre à l'origine des mouvements horizontaux (les vents) de l'atmosphère. On étudie pour cela les différentes forces horizontales en présence, puis comment leur équilibre va déterminer le mouvement observé.

#### 1.1 Système de coordonnées, repère local

La position d'un point M de l'atmosphère sera représentée dans un système de coordonnées sphériques (figure 1) par sa latitude  $\varphi$ , sa longitude  $\lambda$ , et son altitude par rapport au niveau de la mer  $z$ . On note également  $\vec{\Omega}$  le vecteur dirigé suivant l'axe des pôles de norme  $\Omega$  la vitesse angulaire de rotation de la Terre. Le point H est la projection de M sur l'axe des pôles,  $r$  la distance HM et  $a$  le rayon moyen de la Terre. Le vecteur unitaire dans la direction  $\overrightarrow{HM}$  est noté  $\hat{e}_r = \overrightarrow{HM}/r$ .

On distingue deux référentiels pour l'étude des mouvements de l'air :

- Un référentiel *fixe* orienté suivant les directions de trois étoiles. La vitesse *absolue* dans ce référentiel d'un point M à la surface de la Terre inclut son mouvement circulaire autour de l'axe des pôles dû à la rotation de la Terre. Ce référentiel peut être considéré comme galiléen.
- Un référentiel *tournant* lié à la Terre, en rotation autour de l'axe des pôles avec la vitesse angulaire  $\Omega$  de rotation de la Terre. La vitesse *relative* est mesurée par rapport à la surface de la Terre.

Pour les déplacements relatifs (par rapport à la surface de la Terre), on utilisera le repère local direct  $(M, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$  où  $\hat{i}$  et  $\hat{j}$  sont les vecteurs unitaires dirigés vers l'est et le nord, et  $\hat{k}$  est dirigé suivant la verticale (perpendiculairement à la surface) vers le haut. Pour des petits déplacements qui ne sont pas d'échelle planétaire, on utilisera également des distances horizontales vers l'est et le nord

$$\begin{aligned} dx &= a d\lambda \cos \varphi \\ dy &= a d\varphi \end{aligned}$$

Les composantes de la vitesse relative dans ce repère sont notées  $(u, v, w)$ . La composante horizontale de la vitesse, qui domine les mouvements, sera donc  $\vec{v}_h = u\hat{i} + v\hat{j}$ , et sa composante verticale  $w\hat{k}$ .

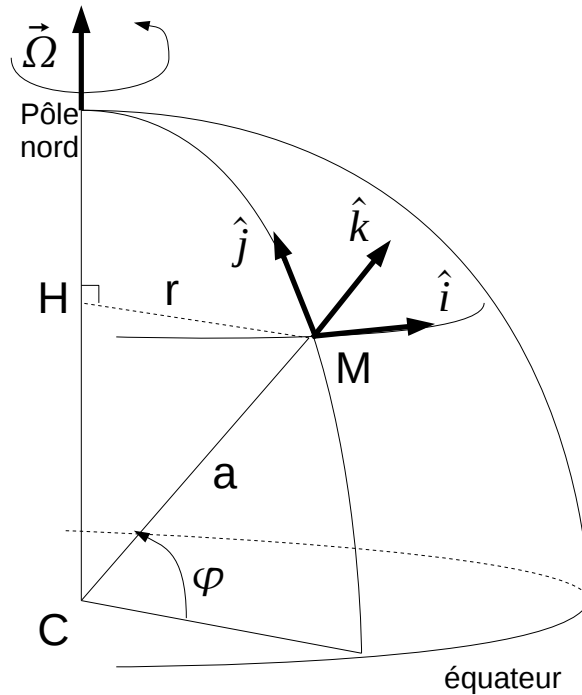


FIGURE 1 – Schéma du système de coordonnées et du repère utilisés.

## 2 Équation du mouvement horizontal

L'équation de base pour le mouvement de masses d'air est la relation fondamentale de la dynamique  $\Sigma \vec{F} = m \vec{a}$ . Cette relation est cependant valable dans un référentiel galiléen, alors qu'on cherche plutôt à connaître les mouvements par rapport à la surface de la Terre, qui est en rotation autour de l'axe des pôles. On va donc dans un premier temps transposer cette relation dans le référentiel tournant habituel, puis étudier les principales forces horizontales. On utilisera dans la suite des forces *massiques*, homogènes à l'accélération.

### 2.1 Forces apparentes

On va chercher à exprimer l'accélération dans le référentiel tournant (qu'on veut connaître) en fonction de l'accélération dans le référentiel fixe (qui est égale à la somme des forces).

### 2.1.1 Dérivation mathématique

La relation entre la dérivée temporelle d'un vecteur  $\vec{X}$  dans le référentiel fixe (*absolue, a*) et celle dans le référentiel tournant (*relative, r*) s'écrit

$$\frac{d\vec{X}}{dt}_{|a} = \frac{d\vec{X}}{dt}_{|r} + \vec{\Omega} \wedge \vec{X} \quad (1)$$

En appliquant au vecteur  $\overrightarrow{CM}$ , avec  $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{CM}}{dt}$ , on a :

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{CM}$$

Le terme  $\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{CM}$  est la vitesse d'un point fixe par rapport au sol ( $\vec{v}_r = \vec{0}$ ), il est appelé *vitesse d'entraînement*  $\vec{v}_e$ . En dérivant à nouveau  $\vec{v}_a$  en utilisant (1), on obtient :

$$\vec{a}_a = \left( \frac{d\vec{v}_r}{dt}_{|r} + \vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r \right) + \vec{\Omega} \wedge (\vec{v}_r + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{CM})$$

soit en regroupant et avec

$$\begin{aligned} \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{CM}) &= -\Omega^2 \overrightarrow{HM} \\ \vec{a}_a = \Sigma \vec{F} &= \vec{a}_r + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r - \Omega^2 \overrightarrow{HM} \end{aligned} \quad (2)$$

Le premier terme est l'*accélération relative*, le deuxième l'*accélération de Coriolis*, le troisième est l'*accélération d'entraînement*  $\vec{a}_e$ . On va maintenant chercher à interpréter ces différents termes dans le cadre du mouvement d'un point à la surface de la Terre.

### 2.1.2 Pesanteur et équilibre d'un point posé sur le sol

On considère un point M immobile par rapport à la surface de la Terre. Les forces (massiques) subies par M sont la force de gravitation  $\vec{G}$ , dirigée vers le centre de la Terre, et  $\vec{R}$  la réaction du sol dirigée perpendiculairement à la surface (figure 2).

Dans le référentiel fixe, l'accélération de M est celle du mouvement circulaire uniforme :

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e = -\Omega^2 r \hat{e}_r$$

aussi appelée accélération d'entraînement. On doit donc avoir

$$\vec{a}_e = -\Omega^2 r \hat{e}_r = \vec{G} + \vec{R}$$

C'est impossible si la Terre est sphérique (sauf au pôle et à l'équateur) : on aurait alors  $\vec{R}$  et  $\vec{G}$  colinéaires mais pas dans la direction de  $\vec{a}_e$ . La Terre a en fait une forme aplatie, où la surface n'est pas perpendiculaire à  $\vec{G}$ . En posant  $\vec{g} = \vec{G} - \vec{a}_e$ , l'équilibre devient :

$$\vec{g} + \vec{R} = \vec{0}$$

On a donc une gravité apparente  $\vec{g}$  dirigée localement vers le bas (parallèle à  $\vec{R}$  donc perpendiculaire à la surface) mais pas exactement vers le centre de la Terre. La gravité réelle  $\vec{G}$  a elle une faible composante horizontale.

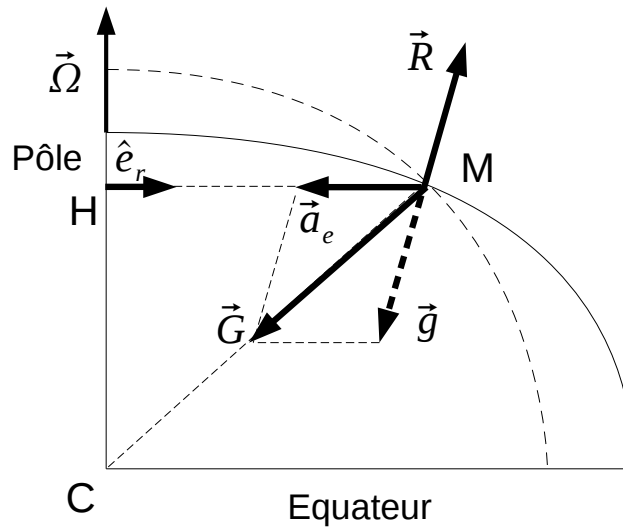


FIGURE 2 – Équilibre d'un point posé au sol. La forme réelle de la Terre (exagérée) est en trait continu, les pointillés montrent un sphère parfaite.

### 2.1.3 Force de Coriolis : mouvement vers l'est

On considère maintenant un point M en mouvement par rapport à la surface de la Terre. On rappelle que pour un mouvement circulaire à la vitesse  $V$ , on doit avoir une accélération normale égale à  $V^2/R$  dirigée vers le centre du cercle.

On suppose que les forces réelles s'exerçant sur M sont les mêmes que pour un point fixe :

$$\Sigma \vec{F} = \vec{G} + \vec{R} = \vec{a}_e$$

Pour un mouvement relatif vers l'est, la vitesse absolue  $V_a$  est supérieure en module à la vitesse d'entraînement, et la somme des forces est insuffisante pour compenser l'accélération normale  $V_a^2/r$ . La parcelle va donc s'éloigner de l'axe de rotation (figure 3). Elle va au contraire se rapprocher pour un mouvement vers l'ouest.

La composante de la vitesse relative vers l'est (suivant  $\hat{i}$ ) est  $u$ , et celle dans la direction  $\vec{HM}$  est  $\dot{r}$  (de manière générale, on note  $\dot{x} = dx/dt$ ). La vitesse absolue de M vers l'est est  $u_a = \Omega r + u$ . La relation  $\vec{a} = \Sigma \vec{F}$  s'écrit alors dans la direction  $\hat{e}_r$  :

$$-\frac{(\Omega r + u)^2}{r} + \ddot{r} = a_e = -\Omega^2 r$$

soit en développant :

$$\ddot{r} = u\left(2\Omega + \frac{u}{r}\right)$$

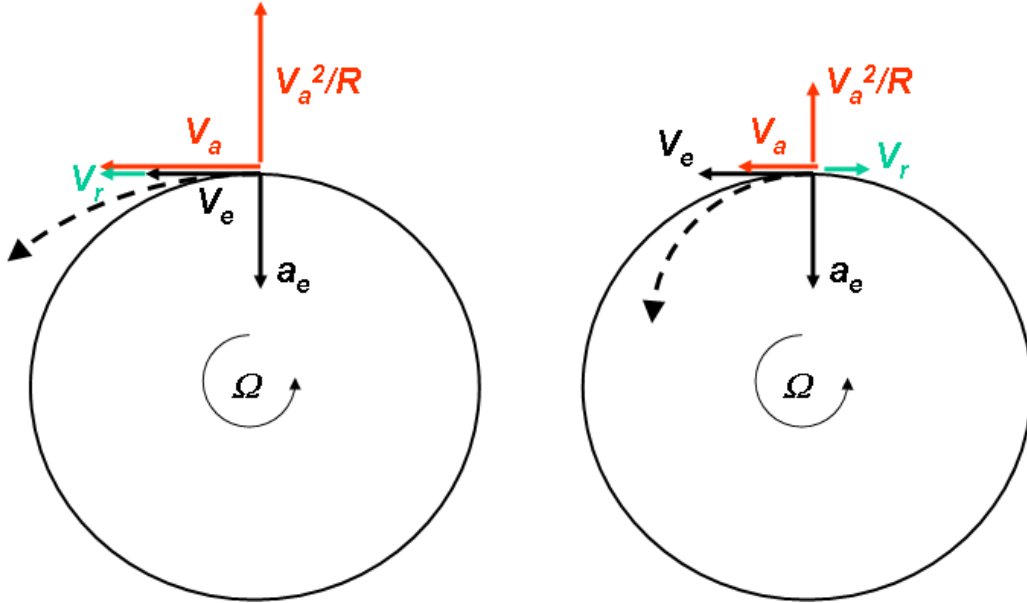


FIGURE 3 – Déviation d’une parcelle ayant une vitesse relative initiale non nulle vers l’est (gauche) et l’ouest (droite). Un plan parallèle à l’équateur est représenté, vu depuis le pôle nord, l’axe de rotation est au centre. Les vitesse et accélération d’entraînement (égale à la somme des forces) sont en noir, la vitesse absolue en rouge. La trajectoire future de la parcelle est en pointillés.

Pour trouver l’accélération relative dans la direction sud-nord, on projette  $\hat{e}_r$  sur  $\hat{j}$ :  $\dot{v} = -\dot{r} \sin \varphi$ .

$$\dot{v} = -u \sin \varphi \cdot \left( 2\Omega + \frac{u}{r} \right)$$

M est bien dévié vers le sud ( $\dot{v} < 0$ ) pour un déplacement relatif vers l’est ( $u > 0$ ).

#### 2.1.4 Force de Coriolis : mouvement vers le nord

On considère maintenant un mouvement de M dans la direction sud-nord (en fait, c’est le mouvement vers l’axe des pôles qui est important). La somme des forces étant dirigée vers H, M conserve son moment cinétique par rapport à l’axe des pôles  $\sigma = u_a r = (\Omega r + u)r^1$ . Une parcelle initialement au repos (donc  $u_a = u_e = \Omega r$ ) qui se déplace vers le nord (donc vers l’axe des pôles) va voir sa vitesse absolue augmenter par conservation du moment cinétique :  $r$  diminue, donc  $u_a$  augmente. Dans le même temps, la vitesse d’entraînement locale diminue ( $u_e = \Omega r$ ). La parcelle va donc acquérir une vitesse relative vers l’est  $u > 0$  (figure 4).

1. La conservation de  $\sigma$  implique des variations de l’énergie cinétique  $(\Omega r + u)^2$ . C’est le travail de  $\vec{G}$  qui en est l’origine. En effet, une parcelle se déplaçant vers le nord à la surface se rapproche légèrement du centre de la Terre à cause de sa forme aplatie.

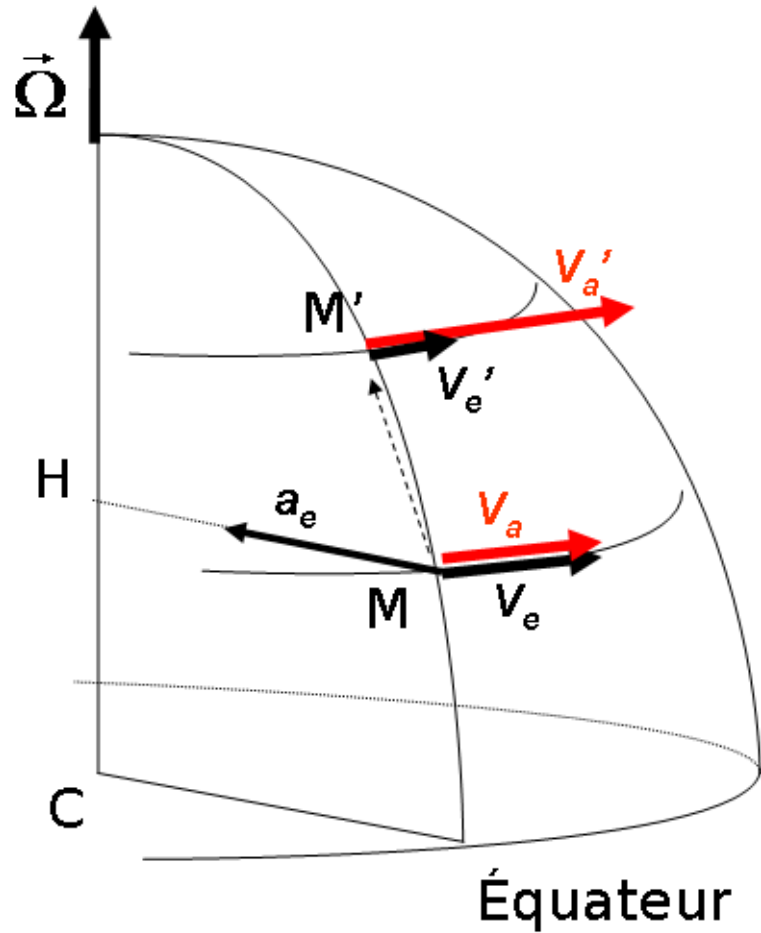


FIGURE 4 – Déviation d’une parcelle se déplaçant vers le nord. Instant initial : vitesses d’entraînement  $V_e$  et absolue  $V_a$  égales. Instant final : vitesse d’entraînement locale  $V'_e$  et absolue  $V'_a$  augmentée par conservation du moment cinétique  $rV$ .

On a

$$\frac{d\sigma}{dt} = 0 = \dot{r}(\Omega r + u) + r(\Omega \dot{r} + \dot{u})$$

soit

$$\dot{u} = -\dot{r}\left(2\Omega + \frac{u}{r}\right)$$

Pour un mouvement sud-nord, la vitesse est  $v = a\dot{\varphi}$ . D’autre part  $r = a \cos \varphi$  donc  $\dot{r} = -a\dot{\varphi} \sin \varphi = -v \sin \varphi$ . L’équation donne alors

$$\dot{u} = v \sin \varphi \cdot \left(2\Omega + \frac{u}{r}\right)$$

M est bien dévié vers l’est pour un déplacement vers le nord.

On a donc finalement pour des mouvements relatifs horizontaux à la vitesse  $\vec{v}_r$  une force horizontale apparente orthogonale au mouvement (sur la droite dans l'hémisphère nord où  $\sin \varphi > 0$ ) de module  $2\Omega \sin \varphi V$ . Cette force est appelée *force de Coriolis*<sup>2</sup>  $\vec{F}_c$ .

## 2.2 Forces de pression

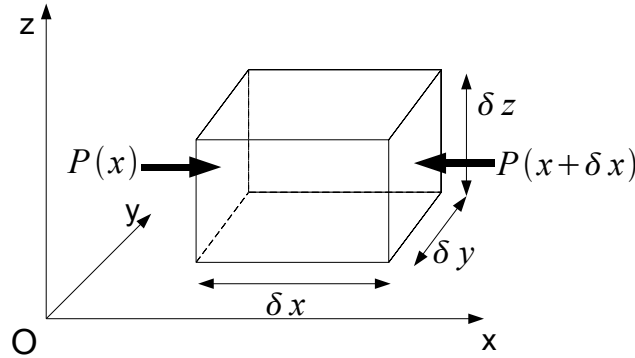


FIGURE 5 – Forces de pression (suivant (Ox)) s'exerçant sur une parcelle.

La force de pression s'exerçant sur une surface  $S$  est normale à cette surface et sa norme vaut  $pS$ . Pour une parcelle d'air de volume  $\delta V = \delta x \delta y \delta z$  (figure 5), la force de pression totale dans la direction (Ox) vaut donc

$$F_{p_x}^* = p(x) \cdot \delta y \delta z - p(x + \delta x) \cdot \delta y \delta z \simeq \left( -\frac{\partial p}{\partial x} \delta x \right) \delta y \delta z$$

La force de pression *massique* est donc

$$F_{p_x} = F_{p_x}^* / (\rho \delta x \delta y \delta z) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

On peut faire un calcul identique dans les directions (Oy) et (Oz), finalement la force de pression massique vaut :

$$\vec{F}_p = -\frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial p}{\partial z} \end{pmatrix} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p$$

La composante horizontale de la force de pression est opposée au gradient horizontal. Elle est donc :

2. Le terme en  $u/r$  apparaissant dans les formules précédentes est une vitesse angulaire due à la vitesse relative  $u$ , en plus de la rotation de la Terre. C'est un terme petit devant  $2\Omega$  sur Terre, mais pas sur Vénus par exemple.

- Dirigée des hautes vers les basses pressions, perpendiculairement aux isobares
- Inversement proportionnelle à l'écartement des isobares

## 2.2.1 Formulation en géopotentiel

L'équilibre hydrostatique fait que la pression décroît toujours avec l'altitude. Une pression localement élevée doit donc correspondre à une altitude élevée des surfaces isobares.

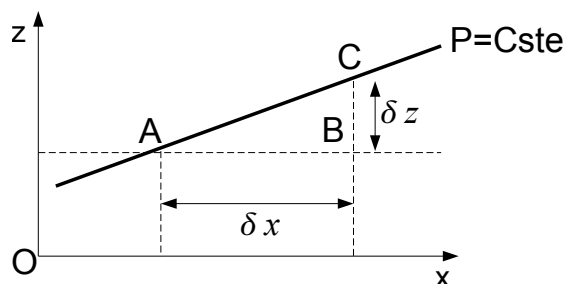


FIGURE 6 – Équivalence entre écarts de pression et d'altitude : les points A et B sont à la même altitude, A et C à la même pression. La pression en B est donc supérieure à celle en C.

Sur la figure 6, la force de pression horizontale dans la direction (Ox) est

$$F_{p_x} = -\frac{1}{\rho} \frac{p_B - p_A}{\delta x}$$

Or A et C sont à la même pression, on a donc

$$F_{p_x} = -\frac{1}{\rho} \frac{p_B - p_C}{\delta x} = -\frac{1}{\rho} \frac{p_B - p_C}{\delta z} \cdot \frac{\delta z}{\delta x}$$

En utilisant

$$\frac{p_B - p_C}{\delta z} = -\frac{\partial p}{\partial z} = \rho g$$

et le fait que la pente soit celle de la surface isobare, on trouve

$$F_{p_x} = -g \left( \frac{\delta z}{\delta x} \right)_p$$

On aurait une relation équivalente pour la direction (Oy), la force de pression horizontale vaut donc finalement

$$\vec{F}_p = -\frac{1}{\rho} \vec{\text{grad}}_z(p) = -g \vec{\text{grad}}_p(z) \quad (3)$$

On utilise plutôt le gradient de pression horizontal avec la pression au niveau de la mer, et le gradient isobare de l'altitude  $z$  ou du *géopotentiel*  $gz$  dans l'atmosphère libre. Sur une carte d'une surface isobare, les lignes à  $z$  constant sont des *isohypses*. La force de pression horizontale est donc dirigée des hautes vers les basses valeurs de  $z$  à *pression constante*, perpendiculairement aux isohypses.



## 2.2.2 Origine des gradients de pression

Une conséquence de l'équilibre hydrostatique est que la pression à une altitude  $z$  est proportionnelle à la masse de la colonne d'air située au dessus de  $z$ . Une diminution (augmentation) de cette masse due aux mouvements d'air horizontaux change donc la pression en dessous, en particulier à la surface.

D'autre part, pour une masse d'air totale de la colonne – donc une pression de surface – uniforme horizontalement, des écarts de température horizontaux peuvent créer des gradients de pression en changeant la répartition verticale de cette masse. L'équation hypsométrique donne l'épaisseur d'une colonne d'air de masse constante entre deux niveaux de pression  $p_1$  et  $p_2$  :

$$g(z_2 - z_1) = R \langle T \rangle_1^2 \ln \frac{p_1}{p_2} \quad (4)$$

La différence entre les forces de pressions aux niveaux 1 et 2 sera donc :

$$\vec{F}_p^2 - \vec{F}_p^1 = -R \overrightarrow{\text{grad}} \langle T \rangle_1^2 \cdot \ln \frac{p_1}{p_2}$$

## 3 Analyse en ordre de grandeur

L'équation complète de la quantité de mouvement s'écrit finalement (en négligeant la friction) :

$$\frac{d\vec{v}_r}{dt} + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r = \vec{g} - \frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} p \quad (5)$$

Où on a inclus l'accélération d'entraînement dans  $\vec{g}$ . L'accélération de Coriolis peut également être interprétée comme une force apparente  $\vec{F}_c = -2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r$ . On cherche maintenant l'ordre de grandeur de ces différents termes pour voir ceux qui seront dominants pour les phénomènes d'intérêt météorologique.

### 3.1 Échelles caractéristiques

On définit des échelles caractéristiques du mouvement étudié. Pour simplifier, on choisit des échelles qui sont des puissances de 10, qui sont résumées dans le tableau 1.

**longueur** les échelles de longueur sont notées  $L$  sur l'horizontale, et  $H$  sur la verticale.

Pour des mouvements qui s'étendent sur la hauteur de la troposphère,  $H \sim 10$  km.  $L$  peut varier beaucoup, mais l'échelle dite *synoptique*  $L \sim 1000$  km, qui est celle des perturbations des latitudes moyennes, est d'un intérêt particulier. La dernière échelle de longueur est celle du rayon de la Terre  $a$ , qui est de l'ordre de 10 000 km, on parle aussi d'échelle *planétaire*.

**vitesse** les échelles de vitesse horizontale (vent) et verticale sont notées  $U$  et  $W$ . On a typiquement  $U \sim 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  dans l'atmosphère. Le rapport d'aspect du mouvement impose d'autre part que  $W \leq UH/L$ .

Grandeur	$L$	$H$	$U$	$W$	$f$	$\beta$	$\delta p/\bar{\rho}$
Valeur	$10^6$ m	$10^4$ m	$10$ m·s <sup>-1</sup>	$0,1$ m·s <sup>-1</sup>	$10^{-4}$ s <sup>-1</sup>	$10^{-11}$ m <sup>-1</sup> ·s <sup>-1</sup>	$10^3$ m <sup>2</sup> ·s <sup>-2</sup>

TABLE 1 – Résumé des principales échelles utilisées pour l'étude de l'atmosphère aux latitudes moyennes.

Équation	$dw/dt$	$-2\Omega u \cos \phi$	$-(u^2 + v^2)/a$	$= -\rho^{-1} \partial p/\partial z$	$-g$
Échelle	$UW/L$	$fU$	$U^2/a$	$p_0/(\rho_0 H)$	$g$
Valeur (m·s <sup>-2</sup> )	$10^{-7}$	$10^{-3}$	$10^{-5}$	$10$	$10$

TABLE 2 – Analyse d'échelle de l'équation du mouvement vertical (avec  $L = 1000$  km et  $W = 1$  cm·s<sup>-1</sup>).

**temps** L'échelle de durée du mouvement est construite à partir de celles de vitesse et de longueur :  $T = L/U$ . L'autre échelle de temps est celle liée à la rotation de la Terre  $f = 2\Omega \sin \phi$ , qui apparaît dans le terme de Coriolis (voir ci-dessous).

**gradient de pression** Les variations des variables thermodynamiques  $p, T, \rho$  sur la verticale sont celles des profils moyens (figures ??,??). Les variations horizontales à l'échelle synoptique sont de l'ordre de 1% de la valeur moyenne. On prendra donc  $\delta p/\rho \sim p_0/100 = 1000$  m<sup>2</sup>·s<sup>-2</sup>.

### 3.2 Mouvement vertical

L'équation du mouvement (5) en coordonnées sphériques projetée sur la verticale est donnée dans la table 2, avec l'ordre de grandeur des différents termes. On voit que l'équilibre hydrostatique est vérifié avec une très bonne approximation :

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad (6)$$

On peut noter qu'on vérifie également l'équilibre hydrostatique entre des anomalies de densité et des anomalies de de pression sur la verticale. Les termes  $\rho g$  et  $\partial p/\partial z$  sont alors cent fois plus faibles que pour l'état moyen, mais toujours supérieurs aux autres termes de l'équation.

Le seul terme autre terme qui peut devenir important est l'accélération relative  $dw/dt$ , lors de mouvements verticaux intenses à petite échelle, comme dans un nuage d'orage ou près de topographie raide.

### 3.3 Force de Coriolis

La force apparente de Coriolis vaut  $\vec{F}_c = -2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r$ . Cette «force» étant orthogonale à la vitesse, sa puissance est nulle : la force de Coriolis va dévier le mouvement relatif mais ne

peut pas modifier la vitesse du vent ou des courants. Dans le repère  $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ , ses composantes sont

$$\vec{F}_c = -2\Omega \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = -2\Omega \begin{pmatrix} w \cos \varphi - v \sin \varphi \\ u \sin \varphi \\ -u \cos \varphi \end{pmatrix}$$

En pratique, la composante verticale de  $\vec{F}_c$  (dirigée suivant  $\hat{k}$ ) est négligeable devant  $\vec{g}$  et les forces de pression (table 2). Sur l'horizontale, la force due à la vitesse verticale  $w$  est faible<sup>3</sup> également car  $W \ll U$  pour des mouvements d'échelle supérieure à 10 km. Il reste donc uniquement la composante horizontale de  $\vec{F}_c$  due aux mouvements horizontaux :

$$\vec{F}_c \simeq -2\Omega \sin \varphi \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix}$$

ou sous forme vectorielle :

$$\vec{F}_c \simeq -f\hat{k} \wedge \vec{v}_h$$

où  $\vec{v}_h$  est la vitesse horizontale et  $f = 2\Omega \sin \varphi$  est appelé *facteur de Coriolis*. Aux moyennes latitudes ( $\varphi \sim 45^\circ$ ),  $f \sim 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ . Dans l'hémisphère nord, où  $\sin \varphi > 0$ , la force de Coriolis est dirigée à  $90^\circ$  à droite du vent.

### 3.4 Mouvement horizontal

Sur un plan horizontal, les termes restants sont de l'équation du mouvement sont :

$$\frac{d\vec{v}_h}{dt} + f\hat{k} \wedge \vec{v}_h = \vec{F}_{p_h} \quad (7)$$

avec  $\vec{v}_h$  la vitesse horizontale, et  $\vec{F}_{p_h}$  les forces de pression horizontales massiques. Le détail des différents termes projetés en coordonnées sphériques est donné dans la table 3. On voit que les forces de pression seront équilibrées par un des deux premiers termes de l'équation. Pour savoir lequel est dominant, on définit le *nombre de Rossby*  $Ro$  comme le rapport entre accélération relative et de Coriolis :

$$Ro = \frac{(U^2/L)}{fU} = \frac{U}{fL}$$

Avec  $f \sim 10^{-4} \text{ s}^{-1}$  aux moyennes latitudes et  $U \sim 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ , on a  $Ro \sim 0,1$  à l'échelle synoptique ( $L \sim 1000 \text{ km}$ ) et Coriolis est dominante, comme on peut voir dans la table 3. Au contraire, à une échelle plus petite de  $L \sim 10 \text{ km}$ ,  $Ro \sim 10$  et Coriolis devient négligeable.

---

3. Pour des mouvements de type « chute libre », la vitesse verticale  $w$  domine. On peut alors mettre en évidence une déviation vers l'est, mais qui reste très faible (de l'ordre de 1 cm pour 80 m de chute).

Équation-x	$\frac{du}{dt}$	$-2\Omega v \sin \phi$	$+2\Omega w \cos \phi$	$+\frac{uw}{a}$	$-\frac{uv \tan \phi}{a}$	$= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$
Équation-y	$\frac{dv}{dt}$	$+2\Omega u \sin \phi$		$+\frac{vw}{a}$	$+\frac{u^2 \tan \phi}{a}$	$= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$
Échelle	$U^2/L$	$fU$	$fW$	$UW/a$	$U^2/a$	$\delta p/(\rho L)$
Valeur (m·s <sup>-2</sup> )	10 <sup>-4</sup>	10 <sup>-3</sup>	10 <sup>-6</sup>	10 <sup>-8</sup>	10 <sup>-5</sup>	10 <sup>-3</sup>

TABLE 3 – Analyse en ordre de grandeur de l'équation du mouvement horizontale.

## 4 Équilibres dynamiques

### 4.1 Équilibre géostrophique

Dans le cas d'un nombre de Rossby petit (donc  $L \gtrsim 1000$  km aux moyennes latitudes), on est proche d'un équilibre appelé *équilibre géostrophique* entre les forces de Coriolis et de pression :  $\vec{F}_c + \vec{F}_p = \vec{0}$ . La valeur du vent qui réalise exactement cet équilibre est appelé *vent géostrophique*  $\vec{v}_g$ . On a  $f\hat{k} \wedge \vec{v}_g = \vec{F}_p$  soit

$$\vec{v}_g = \frac{1}{\rho f} \hat{k} \wedge \overrightarrow{\text{grad}}_z(p) = \frac{g}{f} \hat{k} \wedge \overrightarrow{\text{grad}}_p(z) \quad (8)$$

suivant l'expression des forces de pression.

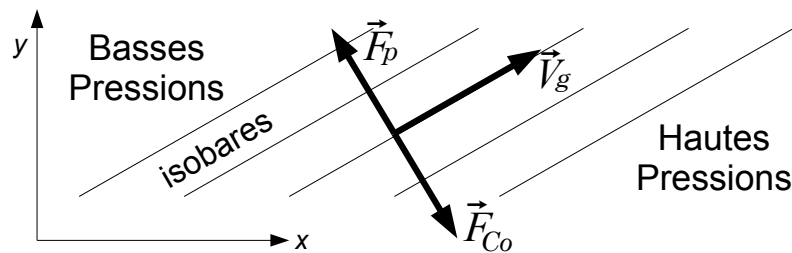


FIGURE 7 – Équilibre des forces dans l'équilibre géostrophique (hémisphère nord)

Comme la force de Coriolis est orthogonale au vecteur vitesse, et opposée à la force de pression, le vent géostrophique est lui-même orthogonal au gradient de pression donc parallèle aux isobares (figure 7). Dans l'hémisphère nord, les basses pressions sont à gauche du vent (loi de Buys-Ballot), à droite dans l'hémisphère sud. La vitesse du vent géostrophique est proportionnelle au gradient de pression (ou de  $z$ ). L'écart entre le vent réel et le vent géostrophique est de l'ordre de  $Ro$  : la carte de la pression et du vent en surface (figure ??) le montre clairement.

Quand le nombre de Rossby est grand (donc à petite échelle), le vent est accéléré des hautes vers les basses pressions. La vitesse sera limitée en surface par la friction.

## 4.2 Vent thermique

L'équilibre dit du *vent thermique* décrit la variation verticale du vent géostrophique. Le nom vient du fait que les variations verticales de pression sont liées par l'équilibre hydrostatique à la température (équation 4). Le résultat est plus simple à obtenir en utilisant la *pression* comme coordonnée verticale : en dérivant l'expression (8) du vent géostrophique (version gradient du géopotential) par rapport à  $p$ , on obtient :

$$\frac{\partial \vec{v}_g}{\partial p} = \frac{g}{f} \hat{k} \wedge \overrightarrow{\text{grad}}_p \left( \frac{\partial z}{\partial p} \right)$$

On a utilisé la permutation des dérivations horizontale et verticale, et le fait que  $g$  ne dépend pas de  $p$ . Le second membre peut être transformé en utilisant l'équilibre hydrostatique (6) :

$$\frac{\partial z}{\partial p} = -\frac{1}{\rho g} = -\frac{RT}{gp}$$

Le gradient horizontal étant pris à pression constante, seule  $T$  varie dans cette expression. On obtient alors :

$$\frac{\partial \vec{v}_g}{\partial p} = -\frac{R}{fp} \hat{k} \wedge \overrightarrow{\text{grad}}_p T \quad (9)$$

Cette équation peut être intégrée entre deux niveaux de pression  $p_1$  et  $p_2$  :

$$\vec{v}_g^2 - \vec{v}_g^1 = \frac{R}{f} \ln \frac{p_1}{p_2} \hat{k} \wedge \overrightarrow{\text{grad}} \langle T \rangle_1^2 \quad (10)$$

Où la température moyenne  $\langle T \rangle$  est définie comme pour l'équation hypsométrique (4). Cette forme intégrée peut être retrouvée directement à partir de (4) et (8). La différence  $\vec{v}_g^2 - \vec{v}_g^1$  est appelée *vent thermique*, avec le niveau 2 situé conventionnellement à une altitude plus élevée que le niveau 1. Dans l'hémisphère nord, le vent thermique est dirigé parallèlement aux isothermes, avec les températures élevées à droite.

La dérivée de  $\vec{v}_g$  par rapport à  $z$  s'obtient en multipliant (9) par  $\partial p / \partial z = -\rho g$  :

$$\frac{\partial \vec{v}_g}{\partial z} = \frac{g}{fT} \hat{k} \wedge \overrightarrow{\text{grad}}_p T \quad (11)$$

## 4.3 Rôle de la friction

Près de la surface (dans la couche limite), les tourbillons de petite échelle transportent de la quantité de mouvement vers la surface, et ont donc un effet de freinage sur le vent qui est comparable en amplitude aux forces de pression et de Coriolis. Si on ne cherche pas à connaître le détail du profil de vent près de la surface, l'impact global des tourbillons peut être représenté par une « force de friction »  $\vec{F}_{fr} = -k \vec{v}$ . On a alors un équilibre à trois forces :

$$\vec{F}_c + \vec{F}_p + \vec{F}_{fr} = \vec{0} \quad (12)$$

Cet équilibre est représenté sur la figure 8. On voit que le vent à l'équilibre n'est plus parallèle aux isobares mais acquiert une composante dirigée vers les basses pressions : pour compenser le freinage (puissance négative) par les forces de friction, une puissance positive est nécessaire et elle ne peut venir que des forces de pression, lors d'un mouvement vers les basses pressions.

On note  $\alpha$  l'angle entre la direction de la vitesse et les isobares (ou la direction du vent géostrophique). En projetant la relation d'équilibre (12) sur la direction des isobares, on obtient :

$$-F_{fr} \cos \alpha + F_c \sin \alpha = -kV \cos \alpha + fV \sin \alpha = 0$$

soit

$$\tan \alpha = k/f$$

On retrouve que l'angle  $\alpha$  vaut 0 si la friction est nulle, et devient important quand  $k$  devient de l'ordre de  $f$  (forces de friction et de Coriolis de magnitudes similaires).

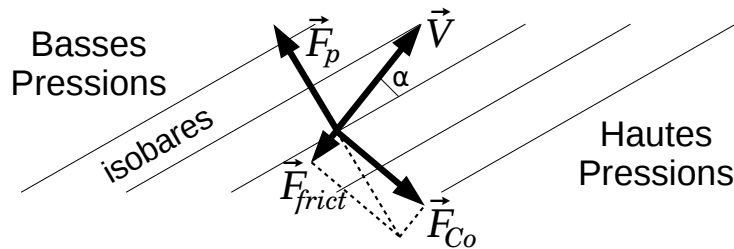


FIGURE 8 – Départ de l'équilibre géostrophique en présence d'une force de friction (hémisphère nord)

On peut également projeter la relation (12) sur la direction de  $\vec{F}_c$  (perpendiculaire au vent). On obtient

$$F_p \cos \alpha - F_c = fV_g \cos \alpha - fV = 0$$

soit

$$V = V_g \cos \alpha$$

La vitesse du vent réel est inférieure à celle du vent géostrophique, d'autant plus que la friction (donc l'angle  $\alpha$ ) est importante.