Magnétostatique **A. Spiga, Interrogation MP*, Lycée Condorcet**

Potentiel vecteur dans le cas d'un fil rectiligne (tiré de *Feynman, Electromagnétisme 1*)

Soit un fil rectiligne de rayon a, parcouru par un courant permanent I. On définit des coordonnées cartésiennes, avec un axe Oz confondu avec le fil.

1

Rappeler la définition du potentiel vecteur $\overrightarrow{A}$. Le lier au vecteur densité de courant $\overrightarrow{j}$. Proposer une analogie avec un raisonnement électrostatique. Proposer une méthode de résolution.

2

Trouver $\overrightarrow{A}$, puis déterminer $\overrightarrow{B}$. Vérifier l'expression en appliquant le théorème d'Ampère.

Lentille magnétique (tiré de *Bernard, L'esprit physique en 50 problèmes*)

On considère un champ magnétique statique à symétrie de révolution autour de l'axe Oz d'un référentiel galiléen. En coordonnées cylindriques, les composantes de $\overrightarrow{B}$ sont de la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} B_r(r,z) \\ 0 \\ B_z(r,z) \end{pmatrix}$$

1

Montrer, en utilisant les lois de la symétrie qu'une spire de courant d'axe Oz génère un tel champ magnétique. Montrer également que la composante radiale du champ magnétique est une fonction impaire de r et que la composante axiale est une fonction paire de r.

2

En exprimant le flux du champ magnétique sortant d'un cylindre d'axe Oz de rayon, r pris comme infiniment petit principal, compris entre les plans z et $z+dz$, montrer qu'au deuxième ordre près en r :

$$B_r(r,z) = -\frac{r}{2}\frac{\partial B_z}{\partial z}$$

3

Ecrire en coordonnées cylindriques les équations du mouvement d'un électron de masse m, de charge $-e$ dans ce champ magnétique (on néglige le poids de l'électron). Que peut-on dire du module de la vitesse de l'électron pendant son mouvement ?

4

On suppose que les trajectoires électroniques sont paraxiales, c'est-à-dire peu inclinées sur l'axe et s'écartant peu de l'axe (approximation de Gauss). Les électrons partent du même point $P(z = z_0)$ de l'axe Oz avec une vitesse de norme donnée v_0 mais une direction différente pour chaque électron.

a) En utilisant une équation du mouvement montrer que :

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{e}{2m} B_z(0, z)$$

b) En négligeant le deuxième ordre en r, montrer que les deux autres équations du mouvement conduisent à l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 r}{dz^2} = -\frac{e^2}{4m^2 v_0^2} r B_z^2$$

c) En déduire que la solution générale de cette équation est de la forme $r = Af(z) + Bg(z)$ où A et B sont des constantes déterminées par les conditions initiales, les fonctions f et g étant indépendantes. En déduire que si une des trajectoires électroniques issue de P recoupe l'axe Oz en un point $P'(z = z'_0)$, alors toutes les trajectoires électroniques issues de P recoupent l'axe en P'. Caractériser cette propriété en termes d'optique géométrique.

Une variante de ce procédé porte le nom de "bouteille magnétique". C'est un des dispositifs de piégage de particules chargées : on peut ainsi confiner un plasma de protons et d'électrons. Ce procédé est l'ancêtre du TOKAMAK, qui, en confinant un plasma de deutérium et de tritium, doit permettre de réaliser la fusion thermonucléaire.

La dissymétrie des équations de Maxwell (tiré de *Bernard, L'esprit physique en 50 problèmes*)

Cet exercice constitue une première approche des phénomènes électrodynamiques. En régime permanent, les équations de Maxwell sont découplées, alors qu'en régime variable, une fluctuation de champ électrique engendre un champ magnétique et vice-versa (d'où la propagation d'une onde électro-magnétique). La question que l'on pose ici est de savoir s'il est possible d'avoir un champ électrique variable dans le temps sans champ magnétique ou un champ magnétique variable dans le temps sans champ électrique.

1

Rappeler les équation de Maxwell en présence d'une distribution volumique de charge ρ et d'une distribution volumique de courant $\overrightarrow{j}$. Montrer qu'un champ magnétique (électrique) nul est compatible (incompatible) avec un champ électrique (magnétique) variable dans le temps. Comment se traduit expérimentalement les équations de Maxwell concernant les flux des vecteurs champs électrique et magnétique ?

2

On cherche un champ électrique solution des équations de Maxwell de la forme $\overrightarrow{E} = E_0 cos(\omega t - kx)\overrightarrow{x}$ où $\overrightarrow{x}$ est le vecteur unitaire de la direction Ox du repère galiléen de travail. Il s'agit d'un signal d'onde longitudinal (comme les ondes sonores). Montrer que ce champ électrique n'est possible qu'en présence d'une charge volumique $\rho(x, t)$ que l'on calculera. Déterminer le champ magnétique de cette onde. Exprimer la densité de courant $\overrightarrow{j}(x, t)$. S'agit-il véritablement d'une onde électromagnétique ?

3

Une masse radioactive, supposée ponctuelle, placée au centre O d'un référentiel galiléen, émet des particules chargées de façon isotrope à partir de l'instant $t = 0$. Sa charge évolue selon la loi de décroissance exponentielle $q = q_0(1 - e^{-t/\tau})$. Les particule émises ont une vitesse constante v.

a) Quel est le type de particules émises ? b) Déterminer uniquement à l'aide des lois de symétrie la direction des champs électrique et magnétique créés par la présence de charges en mouvement dans tout l'espace. c) On se place à l'instant t_0. Montrer que le champ électrique est nul au-delà d'une distance r_0 que l'on calculera. exprimer le champ électrique à une distance $r < r_0$. Calculer la distribution de charges volumiques ainsi que le vecteur densité de courant. Vérifier la loi de conservation de la charge.